



A: XXXIX-0000

ANÁLISE DE ELEMENTOS FINITOS DE VIGA SOBRE FUNDAÇÃO VISCOELÁSTICA SOB CARGAS MÓVEIS

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF BEAM ON A VISCOELASTIC FOUNDATION UNDER MOVING LOADS

Arthur C.A. Pereira (A) (1); Welky K.F. Brito (1); Angelo V. Mendonça (2)

- (1) Doutorando em Estruturas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, PPGECA, João Pessoa, Brasil.
(2) Dr. Prof., Universidade Federal da Paraíba, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, João Pessoa, Brasil.
Endereço para correspondência: acppereira@gmail.com; (A) Apresentador

Área temática: Métodos Computacionais.

Resumo

O desempenho de uma estrada de pavimento rígido pode ser obtido matematicamente em diferentes níveis de precisão, usando abordagens rigorosas baseadas em modelos contínuos ou representações mais pobres baseadas em fundações elásticas. Devido ao menor custo computacional em comparação aos modelos baseados em contínuo, os modelos elásticos de fundação têm sido amplamente utilizados em muitos problemas de interação solo-estrutura, especialmente em análises estáticas e dinâmicas de edifícios, rodovias e estruturas ferroviárias. Em muitos trabalhos, a análise de vibração de uma estrada de pavimento rígido tem sido idealizada como uma viga/placa apoiada em diferentes tipos de fundação elástica sob excitações dinâmicas. Neste artigo é apresentado e avaliado o problema de pavimentação rodoviária rígida sob uma velocidade constante de resposta às cargas de tráfego usando uma solução de elementos finitos. O pavimento rígido é modelado como elemento de viga e o solo é assumido como fundação viscoelástica Pasternak. A resposta temporal do deslocamento, velocidade e aceleração da viga são obtidas usando o algoritmo de Newmark.

Palavras-chave: MEF, Fundação Viscoelástica, Vigas, Interação solo-estrutura.

Abstract

The performance of rigid pavement road may be mathematically obtained in different levels of accuracy, using rigorous approaches based on continuum models or poorer representations based on elastic foundations. On account of lower computational cost in comparison to continuum-based models, elastic foundation models have been widely used in many soil-structure interactions problems, especially in static and dynamic analysis of buildings, highways, and railroad structures. In many works, vibration analysis of rigid pavement road has been idealized as a beam/plate resting on different types of elastic foundation under dynamic excitations. In this paper rigid road pavement problem under a constant velocity of traffic loads responses using a finite element solution is presented and evaluated. The rigid pavement is modelled as beam element and soil is assumed to be Pasternak viscoelastic foundation. Time response of displacement, velocity and acceleration of the beam is obtained using Newmark's algorithm..

Keywords: FEM, Viscoelastic Foundation, Beam, Soil-structure interaction.



1. INTRODUÇÃO

Problemas de interação solo-estrutura são questões interessantes devido à variedade de aplicações em engenharia estrutural e de transporte, como em construção, rodovias, ferrovias e problemas geotécnicos. A tendência moderna de velocidades mais altas em rodovias e ferrovias intensificou as pesquisas para prever com precisão o comportamento vibracional nessas estruturas, despertando grande interesse neste assunto por parte da indústria e da academia. Pavimentos rodoviários rígidos sob cargas móveis têm sido usualmente assumidos como lajes, como em Alisjahabana *et al.* (2018), Alvappillai *et al.* (1992), Patil *et al.* (2013), Liua *et al.* (2021), Beskou e Theodorakopoulos (2011) e vigas, visto em Ichikawa *et al.* (2000), Mallick e Korchi (2017), Patil *et al.* (2012) e Hu *et al.* (2016). Embora os modelos de lajes sejam mais rigorosos na idealização do pavimento, geralmente são necessários muitos graus de liberdade para resolver o problema numericamente. Por outro lado, a consideração do pavimento como viga produz um sistema algébrico com um número significativamente menor de incógnitas.

Deve-se notar que quando uma estrutura é submetida a cargas móveis, os efeitos gravitacionais e de inércia produzidos por elas podem alterar significativamente o comportamento estrutural do problema. Assim, a influência das cargas móveis nas estruturas tem sido investigada usando basicamente três modelos: a) abordagem da carga móvel, b) representação da massa móvel e c) modelo da massa suspensa.

No modelo de carga móvel, a massa do veículo está diretamente ligada à estrutura e seus efeitos inerciais são ignorados, levando-se em conta apenas os efeitos gravitacionais do veículo. A maioria dos estudos de vigas apoiadas em fundações (visco)elásticas e sob carga móvel utiliza o modelo de Winkler para fundação. Alguns trabalhos, como Hu *et al.* (2016), Yu e Yuan (2014), Yong e Yang (2008) representaram a viga pelo modelo de Euler-Bernoulli e Fryba (1972) discutiu o uso do modelo de viga de Timoshenko para resolver o problema. Para o caso em que o modelo de carga móvel é aplicado a uma viga apoiada na fundação Pasternak (visco)elástica, alguns trabalhos, como Yu *et al.* (2017), assumiram o modelo de Euler-Bernoulli para representar a viga e Karganovin e Younesian (2004) discutiram o uso do modelo de Timoshenko à viga. Em um artigo de revisão, Beskou e Theodorakopoulos (2011) apresentam muitos trabalhos que tratam dos efeitos dinâmicos da movimentação de modelos de carga em pavimentos rodoviários.

No modelo de massa móvel, a massa do veículo está diretamente ligada à estrutura e os efeitos gravitacionais e inerciais da massa do veículo são levados em consideração na análise do problema. Uzzal *et al.* (2012) apresentam uma solução numérica para uma viga finita de Euler-Bernoulli e Lee (1998) para uma de Timoshenko, ambas apoiadas por uma base elástica de Winkler. Esen (2019) discute o uso da viga Timoshenko apoiada em uma fundação Pasternak para tratar o problema.

Nos modelos de massa móvel suspensa, a massa do veículo é conectada viscoelasticamente à estrutura, proporcionando um ambiente mais confortável aos ocupantes do veículo quando comparado aos modelos de carga móvel e massa móvel. Tanto elementos de viga finitas quanto infinitas têm sido usados para resolver o problema de interação veículo-estrutura. Yin e Yang (2017) discutem uma viga de Euler-Bernoulli suportada por uma fundação viscoelástica de Winkler e Patil *et al.* (2013) apresentaram um estudo onde a viga Euler-Bernoulli é suportada por uma fundação viscoelástica Pasternak. Luo e Xia (2017) derivaram uma solução analítica para o caso de carregamento veicular harmônico considerando uma viga infinita de Timoshenko sobre uma fundação viscoelástica Pasternak.



Este trabalho trata da análise de pavimentos rígidos submetidos a uma carga móvel, onde o pavimento é assumido como uma viga Timoshenko finita apoiada em uma fundação viscoelástica tipo Pasternak, via elementos finitos. Um exemplo de vigas finitas com diferentes condições de contorno é apresentado para validar as soluções.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Assume-se que o pavimento rígido é representado por um modelo de viga Timoshenko apoiado na fundação Pasternak, conforme mostrado na Fig.1. Esse sistema é definido assumindo as seguintes premissas: a) pequenos campos de deslocamento e deformação; b) supressão da alteração da forma da seção transversal; c) as seções transversais planas normais aos seus eixos antes da deformação permanecem planas, mas não necessariamente normais aos eixos após a deformação; d) assume-se que o material possui propriedades elásticas-lineares, homogêneas e isotrópicas, implicando na validade da lei de Hooke. As premissas para a fundação de Pasternak estão associadas a um sistema de molas linearmente elásticas independentes, espaçadas infinitesimalmente, conectadas a uma camada de cisalhamento linearmente elástica.

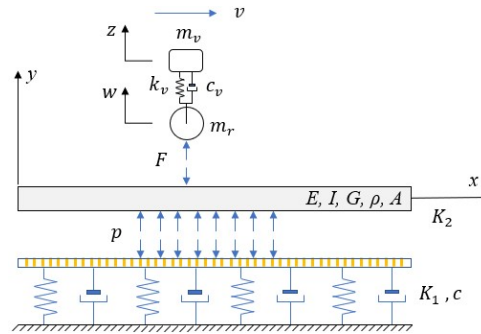


Figura 1. Modelo de um pavimento rígido sobre fundação de Pasternak

Os efeitos gravitacionais e inerciais causados pela carga móvel na estrutura são representados usando um modelo de massa suspensa móvel como mostrado na Fig1. A massa em movimento se move sob velocidade constante e um sistema de coordenadas é considerado fixo em um referencial inercial, onde o eixo horizontal é paralelo ao eixo longitudinal não deformado da viga. As variáveis do problema são definidas da seguinte forma: $w(x, t)$ e $\theta(x, t)$ são respectivamente o deslocamento transversal e a rotação da seção transversal da viga. A projeção do lugar da massa em movimento na horizontal é dada por $x(t) = vt$. O deslocamento transversal da massa suspensa móvel é denotado por $z(x, t)$ e o deslocamento transversal da viga no local da massa móvel é $W(x, t) = w(x, t)$. As primeiras variações das energias envolvidas no problema tais como a energia cinética π_c , e a energia potencial π_p , e o trabalho realizado pelas forças externas não conservativas W_{nc} são dadas por:

$$\delta\pi_p = \int_0^L EI \frac{d\theta}{dx} \delta \left(\frac{d\theta}{dx} \right) dx + \int_0^L \kappa GA \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right) \delta \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right) dx + \int_0^L [K_1 w \delta w + K_2 \frac{dw}{dx} \delta \left(\frac{dw}{dx} \right)] dx - (m_r + m_v) g \delta w + k_v (z - w) \delta (z - w). \quad (1)$$

$$\delta\pi_c = \int_0^L \rho A \dot{w} \delta \dot{w} dx + \int_0^L \rho I \dot{\theta} \delta \dot{\theta} dx + m_r \dot{W} \delta \dot{W} + m_v \dot{z} \delta \dot{z}. \quad (2)$$

$$\delta W_{nc}(t) = - \int_0^L c \dot{w} \delta w dx - c_v (\dot{z} - \dot{w}) \delta (z - w). \quad (3)$$



onde E e G são os módulos de Young e de cisalhamento, respectivamente. I , A , L são o momento de inércia, a área da seção transversal e o comprimento da viga, respectivamente. κ é o fator de correção de cisalhamento. Os coeficientes da fundação viscoelástica são: K_1 , a constante de mola; K_2 , o parâmetro de cisalhamento, e c , a constante de amortecimento. O modelo do veículo consiste em uma massa não suspensa m_r e uma massa suspensa m_v suportada por uma mola de rigidez k_v e um amortecedor viscoso de coeficiente de amortecimento c_v . A aceleração da gravidade é denotada por g .

Neste artigo, matrizes de elementos finitos da viga de Timoshenko apoiadas na fundação viscoelástica de Pasternak são obtidas aproximadamente a partir das funções de interpolação de vigas de Timoshenko (sem contato com a fundação elástica) dadas por Petyt (21)[p. 116], para que deslocamentos e rotações no elemento possam ser interpolados como:

$$w(\xi) = [N]\{u\}, \theta(\xi) = [L]\{u\} \quad (4)$$

Onde o parâmetro adimensional $\xi = 2x/Le$ com Le sendo o comprimento do elemento e $\{u\} = \{w_i \ \theta_i \ w_j \ \theta_j\}^T$. $[N] = [N_1(\xi) \ N_2(\xi) \ N_3(\xi) \ N_4(\xi)]$ e $[L] = [N_5(\xi) \ N_6(\xi) \ N_7(\xi) \ N_8(\xi)]$ são vetores-colunas contendo as funções de forma.

A matriz de rigidez de cada elemento pode ser obtida:

$$\delta \pi_p = \{\delta u\}^T [k_e] \{u\} + \{\delta u\}^T [N]_{x=x_0}^T k_v [N]_{x=x_0} \{u\} - \{\delta u\}^T [N]_{x=x_0}^T k_v z - z [N]_{x=x_0}^T k_v \{u\} + z k_v \delta z - \{\delta u\}^T [N]_{x=x_0}^T (m_r + m_v). \quad (5)$$

A matriz $[k_e]$ dada na Eq.(5) é definida como:

$$[k_e] = [K_{ii}] + [K_{mm}] - [K_{ml}] - [K_{lm}] + [K_{ll}] + [K_{nn}]. \quad (6)$$

onde

$$[K_{ii}] = \int_{-1}^1 \left[\frac{dL}{dx} \right]^T EI \left[\frac{dL}{dx} \right] J d\xi, [K_{mm}] = \int_{-1}^1 \left[\frac{dN}{dx} \right]^T (\kappa GA + K_2) \left[\frac{dN}{dx} \right] J d\xi,$$

$$[K_{ml}] = \int_{-1}^1 \left[\frac{dN}{dx} \right]^T \kappa GA [L] J d\xi, K_{lm} = \int_{-1}^1 [L]^T \kappa GA \left[\frac{dN}{dx} \right] J d\xi,$$

$$[K_{ll}] = \int_{-1}^1 [L]^T \kappa GA [L] J d\xi, K_{nn} = \int_{-1}^1 [N]^T K_1 [N] J d\xi.$$

Os coeficientes não-nulos de $[k_e]$ são dados por:

$$k_{11} = \frac{12EI}{L(3\gamma + 1)} + \frac{12L(210\gamma^2 + 147\gamma + 26)K_1}{840(3\gamma + 1)^2} + \frac{504K_2(15\gamma^2 + 10\gamma + 2)}{840(3\gamma + 1)^2}$$

$$k_{12} = \frac{6EI}{L^2(3\gamma + 1)} + \frac{L^2(315\gamma^2 + 231\gamma + 44)K_1 + 84K_2}{840(3\gamma + 1)^2}$$

$$k_{13} = -\frac{12EI}{L(3\gamma + 1)} + \frac{36L(35\gamma^2 + 21\gamma + 3)K_1}{840(3\gamma + 1)^2} - \frac{504K_2(15\gamma^2 + 10\gamma + 2)}{840(3\gamma + 1)^2}$$

$$k_{14} = \frac{6EI}{L^2(3\gamma + 1)} - \frac{L^2(315\gamma^2 + 189\gamma + 26)K_1 - 84K_2}{840(3\gamma + 1)^2}$$

$$k_{22} = \frac{(4 + 3\gamma)EI}{L(3\gamma + 1)} + \frac{L^3(63\gamma^2 + 42\gamma + 8)K_1}{840(3\gamma + 1)^2} + \frac{14K_2L^2[45\gamma^2 + 30\gamma + 8]}{840(3\gamma + 1)^2}$$

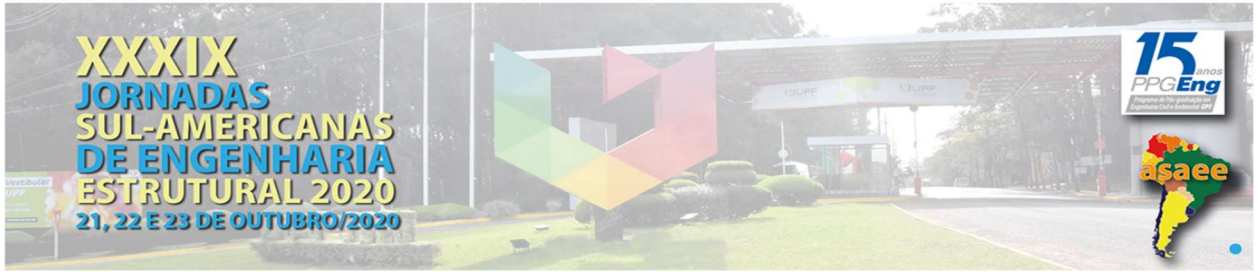
$$k_{35} = -k_{26}$$

$$k_{24} = \frac{(2 - 3\gamma)EI}{L^2(3\gamma + 1)} - \frac{3L^3(21\gamma^2 + 14\gamma + 2)K_1}{840(3\gamma + 1)^2} + \frac{14K_2L^2[45\gamma^2 + 30\gamma + 2]}{840(3\gamma + 1)^2}$$

$$k_{33} = k_{11}; k_{34} = -k_{12}; k_{44} = k_{22}, k_{34} = k_{13} = k_{23} = k_{34} = 0$$

$$\text{com } \gamma = \frac{4EI}{\kappa GAL^2}.$$

A energia cinética transversal e a cinética rotacional discretizadas da viga podem ser obtidas de forma similar a Eq. (5), resultando em:



$$\delta\pi_c = \{\delta\dot{u}\}^T [m_e] \{\dot{u}\} + \dot{z} m_v \dot{z} + \{\delta\dot{u}\}^T [N]_{x=x_0}^T m_r [N]_{x=x_0} \{\dot{u}\}. \quad (7)$$

Na Eq.(7), $[m_e] = [M_{nn}] + [M_{ll}]$ e os valores explícitos são:

$$[M_{nn}] = \int_{-1}^1 [N]^T \rho A [N] d\xi = \rho A [R], \quad (8)$$

onde

$$[R] = \frac{L}{840(1+3\gamma)^2} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ & & m_{33} & m_{34} \\ sym & & & m_{44} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$[M_{ll}] = \int_{-1}^1 [L]^T \rho I [L] d\xi = \frac{\rho I}{30L(1+3\gamma)^2} \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ & & n_{33} & n_{34} \\ sym & & & n_{44} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Os elementos da matriz de massa das Eqs.(9) e (10) são:

$$\begin{aligned} m_{11} &= 2520\gamma^2 + 1764\gamma + 312; m_{12} = (315\gamma^2 + 231\gamma + 44)L; \\ m_{13} &= 1260\gamma^2 + 756\gamma + 108; m_{14} = -(315\gamma^2 + 189\gamma + 26)L; m_{23} = -m_{14}; \\ m_{22} &= (63\gamma^2 + 42\gamma + 8)L^2; m_{24} = -3(21\gamma^2 + 14\gamma + 2)L^2; m_{33} = m_{11}; m_{34} = -m_{12}; m_{44} = m_{22}; \\ n_{11} &= 36; n_{12} = -3(15\gamma - 1)L; n_{13} = -n_{33} = -n_{11}; \\ n_{14} &= -n_{34} = -n_{23} = n_{12}; n_{22} = (90\gamma^2 + 15\gamma + 4)L^2; n_{24} = (45\gamma^2 - 15\gamma - 1)L^2; n_{44} = n_{22} \end{aligned}$$

O trabalho dissipado discretizado da Eq.(3) devido ao amortecimento causado pela fundação viscoelástica é dado por:

$$\delta W_{nc}(t) = -\{\delta u\}^T [c_e] \{\dot{u}\} - \{\delta u\}^T [N]_{x=x_0}^T c_v [N]_{x=x_0} \{\dot{u}\} + \{\delta u\}^T [N]_{x=x_0}^T c_v \dot{z} + \delta z c_v [N]_{x=x_0} \{\dot{u}\} - \delta z c_v \dot{z}. \quad (11)$$

com $[c_e] = \int_{-1}^1 [N]^T c [N] d\xi = c [R]$ e $[R]$ dado na Eq.(9)

Relacionando as Eqs.(5),(7) e (11), o sistema algébrico no instante futuro $t + \Delta t$ é:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [m_e] + [N]_{x=x_0}^T m_r [N]_{x=x_0} & [0] \\ 0 & m_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} \\ \ddot{z}_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} [c_e] + [N]_{x=x_0}^T c_v [N]_{x=x_0} & -[N]_{x=x_0}^T c_v \\ -c_v [N]_{x=x_0} & c_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}\}_{t+\Delta t} \\ \dot{z}_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} [k_e] + [N]_{x=x_0}^T k_v [N]_{x=x_0} & -[N]_{x=x_0}^T k_v \\ -[N]_{x=x_0} k_v & k_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}_{t+\Delta t} \\ z_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [N]_{x=x_0}^T (m_r + m_v) \\ 0 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (12)$$

onde t é o tempo presente e Δt é o passo de tempo.

Nesse artigo, as integrações temporais por variáveis realizadas de forma aproximada utilizando o método de Newmark(1959), sendo os deslocamentos velocidades futuras dados por:

$$\{u\}_{t+\Delta t} = \{u\}_t + \{\dot{u}\}_t \Delta t + [(1/2 - \beta)\{\ddot{u}\}_t + \beta\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t}] \Delta t^2 \quad (13)$$

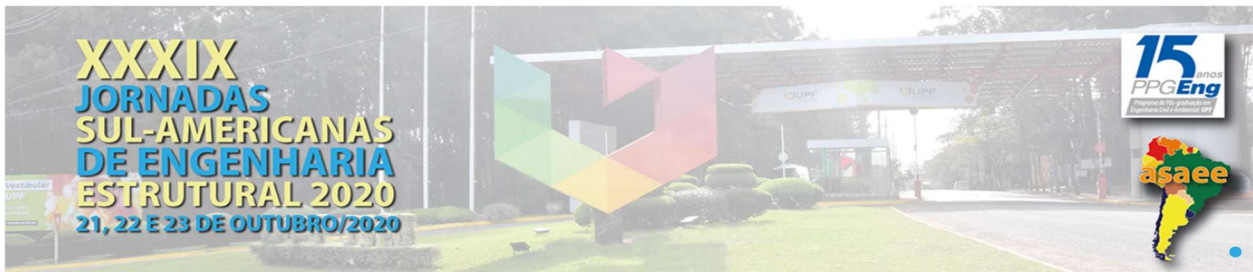
$$z_{t+\Delta t} = z_t + \dot{z}_t \Delta t + [(1/2 - \beta)\ddot{z}_t + \beta\ddot{z}_{t+\Delta t}] \Delta t^2 \quad (14)$$

$$\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{u}\}_t + [(1 - \alpha)\{\ddot{u}\}_t + \alpha\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t}] \Delta t \quad (15)$$

$$\dot{z}_{t+\Delta t} = \dot{z}_t + [(1 - \gamma)\ddot{z}_t + \gamma\ddot{z}_{t+\Delta t}] \Delta t \quad (16)$$

Substituindo as Eq.(13-16) na Eq.(12) e fazendo algumas manipulações algébricas adicionais, os deslocamentos futuros tanto da viga quanto da massa suspensa podem ser escritos como segue

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \{u\}_{t+\Delta t} \\ z_{t+\Delta t} \end{bmatrix} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \Delta t \end{Bmatrix} [V_1] \begin{Bmatrix} \{u\}_t \\ z_t \end{Bmatrix} + (\alpha_1 [V_1] - [J_1]) \begin{Bmatrix} \{\dot{u}\}_t \\ \dot{z}_t \end{Bmatrix} + (\Delta t [V_2] - \\ & [J_2]) \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}\}_t \\ \ddot{z}_t \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -(m_r + m_v)g [N]_{x=x_0}^T \\ 0 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (17)$$



onde:

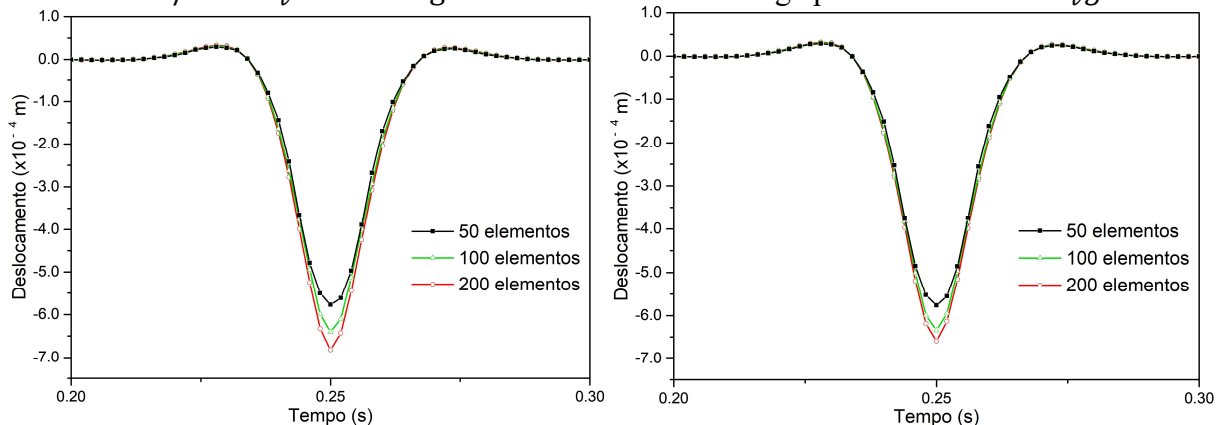
$$\begin{aligned}
 [A] &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \\
 a_{11} &= [k_e] + \frac{\alpha_1}{\Delta t} ([m_e] + m_r \langle N \rangle_{x=x_0}^T \langle N \rangle_{x=x_0}) + \gamma \alpha_1 [c_e], a_{12} = \frac{\alpha_1}{\Delta t} m_v \langle N \rangle_{x=x_0}^T, a_{21} = k_v \langle N \rangle_{x=x_0} - \\
 &\gamma \alpha_1 c_v \langle N \rangle_{x=x_0}, a_{22} = k_v + \frac{\alpha_1}{\Delta t} m_v + \gamma \alpha_1 c_v, \\
 [V_1] &= \begin{bmatrix} [m_e] + \gamma \Delta t [c_e] + m_r \langle N \rangle_{x=x_0}^T \langle N \rangle_{x=x_0} & m_v \langle N \rangle_{x=x_0}^T \\ -\gamma \Delta t \langle N \rangle_{x=x_0} & m_v + \gamma \Delta t c_v \end{bmatrix}, \\
 [V_2] &= \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{2} ([m_e] + m_r \langle N \rangle_{x=x_0}^T \langle N \rangle_{x=x_0}) + \alpha_2 [c_e] & \frac{\alpha_1}{2} m_v \langle N \rangle_{x=x_0}^T \\ -\alpha_2 c_v \langle N \rangle_{x=x_0} & \frac{\alpha_1}{2} m_v + \alpha_2 c_v \end{bmatrix}, \\
 [J_1] &= \begin{bmatrix} [c_e] & 0 \\ -c_v \langle N \rangle_{x=x_0} & c_v \end{bmatrix}, \\
 [J_2] &= \begin{bmatrix} [m_e] + m_r \langle N \rangle_{x=x_0}^T \langle N \rangle_{x=x_0} & m_v \langle N \rangle_{x=x_0}^T \\ 0 & m_v \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

A solução numérica é obtida pela discretização espacial em um número finito de elementos. Para que a solução seja possível, as contribuições de todos os elementos no sistema local de coordenadas devem ser convenientemente alocadas no sistema global.

3. EXEMPLO NUMÉRICO

Nesta seção, um exemplo é utilizado para investigar a eficiência do elemento finito utilizado com o modelo proposto.

Considere uma viga simplesmente apoiada de comprimento $L = 50.0 \text{ m}$, seção de base retangular com momento de inércia 3.06 m^4 , submetida a um ponto móvel de massa de roda $m_r = 1000 \text{ kg}$ com velocidade constante de 100 m/s . O material da viga tem módulo de Young $E = 206 \text{ GPa}$, módulo de cisalhamento $G = 103 \text{ GPa}$, massa específica ρ de 78000 kg/m^3 e um fator de correção de cisalhamento $\kappa = 5/6$. A fundação elástica tem constante elástica $K_1 = 100 \text{ MPa}$ e parâmetro de cisalhamento $K_2 = 40 \text{ kN}$. A aceleração da gravidade considerada é de 9.81 m/s^2 . Sobre o veículo, as constantes são $k_v = 1.2 \text{ MPa}$, $c_v = 34 \times 10^3 \text{ kN.s/m}^2$ e $m_v = 6000 \text{ kg}$. Foi considerada uma carga pontual com $P = m_v g$.



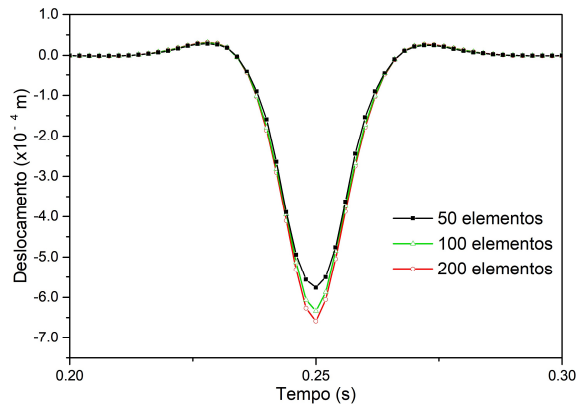
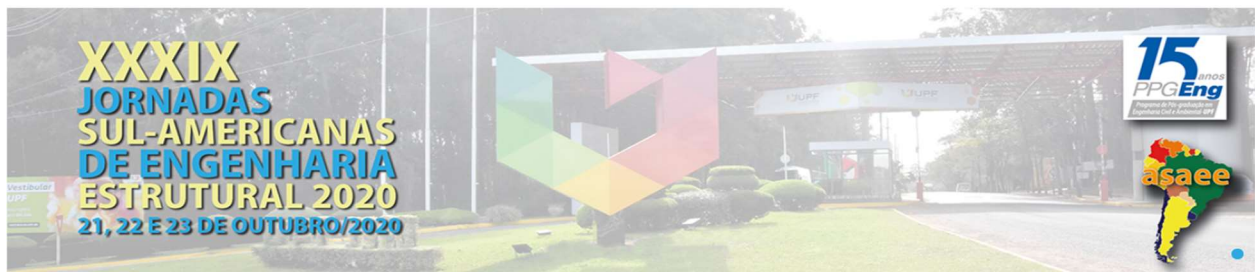


Figura 2. Deslocamento sob o veículo em movimento consistindo em massa de 1000 kg e massa suspensa de 6000 kg com velocidade de 100 m/s: (a) $N = 500$. (b) $N = 2500$. (c) $N = 5000$.

4. CONCLUSÕES

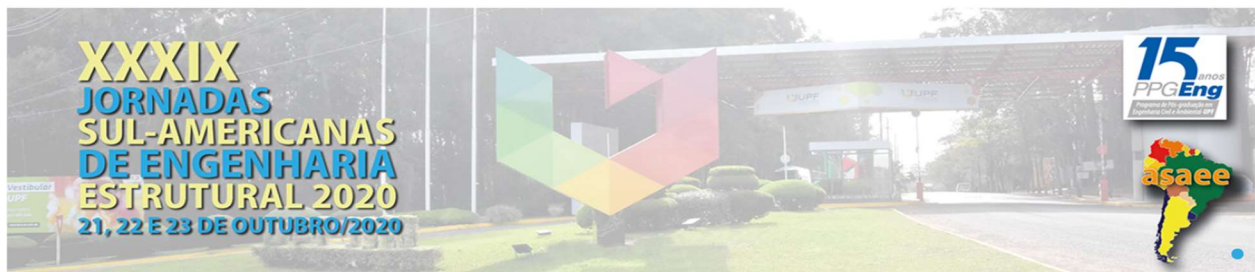
Neste artigo, foi proposta uma solução de elementos finitos para analisar pavimentos sob cargas móveis, assumindo-os como vigas de Timoshenko apoiadas na fundação de Pasternak, levando em consideração tanto os efeitos de cisalhamento na viga quanto a fundação elástica. Os resultados mostram uma boa estabilidade da solução numérica. Além disso, resultados numéricos mostraram que o deslocamento do pavimento depende da velocidade da carga móvel, das propriedades da fundação elástica, bem como da deformação por cisalhamento da viga.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES pelo apoio financeiro nessa esta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Alisjahabana, S.W., Alisjahabana, I., Kiryu, S. and Gan. B.S. (2018). “Semi analytical solution of a rigid pavement under a moving load on a Kerr foundation model”. *Journal of Vibroengineering*, vol. 1, n. 1, p. 1–20.
- Alvappillai, A., Zaman, M., and Laguros J. (1992). “Finite element algorithm for jointed concrete pavements subjected to moving aircraft”. *Computers and Geotechnics*, vol. 14, p. 121–147.
- Beskou, N.D. and Theodorakopoulos, D.D. (2011). “Dynamic effects of moving loads on road pavements: a review”. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 31 (4), 547–567.
- Esen, I. (2019). “Dynamic response of a functionally graded timoshenko beam on two-parameter elastic foundations due to a variable velocity moving mass”. *International Journal of Mechanical Sciences*, 153, 21–35.
- Fryba, L. (1972). *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*, Noordhoff International Publishing, Groningen.
- Hu, C. Ma, J. Yu, Y. Luo, Y. (2016). “Optimal design on dowel length for cement concrete pavement”. *International Journal of Pavement Research and Tehnology*, 9(6), p. 414–423.



- Ichikawa, M. Miyakawa, and Matsuda, A. (2000). "Vibration analysis of the continuous beam subjected to a moving mass". *J. Sound Vib.*, p.230 493–506.
- Karganovin, M.H. and Younesian, D. (2004). "Dynamics of Timoshenko beams on Pasternak foundation under moving load". *Mechanics Research Communications*, vol. 31, p. 713–723.
- Lee, P. (1998). "Dynamic response of a Timoshenko beam on a Winkler foundation subjected to a moving mass". *Applied Acoustics*, vol. 55(3), p. 203–215.
- Liua, Y., Fanga, H., Zhenga, J.J. and Wang, Y.N. (2021). "Dynamic behaviour of pavement on a two-parameter viscoelastic foundation subjected to loads moving with variable speeds". *INTERNATIONAL JOURNAL OF PAVEMENT ENGINEERING* , DOI: 10.1080/10298436.2021.1899178
- Luo, W. and Xia, Y. (2017). "Vibration of infinite Timoshenko beam on Pasternak foundation under vehicular load". *Advances in Structural Engineering*, 20(5), p. 694–703.
- Mallick, R.B. and El-Korchi, T. (2017). *Pavement Engineering: Principles and Practice*, Third Edition, CRC Pres.
- Mallik, A.K., Chandra, S. and Singh, A.B. (2006). "Steady-state response of an elastically supported infinite beam to a moving load". *Journal of Sound and Vibration*, vol. 291, p. 1148–1169.
- Newmark, N. M. (1959). A method of computation for structural dynamics, *J. Eng. Mech. Div. (ASCE)*, vol. 85 p. 67–94.
- Patil, V.A., Sawant, V.A. and Deb, K. (2013). "2-D finite element analysis of rigid pavement considering dynamic vehicle-pavement interaction". *Applied Mathematical Modelling*, vol. 37, p. 1282–1294.
- Patil, V. Sawant, V. Deb, K. (2012). "Finite element analysis of rigid pavement on a nonlinear two parameter foundation model". *International Journal of Geotechnical Engineering*, 6(3), p. 275–286.
- Petyt, M. (1990). *Introduction to finite element vibration analysis*. Cambridge University Press.
- Uzzal, R.U.A., Bhat, R.B. and Ahmed, W. (2012). "Dynamic response of a beam subjected to moving load and moving mass supported by Pasternak foundation". *Shock and Vibration*, vol. 19, p. 205–220.
- Yin, S. and Yang, Y. (2017). "Finite Element Analysis of an Infinite Beam on a Viscoelastic Foundation Subjected to a Moving Vehicle". *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 17, p. 1750045 (22 pages).
- Yu, H.T., Yuan Y. (2014). "Analytical Solution for an infinite Euler-Bernoulli Beam on a viscoelastic foundation subjected to arbitrary dynamic loads". *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 140(3), p. 542–551.
- Yong, C.C. and Yang, Z. (2008). "Dynamic responses of a beam on a Pasternak foundation and under a moving load". *Journal of Chongqing University*, 7(4), pp. 311–316.
- Yu, H.T., Cai, C., Yuan, Y. and Jia, M. (2017). "Analytical Solution for Euler-Bernoulli Beam on Pasternak foundation subjected to arbitrary dynamic loads". *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 41, p. 1125–1137.