APLICAÇÕES DO TRIÂNGULO ARITMÉTICO PARA O ENSINO FUNDAMENTAL NOS ANOS FINAIS

NASCIMENTO, Rilderson Pedroza do[1]
[1]Estudante do Curso de Licenciatura em Matemática - UFPB, campus I de João Pessoa; email:pedronascimento333@gmail.com

PALAVRAS CHAVE: Triângulo Aritmético; Livros Didáticos; Aplicações; Produtos Notáveis.

1. Introdução e Justificativa

O presente trabalho de pesquisa surgiu como resultado das vivências e práticas no ambiente escolar possibilitado pelas disciplinas dos estágios supervisionados I, II, III, e IV, e o Programa de Melhoria da Educação Básica (PROMEB) do ano de 2016, onde a observação e práticas de instrução em sala de aula trouxeram a temática que será discutida.

A pesquisa foi feita nas escolas públicas Escola Municipal Índio Piragibe e na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Professor José Batista de Mello, onde foram encontrado os livros didáticos comuns as duas escolas, Matemática Realidade & Tecnologia de (SOUZA, 2018) e Bianchini de (BIANCHINI, 2015)

Com o objetivo de gerar conhecimentos novos úteis para o avanço da ciência, sem aplicação prática prevista em sala de aula de modo presencial, porém presente em sala nos livros didáticos, nossa abordagem é qualitativa porque o nosso foco não é a representatividade numérica e sim o aprofundamento e compreensão dos alunos em relação aos produtos notáveis apresentada nos livros didáticos (GERHARDT; SILVEIRA, 2009).

Nosso trabalho de pesquisa trás o estudo sobre o triângulo aritmético que não é de fácil acesso, muitos pesquisadores ao entrarem nesse tema assim como na presente pesquisa, precisam recorrer ao trabalho de (Rosadas, 2017) que teve acesso direto a (AFFONSO, 2014) e (SILVA, 2015) que juntaram boas informações sobre a história do triângulo aritmético.

Almejamos dar um bom direcionamento para esse estudo e incentivar futuros pesquisadores a se aprofundar nesse assunto, com isto estamos aplicando o método da aula invertida, onde o aluno deve ter conhecimento prévio sobre o assunto (VALENTE, 2018).

Além do que foi compilado na fundamentação teórica trazemos mais uma forma de ajudar o aluno a entender melhor o processo de desenvolvimento dos produtos notáveis em sua dificuldade diária em sala de aula, conduzindo a mais uma forma de solução diferente do método tradicional que está presente nos livros didáticos.

Com o porém de estarmos instigando o raciocínio lógico dos alunos sem a recorrência de fórmulas e preparando para a solução de problemas maiores que venha encontrar nos anos posteriores em sua carreira escolar no ensino médio.

2. Objetivos

Os objetivos gerais e específicos de nossa pesquisa para o aproveitamento dos procedimentos metodológicos foram adotados para solucionar o problema de ensino apresendizagem do desenvolvimento dos produtos notáveis. A metodologia adotada na nossa pesquisa foi bibliográfica, onde buscamos atráves de outros pesquisadores e livros didáticos os dados obtidos.

Temos como objetivo geral expandir os conhecimentos sobre o Triângulo Aritmético para que o aluno desenvolva os produtos notáveis no ensino fundamental nos anos finais sem a recorrência de fórmulas ou o uso da distributiva.

Em específico relatamos as fontes de inspiração e experiência dos estágios supervisionados, apresentamos o Triângulo Aritmético, e mostramos possibilidades para futuros pesquisadores sobre as abordagens das sugestões apresentadas.

3. Metodologia

Para o levantamento das informações com a intenção de complementar os dados dos objetivos e do problema da pesquisa, realizamos uma pesquisa bibliográfica através das análises dos livros didáticos.

Matemática Realidade & Tecnologia (SOUZA, 2018) e *Bianchini* (BIANCHINI, 2015), produzido por meio de tabelas apresentando o aproveitamento dos livros didáticos, onde exploramos as duas coleções de livros didáticos.

Nossa pesquisa bibliográfica teve como base os procedimentos metodológicos descritos por (GIL, 2010), que são divididos nas seguintes etapas a) escolha do tema; b) levantamento bibliográfico; c) formulação do problema; d) elaboração do plano provisório do assunto; e) busca das fontes; f) leitura do material; g) fichamento; h) organização lógica do assunto; e i) redação do texto.

Seguimos também os métodos de pesquisa adotados por (GERHARDT; SILVEIRA, 2009), que foram: a) escolher o tipo de pesquisa; b) escolher população e amostra; c) determinar a técnica de coleta de dados; e d) técnica de análise de dados.

A abordagem de nossa pesquisa é qualitativa porque o nosso foco não é a representatividade numérica e sim o aprofundamento e compreensão dos alunos em relação aos produtos notáveis apresentados nos livros didáticos (GERHARDT; SILVEIRA, 2009), o seu objetivo foi gerar conhecimentos novos úteis para o avanço da ciência, sem aplicação prática prevista em sala de aula de modo presencial, porém presente em sala nos livros didáticos.

E explicativa quanto aos seus objetivos, pois tem preocupação em identificar no ensino fundamental nos anos finais trechos relacionados ao Triângulo Aritmético ou de Pascal (GIL, 2010).

Indutiva porque buscou nos livros didáticos o material necessário para a investigação, e documental quanto aos procedimentos tendo como fonte os documentos de comunicação em massa que são os livros didáticos, que segundo LUDKE; ANDRÉ (1986) se constitui em numa técnica valiosa de aprendizagem de dados qualitativos.

Complementando as informações obtidas por outras técnicas ou desenvolvendo aspectos novos de um tema ou problema. Observamos que os alunos apresentam dificuldades em desenvolver os conteúdos de produtos notáveis nas séries finais do ensino fundamental.

Nosso procedimento foi através das análises dos livros didáticos *Matemática Realidade & Tecnologia* de (SOUZA, 2018) e *Bianchini* de (BIANCHINI, 2015) onde analisamos os livros com a finalidade de encontrar o triângulo aritmético para a solução dos produtos notáveis e não encontramos (LAKATOS, MARCONI, 1991, p. 176).

A partir daí analisamos as duas coleções de livros didáticos que foram publicadas para quatro turmas em duas escolas, e através da aula invertida (VALENTE, 2018).

4. Resultados e discussões

Segundo Affonso (2014) o primeiro registro que se tem do Triângulo Aritmético foi feito pelo erudito pingala (200 a.C.) em sua obra "Chandra Sutra", em seus primórdios o Triângulo Aritmético teve sua origem decorrente de uma junção de livros indianos.

Em seu artigo em uma breve história sobre o Triângulo Aritmético CARNEIRO; CARNEIRO, LOPES, (2020) que também tem como base de estudo o trabalho de (ROSADAS, 2013), apresentam um quadro em ordem cronológica a respeito dos matemáticos, época e livros associados ao triângulo, os Árabes e Indianos foram os pioneiros até 950 DC como podemos ver no quadro 01 em sequência:

Quadro 1 – Indianos Associados ao Triângulo Aritmético.

Matemático	Época	Livros associados ao Triângulo
Desconhecido	300 AC	Bhagabati Sutra
Desconhecido	200 AC	Sthananga Sutra
Pingala	200 AC	Chanda Sutra
Mahavira	850 dC	Ganita Sara Samgraha
Halayudha	950 dC	Mritasanjivani

Fonte: CARNEIRO, CARNEIRO, LOPES, 2020.

Em seguida Affonso (2014) prossegue comentando sobre as descobertas e avanços na China sobre o Triângulo Aritmético, logo em sequência segue a tabela com os principais matemáticos, a época em que viveram e os seus livros associados ao Triângulo Aritmético, como consta no quadro 02:

Quadro 2 – Chineses Associados ao Triângulo Aritmético.

Matemático	Época	Livros associados ao Triângulo
Liu Hui	250 dC	Jiuzhangsuanshuzhu. (Comentários sobre os "Nove Capítulos da Arte Matemática").
Jia Xian	1 050 dC	Jia Xian suanjing. (Manual de Matemática de Jia Xian).
Yang Hui	1 250 dC	Xiangjiejiuzhangsuanfa. (Uma analise detalhada dos métodos do livro "Nove Capítulos"); Yang Hui 1 250 dC Fasuanquyongbenmo. (Alfa e omega de uma seleção˜ de aplicações de métodos aritméticos).
Zhu Shijie	1 300 dC	Siyuanyujian. (Precioso espelho dos quatro elementos)

Fonte: CARNEIRO, CARNEIRO, LOPES, 2020.

O Triângulo de Pascal também conhecido como Triângulo Aritmético, foi nomeado de diversas formas, como Triângulo Combinatório, Triângulo de Yang Hui, e Triângulo de Tartaglia, considerando que foi estudado por diversos matemáticos chamamos de Triângulo Aritmético. Em sequência os matemáticos europeus contribuíram para o triângulo Aritmético escrevendo em seus livros como está presente no quadro 03:

Quadro 3 – Matemáticos Europeus Associados ao Triângulo Aritmético.

Matemático	Época	Livros associados ao Triângulo
Apianus	1527	Rechnung. (Cálculo)
Stifel	1544	Arithmetica Integra
Tartaglia	1556	General Tratatodinumeri et misure
Peletier	1549	Arithmétique

Fonte: CARNEIRO, CARNEIRO, LOPES, 2020.

Como podemos ver o Triângulo Aritmético foi desenvolvido em diversos lugares no mundo, e possui vários nomes de referência em outras regiões, o nome Triângulo de Pascal veio da homenagem a Pascal.

Pascal contribuiu para o desenvolvimento da análise combinatória aperfeiçoando o Triângulo de Tartaglia, que logo ganhou seu nome em sua homenagem e embora tenha indícios históricos de que os Chineses conheciam esta técnica, Pascal aprimorou as propriedades do Triângulo Aritmético (BOYER, 1996).

Em seu trabalho de dissertação, Santos (2017) descreve a construção do triângulo em cinco passos usando a relação de Stifel para facilitar a aprendizagem da construção do Triângulo Aritmético, como podemos ver na figura 01**:**

Figura 1: Triângulo Aritmético.

linha 0	1										
linha 1	1	1									
linha 2	1	2	1								
linha 3	1	3	3	1							
linha 4	1	4	6	4	1						
linha 5	1	5	10	10	5	1					
linha 6	1	6	15	20	15	6	1				
linha 7	1	7	21	35	35	21	7	1			
linha 8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
linha 9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
linha 10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Fonte: Santos, 2017, p. 25.

Passo 1 Comece escrevendo o número 1.

Passo 2 Na segunda linha coloque mais dois algarismos 1.

Passo 3 Cada linha abaixo deverá conter um número a mais que a linha anterior, lembrando que os números das extremidades, deverão ser obrigatoriamente 1.

Passo 4 Para saber qual número inteiro, some dois numerais a cima dele. Por exemplo o número central na terceira linha do Triângulo de Pascal é 2 = (1 + 1 = 2), os números centrais da linha são 3 = (1 + 2) e 3 = (2 + 1) e assim sucessivamente.

Passo 5 Você conseguirá perceber vários padrões interessantes ao longo de sua construção.

De acordo com Rosadas (2017) alguns conceitos de matemática importantes para o entendimento do triângulo aritmético são estes, o número binomial e a combinação, o binômio de Newton é descrito como uma combinação da seguinte forma conforme podemos visualizar na **figura 02** a seguir:

Figura 2 – Binômio de Newton e Combinatória

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!.(n-p)!}$$

Fonte: Autor. Inspirado em Rosadas, 2017, p. 26.

Onde **p** e **n** são números naturais com **n** maior ou igual a **p** onde o desenvolvimento do produto notável é feito da seguinte forma conforme a **figura 03**:

Figura 3 – Desenvolvimento do Binômio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} \, . \, b^p$$

Fonte: Autor. Inspirado em Rosadas, 2017, p.27.

E que podemos observar a disposição dos coeficientes binomiais no desenvolvimento da série dos binômios de Newton conforme a figura 04:

Figura 4 – Coeficientes Binomiais nos Produtos Notáveis

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^{1-0} \,.\, b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} \,.\, b^1$$

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2 = \binom{2}{0} a^{2-0} \,.\, b^0 + \binom{2}{1} a^{2-1} \,.\, b^1 + \binom{2}{2} a^{2-2} \,.\, b^2$$

Fonte: Autor. Inspirado em Rosadas, 2017, p.27.

Os coeficientes se organizam de tal forma que é possível escrevê-los de modo que componham um triângulo chamado de Triângulo Aritmético, usualmente organizado como a **figura 05** abaixo:

Figura 5 – Triângulo Aritmético Através dos Números Binomiais

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\vdots \\
\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \binom{n}{3} \quad \cdots \quad \binom{n}{n}
\end{array}$$

Fonte: Autor. Inspirado em Rosadas, 2017, p.28.

A coleção *Bianchini* foi entregue aos alunos do ensino fundamental nos anos finais, foi aceita pela editora Moderna e teve a sua 9ª edição publicada em 2018, a obra tem quatro publicações, com doze capítulos cada, a estrutura do livro é bem didática e com explicações que ajudam o professor e o aluno.

No oitavo ano, no capítulo seis encontramos o conteúdo dos produtos notáveis associado à álgebra como unidade temática, compreendendo as unidades temáticas, competências gerais e específicas de matemática conforme podemos verificar no quadro 04 a seguir:

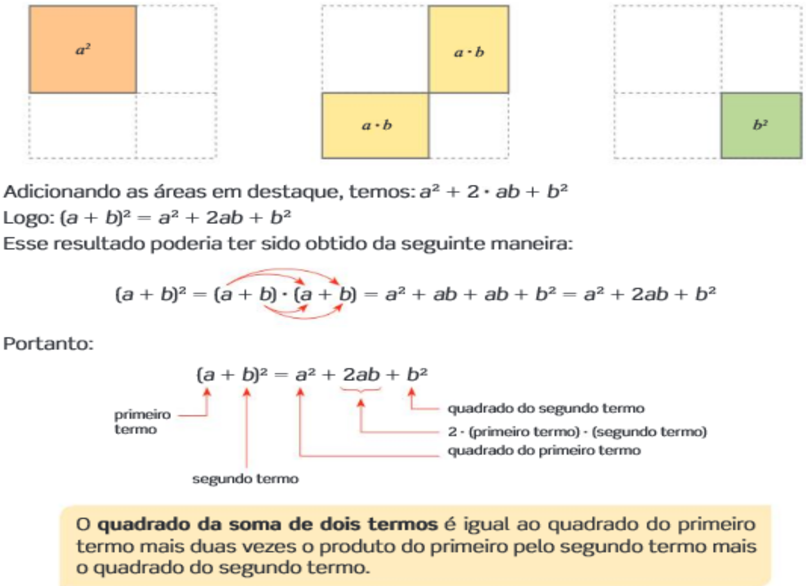
Quadro 4 – Os Produtos Notáveis Bianchini

Ano	8
Capítulo	6
Conteúdo	Os produtos notáveis

Fonte: Autor.

Nesse mesmo capítulo o autor Bianchini expõe o desenvolvimento do produto notável quadrado da soma com a ajuda de figuras geométricas, induzindo o aluno pelo cálculo de área e por fim usando a distributiva como mostra a figura 06 a seguir:

Figura 6 – *Bianchini* Os Produtos Notáveis



Fonte: Bianchini, 2015. p.128.

A coleção *Matemática Realidade & Tecnologia* teve a publicação feita pelo Programa Nacional do Livro didático (PNLD) do ano de 2020 e foi entregue aos alunos do ensino fundamental nos anos finais foi aceita pela editora Frère Théophane Durand (FTD) e teve a sua 1ª edição publicada em 2018.

A obra tem quatro publicações, com oito capítulos cada, a estrutura do livro é bem didática e auto explicativa, e com a intenção de auxiliar o professor em sala de aula. Encontramos os produtos notáveis no capítulo três do livro do nono ano tendo conforme podemos verificar no quadro 05 a seguir:

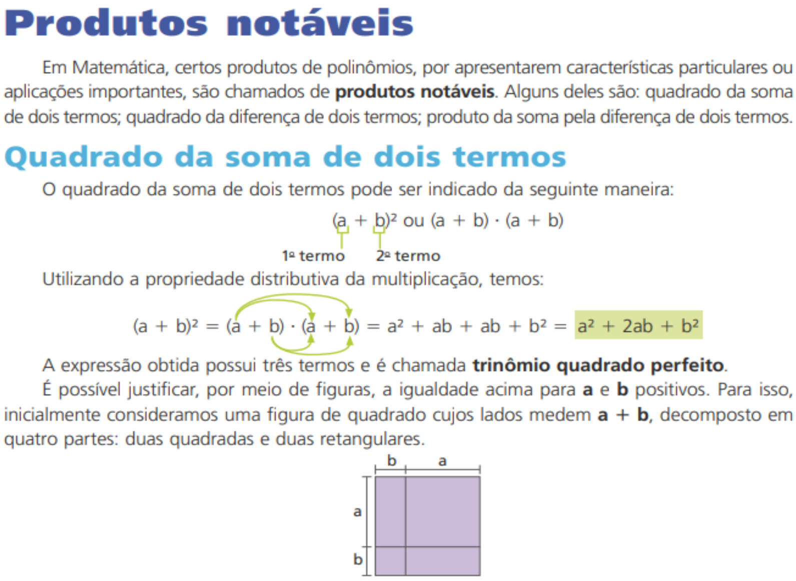
Quadro 5 – Produtos Notáveis Matemática Realidade & Tecnologia.

Ano	9
Capítulo	3
Conteúdo	Produtos notáveis

Fonte: Autor.

Assim como outros autores dos livros didáticos Souza (2018) escolheu seguir o caminho do cálculo de área para apresentar os produtos notáveis e em seguida ele usou a distributiva como podemos ver na figura 07 abaixo:

Figura 7 – *Matemática Realidade & Tecnologia,* Produtos Notáveis


Produtos notáveis

Em Matemática, certos produtos de polinômios, por apresentarem características particulares ou aplicações importantes, são chamados de **produtos notáveis**. Alguns deles são: quadrado da soma de dois termos; quadrado da diferença de dois termos; produto da soma pela diferença de dois termos.

Quadrado da soma de dois termos

O quadrado da soma de dois termos pode ser indicado da seguinte maneira:

$$(\underbrace{a}_{1^{\underline{o}}\text{ termo}} + \underbrace{b}_{2^{\underline{o}}\text{ termo}})^2 \text{ ou } (a+b)\cdot(a+b)$$

Utilizando a propriedade distributiva da multiplicação, temos:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

A expressão obtida possui três termos e é chamada **trinômio quadrado perfeito**.

É possível justificar, por meio de figuras, a igualdade acima para **a** e **b** positivos. Para isso, inicialmente consideramos uma figura de quadrado cujos lados medem **a + b**, decomposto em quatro partes: duas quadradas e duas retangulares.

Fonte: Souza, 2018. p.28.

Podemos solucionar o mesmo problema que foi proposto no ensino fundamental apresentado nas duas coleções dos livros didáticos por meio do desenvolvimento do Triângulo Aritmético e associar com os coeficientes do produto notável.

Para fazer o aluno pensar, simplificar o trabalho e induzi-lo a desenvolver outros produtos notáveis assim como (ROSADAS, 2013), (SANTOS, 2017) e (SOARES, 2011) deixaram exposto em sua fundamentação teórica, segundo Rosadas (2017) fez necessário à observação entre os coeficientes dos termos algébricos e os produtos notáveis como binômio de Newton presente na figura 08**,** que está presente na fundamentação teórica, como podemos verificar:

Figura 8 - Produtos Notáveis e o Triângulo Aritmético

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a^1b^0 + a^0b^1$$

$$(a+b)^2 = a^2b^0 + 2a^1b^1 + a^0b^2$$

Fonte: Autor.

Podemos incentivar o desenvolvolvimento da sequência dos números naturais, colocando **ab**, e que se use a sequência dos números naturais com o zero nos expoentes de **a** e de **b**, crescente a partir do **b** e decrescente a partir do **a.**

Usamos o Triângulo Aritmético para posicionar os coeficientes e podemos com isso instigar o desenvolvimento dos produtos notáveis para graus maiores até do que dois.

Ultilizando apenas a lógica sem o uso de fórmulas que precisam ser decoradas em sala de aula, o uso da distributividade ou até o uso do cálculo de área comumente usado nos livros didáticos da educação fundamental nos anos finais.

5. Considerações finais

Através do que foi pesquisado, o presente trabalho se dispõe para colaborar em debates sobre o tema, introduzimos aqui uma forma de desenvolvimento de fácil acesso com ferramentas que estão disponíveis no ensino fundamental nos anos finais e que passam despercebidas.

Conseguimos obter por meio de nossa pesquisa um meio de ajudar a desenvolvermos o interesse em matemática, usando o triângulo aritmético que proporcionou a abertura de um caminho diferente sobre o ensino dos produtos notáveis, evidenciado nos trabalhos de alguns pesquisadores, como (ROSADAS, 2013), e trouxe a disposição a parte da história da matemática que foi compilada por (AFFONSO, 2014), que é referência para tantos outros pesquisadores que se interessam por nosso tema.

Tendo como base de nossa fundamentação teórica o que foi introduzido sobre os pesquisadores, apoiando-se nos referenciais teóricos que são os livros didáticos do ensino fundamental *Bianchini* e *Matemática Realidade & Tecnologia*, nossa pesquisa está organizada e descrita com as categorias que serão utilizadas para a análise dos livros pedagógicos voltados para o ensino fundamental nos anos finais, a presente pesquisa teve como metodologia a sala de aula invertida, onde o aluno deve ter conhecimento prévio sobre o assunto (VALENTE, 2018).

Como procedimento de pesquisa realisamos inicialmente a observação das coleções dos livros didáticos com a intenção de encontrar o assunto sobre o triângulo aritmético, porém o assunto não foi encontrado (LAKATOS, MARCONI, 1991, p. 176), então organizamos da seguinte forma:

1. Uma breve análise sobre o livro didático.

2. Capítulos em que se apresentam os produtos notáveis.

Quanto a isso concluímos que temos o estímulo para apresentar o triângulo aritmético porque é um assunto que abre muitas possibilidades e provoca o interesse em matemática.

Quando aplicamos alguns alunos que não entendiam bem da forma tradicional conseguiram assimilar melhor o conteúdo e desenvolver os produtos notáveis de forma satisfatória, sendo que como era de se esperar, alguns alunos entenderam melhor da forma tradicional, com isso os resultados de nossa análise foram positivos em um âmbito geral, porque trouxemos mais uma possibilidade para a solução de um problema.

Com o triângulo aritmético abrimos as portas para o estudo de sequências numéricas, dos produtos notáveis, de combinatória, sobre os binômios de Newton, entre outros assuntos que venham a ser estudados em sequência.

Os pesquisadores trouxeram uma forma de adaptação do triângulo aritmético para a sala de aula, porém esse tema dificilmente é tratado nos livros didáticos e por diversas vezes os autores dos livros didáticos recorrem a fórmulas, distributiva e a representação geométrica de área é o triângulo aritmético é até esquecido, visto que até para os pesquisadores não é um tema de fácil acesso.

6. Referências

AFFONSO, Alexandre. **O Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton**. 2014. 49 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2014.

BIANCHINI, Edwaldo, **Matemática Bianchini**. 8. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** 2. ed. Edgard Blucher, 1996.

CARNEIRO, M. S. L. R. D. S. C. R. D. S. Triângulo de Pascal : Breve História e uma Proposta Didática para o Ensino. **Matemática e Estatística em Foco**, Universidade Federal Uberlândia, v. 7, n. 1, p. 75-97, mai./2020.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (organizadores). **Métodos de Pesquisa**. Coordenado pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e SEAD/UFRGS. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**: 5 ed. São Paulo: Atlas, 2010.
LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Fundamentos de Metodologia Científica.** São Paulo: Atlas, 1991.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.** São Paulo: EPU, 1986.

ROSADAS, Vitor Dutra Soares, **Triângulo de Pascal: Curiosidades e Aplicações na Escola Básica.** Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2013.

SANTOS, Natânia Laine Paglione, **O misterioso e enigmático mundo de Pascal e Fibonacci**. São José do Rio Preto, 2017.

SILVA, Mariluce Oliveira de. **Do Triângulo à Pirâmide de Pascal**. PROFMAT. UESC, Bahia, 2015. 53p.

SOARES, Lúcio Roberto da Silva, **Sequências e Progressões: Possibilidades de Contextualização na Escola.** Mari – Paraíba: Universidade Federal da Paraíba, 2011. 52p.

SOUZA, Joamir, **Matemática Realidade & Tecnologia**, São Paulo - 2018, 1ª Edição.

VALENTE, José Armando. **A sala de aula invertida e a possibilidade do ensino personalizado: uma experiência com a graduação em midialogia.** In: BACICH, Lilian.

MORAN, José. (Org.). Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.