



A: XXXIX-0000

## MODELOS MECÂNICOS DO COMPORTAMENTO À PUNÇÃO E ANÁLISE COMPARATIVA DE NORMAS BASEADAS NO MODEL CODE 1990

## MECHANICAL MODELS OF PUNCHING BEHAVIOR AND COMPARATIVE ANALYSIS OF STANDARDS BASED ON THE MODEL CODE 1990

Mariana N. Souza (1) (A); Mayra S. P. L. Perlingeiro (2); Mauro Schulz (3)

(1) Mestranda, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal Fluminense, Niterói, Brasil.

(2) D.Sc., Prof. Associado, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal Fluminense, Niterói, Brasil.

(3) D.Sc., Prof. Titular, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal Fluminense, Niterói, Brasil.

Endereço para correspondência: mnsouza@id.uff.br; (A) Apresentador

**Área temática:** Projeto e Construção de Estruturas

### Resumo

O sistema estrutural de lajes lisas apresenta diversas vantagens para a Construção Civil, tais como simplificação das formas, agilidade no processo construtivo e economia de materiais. O método construtivo também promove facilidade nas instalações prediais, redução da altura da edificação e flexibilidade no arranjo arquitetônico. A ausência de vigas e a concentração de cargas na ligação laje-pilar podem causar a ruptura frágil da laje por punção. Diversos fatores influenciam a resistência da laje à punção, tais como a posição do pilar, a existência de aberturas, a resistência do concreto e a relação entre o momento fletor e a força cortante. Este trabalho faz uma revisão bibliográfica de modelos mecânicos para a verificação de lajes lisas à punção, com ênfase no modelo de dimensionamento do Model Code 90 e nos procedimentos adotados no Eurocode 2:2004 e na ABNT NBR 6118:2014. O comportamento à punção é discutido segundo diversos modelos cinemáticos e diferentes critérios de ruptura. As teorias apresentadas são baseadas em formulações da Elasticidade, da Plasticidade e da Mecânica da Fratura. Alguns modelos consideram a resistência à tração do concreto e o efeito de escala. O modelo de dimensionamento do Model Code 1990 e os procedimentos do Eurocode 2:2004 e da ABNT NBR 6118:2014 são discutidos e comparados, considerando inclusive algumas recomendações nacionais da norma europeia. São apresentadas conclusões baseadas no estudo comparativo de exemplos, que são analisados pelos três regulamentos.

*Palavras-chave:* concreto armado, lajes lisas, dimensionamento à punção.

### Abstract

The flat slab structural system has several advantages for Civil Construction, such as simplifying formwork, agility in the construction process, and material savings. The constructive method also promotes ease in building installations, reduction of the building height, and flexibility in the architectural arrangement. The absence of beams and the concentration of loads in the slab-column connection can cause the slab to break brittle by punching. Several factors influence the slab's punching resistance, such as the column's position, the existence of openings, the concrete strength, and the relationship between the bending moment and the shear force. This work makes a literature review of mechanical models for the verification of flat slabs to punching, with emphasis on the design model of Model Code 90 and the procedures adopted in Eurocode 2:2004 and ABNT NBR 6118:2014. The punching behavior is discussed according to different kinematic models and different failure criteria. The theories presented are based on formulations of Elasticity, Plasticity, and Fracture Mechanics. Some models consider the tensile strength of concrete and the scale effect. The punching model of the Model Code 1990 and the procedures of Eurocode 2:2004 and ABNT NBR 6118:2014 are discussed and compared, including some national recommendations of the European standard. Conclusions are presented based on the comparative study of examples, which are analyzed by the three regulations.

*Keywords:* reinforced concrete, flat slabs, punching design.



## 1. INTRODUÇÃO

O sistema estrutural de lajes lisas é composto por lajes apoiadas diretamente sobre os pilares, não apresentando vigas, o que conduz à concentração das tensões de cisalhamento na ligação laje-pilar, podendo ocorrer punção nessa área, que é a perfuração da laje pelo pilar.

Devido à ação da força cortante e dos momentos fletores transferidos da laje para o pilar, a região da laje no entorno do pilar sofre rotação e move-se verticalmente, gerando a ruptura entre os elementos da ligação. Ocorrem microfissuras, que evoluem para fissuras radiais. A ruína por punção é do tipo frágil, alcançando o Estado Limite Último (ELU) pelo concreto, antes do escoamento da armadura transversal.

Diversos fatores influenciam na resistência da laje à punção, tais como: posição do pilar, existência de aberturas, resistência do concreto e relação entre o momento fletor e a força cortante.

A punção pode ser simétrica ou assimétrica. A primeira ocorre quando existem as mesmas características geométricas e distribuição de tensões equivalentes em relação ao eixo de simetria. A segunda ocorre quando a distribuição das solicitações não é simétrica ao eixo, e pode ser excêntrica quando há uma diferença numérica na transferência de momento fletor.

Vários autores pesquisaram e desenvolveram modelos mecânicos para a verificação de lajes lisas à punção. O modelo de Kinnunen e Nylander (FIB, 2001), em 1960, foi baseado no equilíbrio das solicitações em setores da laje, que são externas à fissura de punção e se estendem até o ponto onde os momentos fletores se anulam (Figura 1). Moe (FIB, 2001), em 1961, propôs que a capacidade última de cisalhamento é resultado da combinação da força máxima suportada pelo pilar com a capacidade de cisalhamento.

Segundo o modelo de Braestrup, Nielsen et al. (FIB, 2001), em 1976, a carga de ruptura por punção é determinada com base na teoria da plasticidade. Shehata (FIB, 2001), em 1985, propôs um modelo mecânico a partir dos padrões de fissuras observados e dos perfis de deflexão linear dos corpos de prova. Segundo o modelo de Bazant e Cao (FIB, 2001), em 1987, a carga de punção é prevista pela mecânica da fratura, com base em critérios de energia e estabilidade, utilizando o efeito escala.

O modelo de Georgopoulos (FIB, 2001), proposto em 1988/1989, foi baseado na resistência à tração do concreto. Alexander e Simmonds (FIB, 2001), em 1992, propuseram um modelo modificado de treliça, no qual são assumidas bielas de compressão curvas. Menétrey (FIB, 2001), em 1996, utiliza o modelo de bielas e tirantes, no qual a ruptura do tirante próximo ao pilar corresponde à ruptura de punção. Hallgren (FIB, 2001), em 1996/1997, utiliza como base o modelo proposto por Kinnunen e Nylander.

No método da superfície de controle, as tensões são calculadas nas regiões que podem sofrer ruptura por punção. O modelo da fissura crítica por cisalhamento proposto por Muttoni (2008) utiliza como base o modelo proposto por Kinnunen e Nylander. A abertura da fissura crítica de cisalhamento é diretamente proporcional ao produto da rotação da laje e da altura útil, levando a um critério de falha (Figura 1).

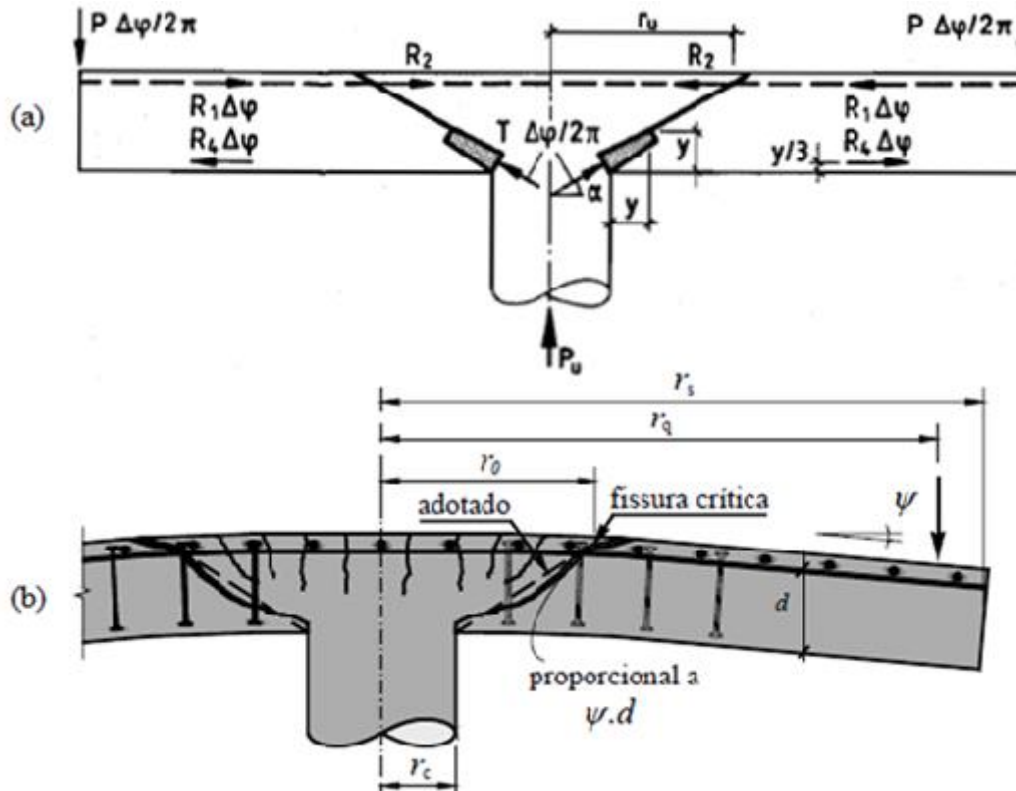


Figura 1. (a) Modelo mecânico de Kinnunen e Nylander (FIB, 2001) e (b) Propagação e rotação da fissura crítica de cisalhamento (Muttoni, 2008).

## 2. METODOLOGIA

As equações normativas para o cálculo de um pilar interno submetido à punção presentes no Model Code 90 (1993), no Eurocode 2 (2004) e na ABNT NBR 6118 (2014) são apresentadas. É feita a verificação da laje à punção de um pilar interno ensaiado por Trautwein, Gomes e Melo (2013) com as equações das normas supracitadas.

## 3. RECOMENDAÇÕES DAS NORMAS

O método de superfície de controle é usado por várias normas regulamentadoras na verificação da punção. As superfícies de controle estão relacionadas com as regiões que podem sofrer ruptura por punção. Elas são localizadas entre a face do pilar e a primeira camada de armadura transversal, dentro da região armada e além dela. Essa superfície apresenta solicitações cisalhantes, tornando-se uma zona de fragilidade na laje. O método calcula a tensão nominal de cisalhamento nas superfícies de controle e as compara com as tensões resistentes do concreto.

Os perímetros de controle são denominados  $u_0$ ,  $u_1$  e  $u_n$  (Figura 2). O perímetro  $u_0$  localiza-se no contorno do pilar e nele é verificada a tensão de compressão no concreto. O perímetro  $u_1$  está distante  $2d$  da face externa do pilar, no qual é analisada a necessidade de armadura transversal. Sendo essa necessária, utiliza o perímetro  $u_n$ , localizado a uma distância  $2d$  da última camada de armadura transversal para o Model Code 90 (1993) e ABNT NBR 6118



(2014), ou a uma distância de  $1,5d$ , para o Eurocode 2 (2004). A altura útil média  $d$  da laje é definida por

$$d = \frac{d_x + d_y}{2} \quad (1)$$

onde  $d_x$  e  $d_y$  são determinadas entre a face comprimida da laje e os baricentros das armaduras ortogonais nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

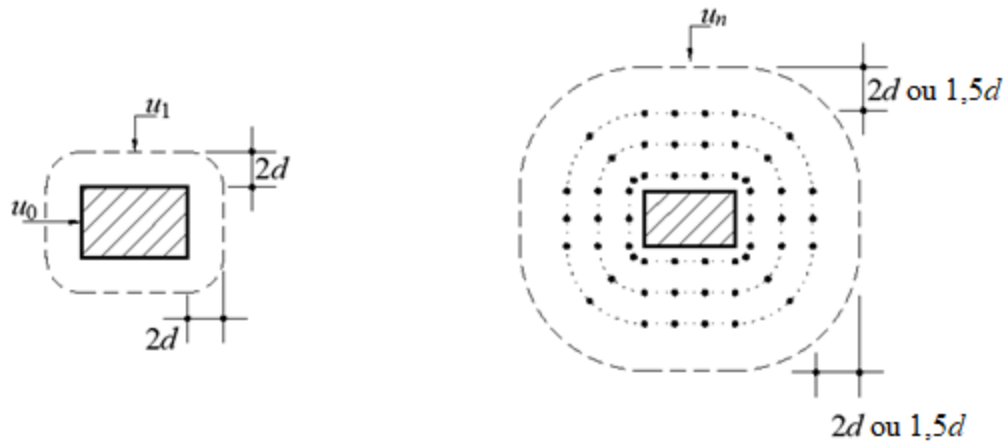


Figura 2. Perímetros de controle de um pilar interno

### 3.1 MODEL CODE 90

A Tabela 1 apresenta as equações para o cálculo da tensão solicitante de cisalhamento  $\tau_{Sd}$  e as tensões resistentes de cisalhamento  $\tau_{Rd}$  do Model Code 90 (1993).

Tabela 1. Equações para as tensões segundo o Model Code 90 (1993)

$\tau_{Sd}$ no perímetro $u_1$	$\tau_{Sd} = F_{Sd} / u_1 d$ (2)
$\tau_{Rd}$ no perímetro $u_0$	$\tau_{Rd} = 0,5 [0,6(1 - f_{ck}/250)] f_{cd}$ (3)
$\tau_{Rd}$ com armadura transversal no perímetro $u_1$	$\tau_{Rd} = 0,09 \left(1 + \sqrt{\frac{200}{d}}\right) (100 \sqrt{\rho_x \rho_y} f_{ck})^{1/3} + 1,5 \frac{d}{s_r} \frac{A_{sw} f_{ywd} \sin \alpha}{u_1 d}$ (4)
$\tau_{Rd}$ sem armadura transversal no perímetro $u_n$	$\tau_{Rd} = 0,12 \left(1 + \sqrt{\frac{200}{d}}\right) (100 \sqrt{\rho_x \rho_y} f_{ck})^{1/3}$ (5)

A força concentrada no pilar é  $F_{Sd}$ , a resistência característica à compressão do concreto é  $f_{ck}$  e  $f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c$ , e  $\gamma_c$  é o coeficiente de ponderação do concreto. As taxas de armadura nas direções ortogonais nas direções  $x$  e  $y$  são, respectivamente,  $\rho_x$  e  $\rho_y$ , e devem ser calculadas, em cada direção, para uma largura igual à dimensão do pilar acrescido da extensão  $3d$  para cada





lado. A área total de armadura transversal ( $\text{mm}^2$ ) em um contorno paralelo à  $u_1$  é  $A_{sw}$  e o espaçamento radial entre esses contornos é  $s_r$ . O ângulo  $\alpha$  entre a armadura transversal e o plano da laje é usualmente de  $90^\circ$ . O valor da tensão de escoamento da armadura transversal  $f_{ywd}$  para o Model Code 90 (1993) é limitado a 300 MPa.

### 3.2 EUROCODE 2

A Tabela 2 traz as formulações para calcular a tensão solicitante de cisalhamento e as tensões resistentes de cisalhamento presentes no Eurocode 2 (2004).

Tabela 2. Equações para as tensões segundo o Eurocode 2 (2004)

$\tau_{Sd}$ no perímetro $u_1$	$\tau_{Sd} = F_{Sd}/u_1 d$	(6)
$\tau_{Rd}$ no perímetro $u_0$	$\tau_{Rd} = 0,4 [0,6(1 - f_{ck}/250)] f_{cd}$	(7)
$\tau_{Rd}$ com armadura transversal no perímetro $u_1$	$\tau_{Rd} = 0,75 \left[ \frac{0,18}{\gamma_c} \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) \left( 100 \sqrt{\rho_x \rho_y} f_{ck} \right)^{1/3} \right] + 1,5 \frac{d}{s_r} \frac{A_{sw} f_{ywd} \sin \alpha}{u_1 d}$	(8)
$\tau_{Rd}$ sem armadura transversal no perímetro $u_n$	$\tau_{Rd} = \frac{0,18}{\gamma_c} \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) \left( 100 \sqrt{\rho_x \rho_y} f_{ck} \right)^{1/3}$	(9)

Sendo a tensão efetiva na armadura transversal  $f_{ywd,ef} = 250 + 0,25d \leq f_{ywd}$  em MPa e  $d$  em mm.

O Eurocode 2 (2004) limita o valor de da taxa de armadura de flexão em:

$$\rho = \sqrt{\rho_x \rho_y} \leq 0,02 \quad (10)$$

A versão alemã DIN EN 1992-1-1 (Fingerloos, Hegger e Zilch, 2012) faz mais uma alteração nessa limitação em ser menor ou igual a

$$\rho \leq 0,5 f_{cd} / f_{yd} \quad (11)$$

onde  $f_{yd}$  é a resistência de escoamento de cálculo da armadura.

A norma também limita o efeito de escala em  $1 + \sqrt{200/d} \leq 2$ , sendo  $d$  em mm.

### 3.3 ABNT NBR 6118

A Tabela 3 apresenta as equações para calcular a tensão solicitante de cisalhamento e as tensões resistentes de cisalhamento fornecidas pela ABNT NBR 6118 (2014).



Tabela 3. Equações para as tensões segundo a ABNT NBR 6118 (2014)

$\tau_{Sd}$ no perímetro $u_1$	$\tau_{Sd} = F_{Sd} / u_1 d$	(12)
$\tau_{Rd}$ no perímetro $u_0$	$\tau_{Rd} = 0,27(1 - f_{ck}/250) f_{cd}$	(13)
$\tau_{Rd}$ com armadura transversal no perímetro $u_1$	$\tau_{Rd} = 0,1 \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) \left( 100 \sqrt{\rho_x \rho_y} f_{ck} \right)^{1/3} + 1,5 \frac{d}{s_r} \frac{A_{sw} f_{ywd} \sin \alpha}{u_1 d}$	(14)
$\tau_{Rd}$ sem armadura transversal no perímetro $u_n$	$\tau_{Rd} = 0,13 \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) \left( 100 \sqrt{\rho_x \rho_y} f_{ck} \right)^{1/3}$	(15)

O valor da tensão efetiva na armadura transversal  $f_{ywd,ef}$  estabelecido pela norma deve ser menor do que 300 MPa para conectores e 250 MPa para estribos. Caso a laje possua espessura superior a 15 cm, deve-se interpolar linearmente o valor da tensão efetiva conforme a ABNT NBR 6118 (2014). Para lajes com espessura maior que 35 cm, a tensão efetiva é de 435 MPa.

#### 4. ESTUDO DE CASO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Trautwein, Gomes e Melo (2013) ensaiaram lajes lisas com pilares internos. O experimento consiste em três lajes lisas de concreto armado (3,00 m x 3,00 m x 0,20 m) com pilares internos (0,20 m x 0,20 m) submetidos a carregamento simétrico, como pode ser visualizado na Figura 3. As lajes possuem armadura de cisalhamento do tipo *stud* em CA50 (Figura 4). Na Tabela 4 encontram-se as características geométricas e dos materiais das lajes.



Figura 3. Dimensão da laje (adaptado de Trautwein, Gomes e Melo (2013))



## DISTRIBUIÇÃO RADIAL - ARMADURA INTERNA

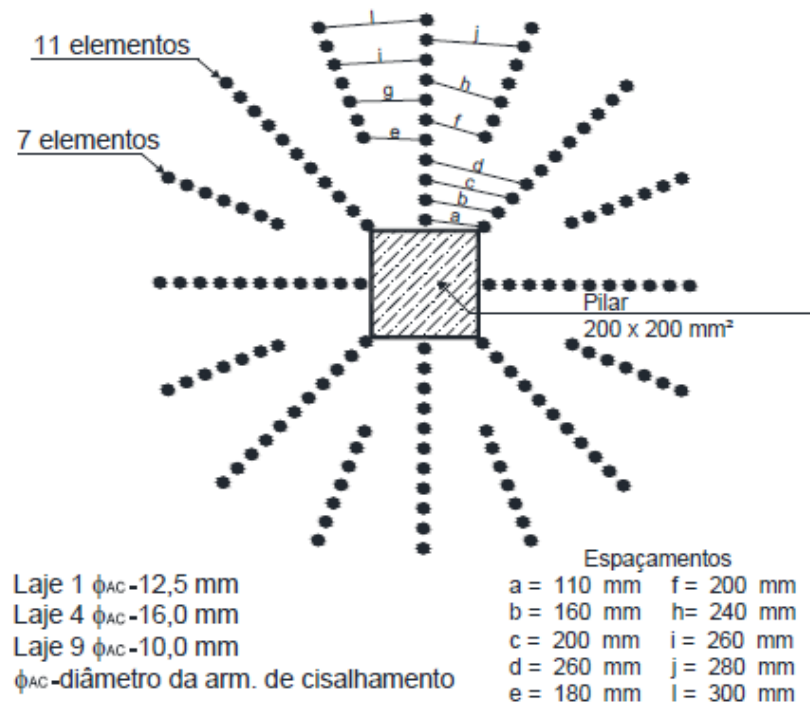


Figura 4. Distribuição da armadura de cisalhamento (Trautwein, Gomes e Melo (2013))

A distância entre o pilar e a primeira camada de armadura transversal  $s_0$  é de 35 mm e a distância entre os *studs*  $s_r$  é de 60 mm.

Os resultados apresentados na Tabela 4 são obtidos de forma analítica com os cálculos realizados segundo o Model Code 90 (1993), Eurocode 2 (2004) e ABNT NBR 6118 (2014). Estes são mostrados por meio da relação entre a tensão solicitante e a tensão resistente estimada pelas normas, sendo definida por  $\tau_{EXP}/\tau_{ESTIMADO}$ .

Tabela 4. Ensaios de Trautwein, Gomes e Melo (2013) e as relações entre a capacidade experimental e normativa

Laje	$d$ (mm)	$c_1$ (mm)	$c_2$ (mm)	$V_{EXP}$ (kN)	$\rho$ (%)	$f_{ck}$ (MPa)	$A_{sw}/cam$ (mm <sup>2</sup> )	$V_{MC90}$ (1993)	$V_{EC2}$ (2004)	$V_{NBR}$ (2014)	$\tau_{EXP}/\tau_{MC90}$ (1993)	$\tau_{EXP}/\tau_{EC2}$ (2004)	$\tau_{EXP}/\tau_{NBR}$ (2014)
1	159	200	200	1050	0,012	36,8	981,25	1198	958	1078	0,88	1,10	0,97
4	164	200	200	1038	0,012	43,4	1607,68	1412	1129	1271	0,74	0,92	0,82
9	154	200	200	933	0,013	39,4	628,00	1227	981	1104	0,76	0,95	0,85

Os lados do pilar são  $c_1$  e  $c_2$  e  $V_{EXP}$  é a carga última de ensaio. A carga teórica das normas  $V_{MC90}$ ,  $V_{EC2}$  e  $V_{NBR}$  é determinada definindo valores de  $\tau_{Rk}$  compatíveis com as equações (3) a (5), (7) a (9) e (13) a (15).



As cargas críticas das lajes L1, L4 e L9 são verificadas no perímetro  $u_0$ . O Model Code 90 (1993) fornece as cargas críticas menos conservadores. Os valores do Eurocode 2 (2004) são os mais conservadores, e a ABNT NBR 6118 (2014) apresenta resultados intermediários.

As cargas últimas obtidas pelas três normas são coerentes com os coeficientes 0,30, 0,24 e 0,27 das equações (3), (7) e (13).

Valores das relações entre as cargas experimentais e estimadas superiores a 0,95 são usualmente considerados satisfatórios. Todas as normas apresentaram relações inferiores a 0,95. O Eurocode 2 (2004) apresenta relações superiores a 0,92 e os melhores resultados.

## 5. CONCLUSÕES

Este trabalho utiliza as tensões últimas obtidas pelo ensaio experimental de três lajes lisas de concreto armado com pilares internos e armadura transversal realizado por Trautwein, Gomes e Melo (2013) a fim de comparar os valores das tensões solicitantes e resistentes entre as normas Model Code 90 (1993), Eurocode 2 (2004) e ABNT NBR 6118 (2014).

Os resultados experimentais de carga última dos ensaios foram comparados com a carga última prevista por prescrições normativas, obtendo, dessa forma, uma relação entre as capacidades  $\tau_{EXP}/\tau_{ESTIMADO}$ .

A verificação à punção envolve um grande número de parâmetros e equações. Todas as lajes analisadas neste trabalho romperam no perímetro  $u_0$ . Entretanto, pequenas diferenças nos parâmetros das equações das normas estudadas alteraram significativamente as relações entre as capacidades  $\tau_{EXP}/\tau_{ESTIMADO}$ . Assim, este trabalho evidencia a complexidade do tema e a necessidade da pesquisa continuada em dimensionamento à punção das lajes, tendo em vista a sua relevância na construção das estruturas de concreto armado.

## REFERÊNCIAS

Associação Brasileira de Normas Técnicas (2014). NBR 6118 - Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro.

Comité Euro-International du Béton, CEB-FIP (1993). Model Code 1990. London.

Eurocode 2 (2004). Design of Concrete Structures, Part 1, General rules and rules for buildings, CEN, EN 1992-1-1, Brussels, Belgium.

Fingerloos, F., Hegger, J., and Zilch, K (2012). Eurocode 2 für Deutschland: DIN EN 1992-1-1 Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetonbauwerken - Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau mit nationalem Anhang. Berlin: kommentierte Fassung, Beuth.

International Federation for Structural Concrete (fib) (2001). Punching of Structural Concrete Slabs. fib Bulletin 12, Lausanne, Switzerland.

Muttoni, A. (2008). Punching shear strength of reinforced concrete slabs without transverse reinforcement, ACI Structural Journal, v.105, n. 4, Jul.-Aug, pp. 440-450.

Trautwein, L. M.; Gomes, R. B.; Melo, G. S. (2013) Puncionamento em lajes planas de concreto armado com armadura de cisalhamento interna. REEC - Revista Eletrônica de Engenharia Civil, v. 7, p. 38-4