Anais / Actas

V Congreso Iberoamericano sobre **Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas**

Brasil, 2021 • Homenagem ao Prof. Dr. José "Pepe" Carrillo

J. G. Moriel Junior
Editor

Universidad de Huelva | RED MTSK IBEROAMERICANA | TSK GROUP BRASIL IFMT

Dados gerais

5ª edição do CIMTSK
De 3 a 5 de novembro de 2021

Edição excepcionalmente remota (online)
Sede virtual em Cuiabá, Mato Grosso, Brasil

Homenagem ao Prof. Dr. José "Pepe" Carrillo

Realização
TSK Group Brasil - IFMT
Universidad de Huelva, Espanha
Red Iberoamericana MTSK

Primeira edição em formato ebook:
Dezembro 2021

Jeferson Gomes Moriel Junior (Ed.)

ISBN (pdf): 978-65-89908-91-3

Texto eletrônico em arquivo PDF

Diagramação e Capa:
Jeferson Gomes Moriel Junior

Plataforma, Técnica, ISBN e Ficha catalográfica: Congresse.me

Ficha catalográfica

C573 CIMTSK - V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas [5 : 2021 : Macaé : RJ]

Anais : V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. Online de 03 a 05 de Novembro de 2021/ Jeferson Gomes Moriel Junior (organizador). Macaé - RJ : CONGRESSE-ME, 2021;

p. 390
Disponível online
https://eventos.congresse.me/cimtsk2021
ISBN:978-65-89908-91-3

1 Formação docente - MTSK Congressos 2. Matemática - Formação docente - MTSK 3. Educação matemática - Especialização 4. Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas I. Titulo

CDD 370.72
CDU 37 : 51

Ficha catalográfica elaborada por Rita Coelho - Bibliotecária - CRB7 4963

Organizador
Dr. Jeferson Moriel Junior (Instituto Federal de Mato Grosso, Brasil)

Comitê Consultivo
Dr. Luis Carlos Contreras (Universidade de Huelva, Espanha)
Dra. Nuria Climent (Universidade de Huelva, Espanha)
Dr. Miguel Ángel Montes (Universidade de Huelva, Espanha)

Comitê Científico
Dr. Christian Alfaro Carvajal (Universidad Nacional, Costa Rica)
Dra. Dinazar Isabel Escudero Avila (Investigadora Independente, México)
Dra. Edvonete Souza de Alencar (Universidade Federal da Grande Dourados, Brasil)
Dr. Hugo Parra Sandoval (Universidade del Zulia, Venezuela)
Dra. Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres (Universidad Pedagógica Nacional, México)
Dr. Jeferson Moriel Junior (Instituto Federal de Mato Grosso, Brasil)
Dra. Nielka Rojas (Universidad Católica del Norte, Chile)

Moderadores de Salas
Dr. Álvaro Aguilar (Universidade de Oviedo, Espanha)
Dda. Ana Paula Truzzi (Instituto Federal de Mato Grosso, Brasil)
Dr. Christian Alfaro Carvajal (Universidad Nacional, Costa Rica)
Dra. Dinazar Isabel Escudero Avila (Investigadora Independente, México)
Dra. Edvonete Souza de Alencar (Universidade Federal da Grande Dourados, Brasil)
Mda. Elizimari Queiroz (Instituto Federal de Mato Grosso, Brasil)
Dra. Etienne Lautenschlager (Universidade Federal de Rio Grande do Norte, Brasil)
Dda. Gabriela Gibim (Universidade Estadual de Campinas, Brasil)
Mdo. Helio Cinquini (Instituto Federal de Mato Grosso, Brasil)
Dr. Hugo Parra Sandoval (Universidad del Zulia, Venezuela)
Dra. Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres (Universidad Pedagógica Nacional, México)
Dra. M. Cinta Munoz Catalan (Universidade de Sevilha, Espanha)
Dra. Miguel Ángel Montes (Universidade de Huelva, Espanha)
Dra. Nielka Rojas (Universidad Católica del Norte, Chile)

Equipe técnica e Sistema
Congresse.me

Editorial

O **Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas - CIMTSK** é um evento bianual e alcança a sua 5ª edição neste ano de 2021. Todas as edições anteriores ocorreram na Universidade de Huelva, Espanha, e pela primeira vez ocorreu fora de sua sede original, sendo organizado a partir de Cuiabá, Mato Grosso, Brasil. Os Anais/Actas das edições anteriores estão disponíveis e podem ser acessados na plataforma do evento.

O **CIMTSK 2021** é um evento de caráter científico com o objetivo de disseminar os avanços da ciência sobre conhecimento especializado de professores para o maior número de pessoas de diferentes países e promover a discussão sobre aspectos relacionados ao modelo *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge - MTSK* e suas adaptações a outra disciplinas, como biologia, física, química, língua espanhola, língua portuguesa e outras. Neste ano o evento ocorreu exclusivamente de forma online em função do contexto pandêmico de COVID-19. Os idiomas oficiais foram Espanhol e Português.

MTSK é a sigla de *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* que é o modelo teórico que descreve o conhecimento especializado que professores de Matemática podem (ou devem) ter para ensinar esta matéria.

Os trabalhos presentes nestes Anais/Actas se destinam a pesquisadores cujo objeto de estudo esteja relacionado ao conhecimento de professores de todos os países, especialmente os participantes da Rede Iberoamericana MTSK, Estudantes de mestrado, doutorado, especialização, Formadores de professores que investigam a temática. Você encontrará trabalhos nas seguintes linhas temáticas:
1 - Aplicação do MTSK na formação docente
2 - MTSK do formador de professores
3 - MTSK em distintos tópicos e etapas
4 - Desenvolvimento do MTSK
5 - Extensões do MTSK

Homenagem ao Prof. Dr. José "Pepe" Carrillo. Este evento também é uma forma de homenagear mais uma vez um grande líder profissional, amigo afetuoso e bem humorado que nos deixou em Março deste ano, sem o qual este evento não existiria. Ao Pepe o nosso eterno carinho e agradecimento.

Agradecemos os participantes do evento e parabenizamos os autores dos 48 trabalhos que compõem esta obra. Desejamos que você aproveite tais avanços científicos e os dissemine para melhorarmos a Educação no mundo.

Nos vemos em 2023 no VI CIMTSK, Chile.

Saudações cordiais.

Jeferson Moriel Junior
Organização
V CIMTSK, Brasil 2021

SUMÁRIO

Autores apresentados em ordem alfabética

PALESTRAS

PESQUISADORES CONVIDADOS

GÉNESIS DEL MODELO MTSK: EVOLUCIÓN DE LA IDEA DE UN GENIO

Genesis of the MTSK model: evolution of the idea of a genius

Contreras-González, L. C. [a]

[a] Universidad de Huelva

Resumen. Es difícil resumir en pocas líneas la labor de José Carrillo, pero eso es lo que intenta el texto que vas a leer. Esta presentación muestra la evolución de MTSK desde su origen y cómo fue tomando forma en la mente de un genio, mostrando a su vez su personalidad y su perspectiva como matemático y como investigador.

Palabras clave. MTSK, origen, evolución y perfil de su creador.

Abstract. It is difficult to summarize the work of José Carrillo in a few lines, but that is what the text you are going to read tries to do. This presentation shows the evolution of MTSK since its inception and how it took shape in the mind of a genius, showing in turn his personality and his perspective as a mathematician and as a researcher.

Keywords. MTSK, origin, evolution and profile of its creator

INTRODUCCIÓN

Comienzo a escribir estas líneas a principios de septiembre de 2021. Acabamos de volver el Simposio anual de la SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática), celebrado en Valencia, España. También en este simposio se ha rendido un merecido homenaje a José (Pepe) Carrillo Yáñez. Miro (admiro) su obra, una y otra vez, le busco (como le buscamos todos). Miro ahora su perfil en Google Académico. Hay 20 páginas con sus publicaciones, aunque se que no están todas; a pesar de que las tres últimas que aparecen son de 2021, se que en estos dos años ha escrito muchas más cosas. Basta entrar en su perfil de *Scopus* para ver un trabajo suyo de 2021 (entre los 28 que recoge esta prestigiosa base de datos) en el número 33(1) de Educación Matemática (Climent et al., 2021) que no consta en Google Académico. Tampoco la base de datos *Publons*, de la *Web of Science*, que recoge 281 publicaciones suyas, está actualizada; la última que aparece es también en Educación Matemática de 2020 (Escudero-Ávila y Carrillo, 2020), aunque esta sí está en Google Académico. Imagino que es solo cuestión de esperar unos meses para que todo esté actualizado. Vuelvo a Google Académico. Hay una publicación de 2018 (Carrillo et al., 2018), en Research in Mathematics Education, que aparece citada 219 veces (47 veces en *Scopus* y 29 en *Publons*). Es el modelo MTSK. Es la primera publicación en una revista prestigiosa, de habla inglesa, donde se presenta el modelo. ¡Cuántas citas en solo tres años!

El Modelo MTSK aparece con mucha frecuencia en revistas y comunicaciones en congresos, y muchas veces, los autores de esos trabajos no me son conocidos. MTSK tiene ya una red internacional, la RED Iberoamericana sobre MTSK de la AUIP (Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado), su última semilla en este mundo. Esto me recuerda la dedicatoria que Pepe hace a Inma, su esposa, en su primera brillante obra, su tesis doctoral (Carrillo, 1996) y su segunda obra más citada:

> Tras dejar en este mundo nuestro humilde legado intelectual, tras dejar nuestra herencia humana a través de nuestros hijos, portadores de nuestra energía, tras haber recibido tanto

Contreras-González, L. C. (2021). Génesis del modelo mtsk: evolución de la idea de un genio. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 2–10). Congresseme.

> de tantos, sería maravilloso que, llegado nuestro último día, siguiéramos, juntos, convertidos en árbol, aportando vida a este mundo.

Creo sinceramente que la RED MTSK es ese árbol, robusto como un roble, que perdurará tras la marcha de todos nosotros pues seguirá generando ramas. Este documento, como todo este congreso, dedicado a él, pretende ayudar a conocer su obra.

EL COMIENZO: LAS CONCEPCIONES

PEPE obtiene su primer trabajo como Catedrático de Educación Secundaria, oposición que gana apenas vuelve de su beca en Alemania. La oposición constaba de dos pruebas, una teórica y otra práctica, compuesta por problemas de alto nivel. No es de extrañar que obtuviera su puesto gracias a la segunda prueba, cuya calificación fue significativamente superior al resto de los concursantes. Esto ayuda a comprender que la resolución de problemas conforme la columna vertebral de su actividad docente. Esa línea de trabajo propició que, desde los distintos CEPs de Andalucía, se le llamara para desarrollar cursos para profesores en activo en este ámbito, actividad que continuó desarrollando una vez que se incorporó a la Universidad de Huelva.

Lo que le atraía de la universidad era la posibilidad de investigar y hacer su tesis doctoral, y era la resolución de problemas lo que provocaba su inquietud. Le resultaba contradictorio ver que, el esfuerzo que dedicaba a la formación permanente del profesorado, en relación con la resolución de problemas, no tuviera una repercusión real en la práctica de las aulas de Educación Secundaria y su intención fue estudiar las razones. Fue así como su investigación se orientó hacia las concepciones de los profesores, sobre la matemática y sus procesos de enseñanza y aprendizaje, y su papel como resolutores, que condujo a su Tesis Doctoral en 1996. Pepe nos cuenta este proceso en su capítulo del libro Avances y realidades de la educación matemática (Carrillo, 2015), y lo hace en primera persona, es casi como oír su voz:

> Siendo profesor de enseñanzas medias (actualmente educación secundaria obligatoria y bachillerato), mi participación en la reforma de las enseñanzas medias (que luego sería LOGSE, Ley de Ordenación General del sistema Educativo) fomentó mi inquietud por promover el aprendizaje de las matemáticas de un modo distinto al tradicional. La necesidad sentida por la innovación, al tiempo que el deseo por profundizar sistemáticamente en aspectos sobre las matemáticas, me llevó a buscar la posibilidad de realizar una tesis doctoral en didáctica de la matemática. La historia de la matemática y la resolución de problemas emergieron como candidatos, decantándome por este último, a sugerencia de mi director de tesis, el doctor Miguel de Guzmán, de la Universidad Complutense de Madrid.

La orientación final de su investigación en relación con las concepciones se la sugiere Alan Schoenfeld, a quien conoce en un curso de formación de asesores. Pepe pensaba centrar su investigación en los estudiantes, pero a sugerencia suya cambia el foco hacia los profesores. Schoenfeld pensaba que, además de obtener más información de su objeto de estudio, podría *"establecer diferencias significativas [entre los informantes] para ofrecerlas como resultados de la tesis doctoral. Es así como surgió la idea de incluir las concepciones, al objeto de utilizar las tendencias didácticas del profesorado sobre la resolución de problemas"*.

Nos explica un poco más adelante las razones que le llevaron a iniciar su investigación:

> La importancia del profesorado en cualquier reforma que se pretenda en el sistema educativo, su influencia en el aprendizaje del alumnado, y por tanto en la calidad de la educación y en la calidad de vida de la sociedad, fueron determinantes en la decisión de ubicar la mayor parte de la investigación en el ámbito del profesorado (conocimiento,

> concepciones, formación, desarrollo), sin perjuicio de la consideración de otros ámbitos igualmente relevantes y coadyuvantes.

Como he dicho, su origen como profesor de Secundaria siempre estuvo presente en su trabajo, por ello, una vez en la universidad, la formación inicial y en papel de la RP en ella reorienta su trabajo. Escribe artículos en revistas que también leen los profesores de Primaria y Secundaria (Suma, Épsilon, Educación y Pedagogía, Investigación en la Escuela, …), consciente de que publicar resultados de investigación en esas revistas no es académicamente estratégico, pero sí socialmente transformador. También colabora en la elaboración de materiales útiles para los profesores y para los estudiantes, como es el caso de la traducción del libro de *Resolver Problemas: Estrategias*, de Stacey y Groves, en 1999.

Esta implicación en la transferencia de conocimiento queda patente en su artículo de la revista Educaçao Matemática (Arellano y Carrillo, 2020), en el que reporta una investigación acerca de cómo los estudiantes formulan problemas, mostrando los beneficios que aporta a los profesores que se implican:

> Tanto los investigadores de este articulo como los componentes del grupo PIE, dentro del cual se ha llevado a cabo esta investigación, consideran que el trabajo desarrollado ha incidido en su desempeño profesional y en el aprendizaje del alumnado. Con su difusión, se pretende fomentar su ejecución por otros docentes, dada la aportación que supone a la mejora de la enseñanza de las Matemáticas; puede emplearse tanto en formación de profesores, como de inspiración para que estos diseñen practicas análogas, ya sean para el nivel educativo aquí propuesto o para otros. Sin buscar la generalización a partir de los resultados obtenidos, se considera que esta experiencia podría trasladarse a otras clases y cursos de Educación Primaria de características semejantes, posibilitando experiencias similares y comparar los resultados.

El conocimiento y el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas y el papel de la resolución de problemas en esos procesos han conformado su trabajo todos estos años. Para comprender el papel relevante de la resolución de problemas en su vida es necesario conocer que, para él, hacer matemáticas, aprender matemáticas, enseñar matemáticas y aprender a enseñar matemáticas era plantear y resolver problemas; problemas matemáticos o problemas de la práctica.

En una de sus últimas obras (Carrillo et al., 2019), Pepe señala que la resolución de problemas es la quinta esencia de la actividad matemática y apunta al conocimiento del profesor sobre ella como una clave para poder gestionar el trabajo en el aula sobre esta actividad intelectual esencial. Pepe usa la resolución de problemas en los cursos de actualización científico didáctica que imparte los dos diferentes CEPs de Andalucía, en los que siente satisfacción por la acogida por parte de los profesores de Primaria y Secundaria que asisten a los cursos, pero es consciente de la debilidad de las intenciones de cambio que percibe, y su tesis le aporta información acerca del papel que juegan las concepciones en esa lucha interna de los profesores entre lo que hacen y lo que desean hacer; también le aporta información acerca del papel que juegan las capacidades resolutorias de los profesores. Se perfilan como buenas prácticas docentes aquellas donde los profesores son buenos resolutores, tienen una concepción dinámica de la matemática y un perfil investigativo como docentes. Avanza en esta línea y, en Contreras y Carrillo (1998) y Guevara, Contreras y Carrillo (1997), nos muestra el camino a seguir: hay que conocer las concepciones de los profesores sobre el papel de la resolución de problemas en las aulas y, sobre todo, hacerles conscientes de ellas. Es posible que no logremos cambiarlas, pero sí debemos darles la oportunidad de reflexionar acerca de la coherencia entre lo que piensan, hacen y desean hacer para que decidan de forma reflexiva sobre su práctica.

Se acaba de producir una ruptura en la estrategia formativa a seguir. No cambiaremos la práctica de aula más que dentro de ella y, por supuesto, con el deseo explícito del profesor de que ese cambio se produzca. Emerge así una nueva línea de trabajo, y la formación local, donde el formador y los profesores forman equipo, pasa a ser el nuevo foco de investigación.

LA ESPITA: EL DESARROLLO PROFESIONAL

La formación se torna desarrollo profesional cuando la visión del cambio se tiene en el medio y largo plazo y cuando ese cambio se articula acerca de la reflexión sobre los problemas vividos por los profesores protagonistas en su propia práctica. Se forma un equipo formado por profesores en activo e investigadores, que coordina Pepe. Intervienen en ese equipo dos co-investigadoras cuyo papel va a ser crucial (Climent y Carrillo, 2003; Muñoz-Catalán, Carrillo y Climent, 2007, 2010). Se plantean, como objetivos, en estos momentos, identificar aspectos del conocimiento y la práctica del profesor que definen su desarrollo, describiendo los cambios, describir también el proceso de reflexión, valorando cómo se producen los cambios en la práctica y qué provoca esos cambios. En estos trabajos, se entiende que el desarrollo profesional se define por un incremento progresivo de toma de conciencia de aquellos elementos que caracterizan a los fenómenos educativos lo que, a su vez, lleva a mejor comprensión de la propia practica. De esta manera, la propia práctica se yergue en fuente de aprendizaje cuando el profesor se implica de forma activa en los procesos de cuestionamiento de la esta, desarrollando una actitud critica y reflexiva.

La reflexión constante es, por tanto, el motor de este desarrollo. El equipo identifica una situación de enseñanza y aprendizaje que resulta problemática para algunos de los profesores participantes. Se analiza el conocimiento que ese profesor pone en juego, se reflexiona (fuera del aula) acerca de los elementos matemáticos y didácticos que caracterizan el proceso, se profundiza en los fundamentos que podrían requerir una gestión alternativa, se diseña esa gestión alternativa con la participación activa del profesor que la ha de llevar a la práctica, se lleva lo planificado al aula y se inicia un nuevo proceso de reflexión.

En este proceso se torna esencial disponer de una herramienta analítica que nos permita organizar los conocimientos requeridos. Revisamos la literatura acerca del conocimiento del profesor. La referencia más potente es Lee Shulman (1986, 1987). Hay dos aspectos en su trabajo que resulta de interés reseñar. Por un lado, junto al conocimiento del profesor sobre el contenido, emerge un nuevo subdominio de conocimiento que el propio autor califica como “paradigma perdido”, en el sentido de que un movimiento pendular de búsqueda de soluciones en la didáctica general y la psicología, por un lado, y de una visión más avanzada y académica del propio contenido, por otro, ha permitido ver. Lo denomina *Pedagogical Content Knowledge*, que en castellano se ha traducido como conocimiento de contenido pedagógico y conocimiento didáctico del contenido. Nos gusta más esta segunda acepción, pues pone énfasis en una forma especial de comprender el contenido y deposita, por tanto, en el propio contenido las claves de los procesos de enseñanza y aprendizaje. El segundo aspecto es limitativo; Shulman no se refiere específicamente al contenido matemático, y si acabamos de ver claro que la especificidad del contenido es esencial, hemos de buscar un poco más allá. Hay un tercer aspecto que también conviene señalar; Shulman nos lleva a reflexionar sobre una doble naturaleza del conocimiento del contenido, contemplado desde su organización y estructura en la mente del profesor y, citando a Schwab (1978), establece dos grandes subdominios de este conocimiento, el sustantivo y el sintáctico:

> El profesor no solo necesita entender que algo es así; debe comprender mejor por qué es así, por qué motivos se puede afirmar su orden y en qué circunstancias nuestra creencia en su justificación puede debilitarse e incluso negarse. Además, esperamos que el profesor comprenda por qué un tema dado es particularmente central para una disciplina, mientras que otro puede ser periférico. Esto será importante en juicios pedagógicos posteriores con respecto al énfasis curricular relativo (Shulman, 1986, p.9).

Con todo, como destaca el autor (Shulman, 1987), de todos los conocimientos del profesor, "El conocimiento didáctico del contenido es la categoría que, con mayor probabilidad, permite distinguir entre la comprensión del especialista en un área del saber y la comprensión del didacta" (p.11).

LA CÚSPIDE: EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR

Los trabajos de Shulman nos suponen una significativa aportación, pero no nos resultan suficientemente operativos para nuestra investigación. Necesitamos desmenuzar cada uno de estos dominios de conocimiento y, además, debemos contemplar las concepciones del profesor sobre la matemática y sus procesos de enseñanza y aprendizaje que supuso nuestra primera revelación en nuestra investigación. Es ahora cuando seguimos la estela de los trabajos del grupo de Deborah Ball en la Universidad de Michigan, que son específicos del profesor de matemáticas.

Ball, Thames y Phelps (2008), se apoyan en los hombros de Shulman, en cuanto a los dos grandes dominios del conocimiento, pero aportan tres subdominios, en cada uno de ellos que conviene reseñar. En el dominio del conocimiento del contenido (MK), diferencian entre conocimiento común (CCK) y especializado (SCK), y añaden el conocimiento en el horizonte matemático (HMK). En el conocimiento didáctico del contenido (PCK), además del conocimiento curricular de Shulman (CK), aprovechan la idea que define el PCK como un conocimiento que "incluye las más útiles formas de representación, las más poderosas analogías, ilustraciones y ejemplos, explicaciones y demostraciones, en una palabra, las formas de representar y reformular el conocimiento para hacerlo comprensible a otros" (p.9), para establecer dos subdominios, el conocimiento de las matemáticas y los estudiantes y el conocimiento de las matemáticas y la enseñanza.

En Ball y Bass (2009) vimos cómo los autores establecían tres subdominios dentro del HCK: HCK (T), HCK (P) y HCK (V). El HCK(T) es el conocimiento de las principales ideas y estructuras de la disciplina y las conexiones entre diferentes entes matemáticos, y el desarrollo de nuevos entes a partir del conocimiento existente. Incluye también el conocimiento de conexiones con contenidos posteriores y anteriores a los que se están tratando. El HCK(P) es el conocimiento de las formas de conocer y crear o producir en Matemáticas, aspectos de la comunicación matemática, el razonamiento y la prueba, saber definir y usar definiciones, establecer relaciones (entre conceptos, propiedades, etc), correspondencias o equivalencias o elegir representaciones, generalizar o explorar. El HCK(V)[1] contiene valores centrales de la disciplina como son la precisión y el cuidado con la consistencia del lenguaje matemático, el gusto por la coherencia argumental, la corrección y la exactitud como opuesto de la ambigüedad (no como opuesto de la aproximación). La idea de *matemática elemental desde un punto de vista avanzado,* y

[1] Vinculamos el HCK (V) a las concepciones y creencias. De todas formas, como la precisión, la consistencia del lenguaje, el gusto por la coherencia argumental son comunes a todo el pensamiento científico y no exclusivas de la educación matemática, no aparecerá de forma explícita en el modelo.

matemática avanzada desde un punto de vista elemental, parece ser el elemento de conexión más potente entre estos tres subdominios.

Como muchas veces defendía Carrillo (Carrillo, Contreras y Flores, 2013), estos tres subdominios del HCK tienen una naturaleza sustancialmente diferente y, además, abarcan todo el conocimiento matemático (MK). En el HCK(T) puede diferenciarse entre los elementos principales de la disciplina y la estructura de la misma, por lo que estos dos núcleos muestran el conocimiento matemático común desde la perspectiva del *qué es* la matemática, vista como un conjunto de *Temas* incardinados en una *Estructura*, mientras el HCK (P) se refiere a los conocimientos relativos al *cómo* se construye. Por otra parte, para nosotros, el carácter especializado ha de abarcar a todo el modelo en el sentido de que conocimiento profesional es aquél que está al servicio del trabajo diario del profesor.

Hay otros dos subdominios en el modelo de Michigan que tuvimos que adaptar, son el conocimiento de las matemáticas y la enseñanza y el conocimiento de las matemáticas y los estudiantes. Ver la matemática como objeto de enseñanza y de aprendizaje (cuando se piensa en los estudiantes) es lo que nos lleva a proponer esa forma de denominar a los subdominios.

Es así como nace MTSK (Carrillo et al., 2018) que ve la luz, por primera vez en el CERME 8. El modelo, que como hemos indicado en (Carrillo, Contreras y Flores, 2013) surge de la búsqueda de un instrumento de análisis por refinamiento de los modelos existentes, empieza a tomar vida en forma de tesis doctorales, casi todas bajo la dirección de José Carrillo. La primera de ellas fue realizada por Rojas (2014), consistente en un estudio de caso con un profesor de educación primaria y otro de educación secundaria con el contenido de las fracciones en conjunción con análisis didáctico para desarrollar categorías del modelo. Los informantes fueron profesores expertos, con el objeto de aportar información rica para obtener elementos caracterizadores del MTSK. También en fracciones se realiza la tesis de Moriel (2014), centrada en los modos de justificar el algoritmo de la división, poniendo de relieve diferentes subdominios del modelo a partir de los indicios encontrados entre algunos profesores y estudiantes para profesor, y la de Valenzuela, (2021), sobre división de fracciones con futuras maestras de primaria. La primera tesis, realizada en al ámbito de profesores de universidad, es la de Vasco (2015), con dos profesores universitarios que enseñaban álgebra lineal (tema de matrices y determinantes). Se analizó el conocimiento y las concepciones evidenciadas por los profesores y se interpretó el conocimiento de los profesores con las relaciones que se observaron entre conocimiento y concepciones. El concepto de infinito, como elemento subyacente a multitud de conceptos presentes en el currículo, fue estudiado en la tesis de Montes (2015), con un profesor de secundaria y bachillerato. En su tesis, Flores-Medrano (2015) profundizó en algunos elementos del modelo, y obtuvo indicadores del conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas y del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, avanzando en la caracterización del conocimiento de la práctica matemática. La tesis de Escudero-Ávila (2015), desarrollada en un contexto de formación continua, aporta la particularidad de realizarse un entorno virtual interactivo, mostrando avances en la caracterización de los subdominios KFLM y KMT. En la tesis de Aguilar (2016) se abordan en profundidad de relaciones entre los diferentes subdominios del MTSK y entre estos y las concepciones. De los informantes; es probablemente la más detallada en este tipo de relaciones.

La observación y el análisis de la práctica de profesores de matemáticas es el escenario común a todas estas investigaciones, pero también nos brinda la oportunidad de recrear situaciones de aprendizaje en las distintas fases del desarrollo profesional, usando MTSK como organizador del conocimiento especializado del profesor. El análisis de un episodio permite desgranar, tanto el conocimiento puesto en juego en la práctica, como aquellos otros que habrían permitido al profesor una gestión alternativa, como es el caso de la tesis doctoral de Liñán (2017), con una profesora de primaria, cuando enseña geometría, o de Fuentes-Leal (2020), de una profesora de secundaria cuando aborda la proporcionalidad. También sobre geometría en secundaria, tomando como informantes a estudiantes para profesor, versa la tesis de Carreño (2021).

Kabbaz (2018) analiza, usando MTSK como parte de su marco teórico, las tensiones y contribuciones de la práctica curricular en la constitución de la identidad profesional del futuro profesor de matemáticas en cursos de aprendizaje a distancia; mientras Alfaro (2020) caracteriza el conocimiento de estudiantes de la Universidad Nacional de Costa Rica, sobre los aspectos lógico-sintácticos y matemáticos de la demostración y estudia las características de los argumentos que más convencen a los futuros profesores.

Finalmente, las tesis de Almeida (2021) y Pascual (2021) avanzan hacia un modelo de conocimiento del formador de profesores de matemáticas, teniendo MTSK como referente del contenido de la formación y mostrando posibles dominios, subdominios y categorías de ese conocimiento.

Como puede verse, han sido diversos niveles educativos (primaria, secundaria y universidad, aunque hay tesis en curso de educción infantil), diversos contenidos, como fracciones, proporcionalidad, geometría elemental, el infinito, álgebra, teoría de números o la demostración.

Ahora la investigación se abre a nuevos ámbitos del conocimiento, XTSK, como lo denominó José Carrillo. De hecho, se acaba de defender una tesis (Correia, 2021) sobre conocimiento especializado en biología.

Este congreso es una prueba del horizonte que ha alcanzado la investigación impulsada por José Carrillo. La Red Iberoamericana sobre MTSK, de la Asociación Iberoamericana Universitaria de Posgrado, quiere convertirse en las ramas de ese árbol que seguirá dando vida (cobertura) a todo aquél que, como Pepe, quiera transformar el mundo a través de la educación.

Referencias

Aguilar, Á. (2016). El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas. Un estudio de caso (tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Alfaro, C. (2020). Conocimiento de la práctica matemática sobre las demostraciones en profesores de matemática en formación inicial (tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Almeida, M. (2020). Conhecimento especializado sobre divisibilidade do formador de professores que ensina teoria dos números para estudantes de licenciatura em matemática (tesis doctoral). Universidade da Campinas, Brasil.

Arellano, M. y Carrillo, J. (2020). Un acercamiento a la forma en que los estudiantes de Primaria formulan problemas. Revista de *Educaçao Matemática, 17*, 1-19.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Ball, D.L., y Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. *43rd Jahrestagung der Gesellshaft für Didaktik der Mathematik*. Oldenburg, Germany.

Carreño, E. (2021). Conocimiento geométrico especializado en estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria. Un estudio en torno a los polígonos (tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Carrillo, J. (1996). Modos de resolver problemas y concepciones sobre la Matemática y su enseñanza de profesores de Matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones. Tesis Doctoral inédita. Departamento de Didáctica de las Ciencias. Universidad de Sevilla.

Carrillo, J. (2015). Estudio personal compartido sobre conocimiento y desarrollo profesional del profesorado y resolución de problemas. En N. Planas (Ed.), *Avances y Realidades de la Educación Matemática* (pp. 133-151). GRAO.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Defining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser, y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8.* Middle East Technical Universitiy: Ankara, Turquía, 2013. p. 2985-2994.

Carrillo, J., Contreras, L.C., y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina and I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Comares.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Montes M.A. (2019). Mathematics Teachers' Specialised Knowledge in Managing Problem-Solving Classroom Tasks. En P. Felmer, P. Liljedahl y B. Koichu (Eds), *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development* (297-316). (Research in Mathematics Education Series). Springer.

Climent, N. y Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en Matemáticas con maestras, *Enseñanza de las Ciencias, 21*(3), 387–404.

Climent, N., Espinoza-Vásquez, G., Carrillo, J., Henríquez-Rivas, C., Ponce, R. (2021). Una lección sobre el teorema de Thales, vista desde el conocimiento especializado del profesor. *Educación Matemática, 33*(1), 98–124.

Contreras, L.C. y Carrillo, J. (1998). Diversas concepciones sobre la resolución de problemas en el aula. *Educación Matemática*, 10(1), 26-37.

Correia, M. (2021). O conhecimento especializado do profesor quando ensina tópicos de boología (tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Escudero-Ávila, D. I. (2015). Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria (tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Escudero-Ávila, D.I. y Carrillo, J. (2020). El Conocimiento Didáctico del Contenido: Bases teóricas y metodológicas para su caracterización como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Educación Matemática, 32(2), 8-38.

Flores-Medrano, E. (2015). Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) (tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Fuentes-Leal, C. (2020). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca de la proporcionalidad: un estudio de casos (tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Guevara, F., Contreras, L.C. y Carrillo, J. (1997). Guevara, Fernando, Contreras, Luis & Carrillo, José (1997). Un programa de formación de matemáticas desde una aproximación al conocimiento sobre sus creencias. RELIEVE *3(*2).

Kabbaz, P. (2018). Tensões e contribuições do estágio curricular na constituição da identidade profissional do licenciado em matemática na EAD (tesis doctoral). Universidade da Campinas, Brasil.

Liñán, M. M. (2017). Conocimiento Especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria (tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Montes, M. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso (tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Moriel, J. (2014). Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações (tesis doctoral). Universidad Federal de Mato Grosso, Cuiabá, Brasil.

Muñoz-Catalán, M.C., Carrillo, J. y Climent, N. (2007). The professional development of a novice teacher in a collaborative context: An analysis of classroom practice. D. Pitta-Pantazi y G. Philippou et al (Eds.), *Proceedings of the V Congress of the ERME.* Larnaca, Chipre: University of Cyprus, 1935-1944.

Muñoz-Catalán, M.C, Carrillo, J. y Climent, N. (2010). Mathematics teacher change in a collaborative environment: to what extent and how, *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(5), 425–439.

Pascual. I. (2021). El conocimiento del formador de maestros en la etapa de formación inicial, en relación con la enseñanza de la Didáctica de las Matemáticas. Un estudio de caso (tesis doctoral). Universidad de Huelva.

Rojas, N. (2014). Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos (tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Schwab, J.J. (1978). *Science, curriculum and liberal education*. Chicago: University of Chicago Press.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge Growth in teaching. *American Educational Research Association, 15* (2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Valenzuela, M. (2021). Transformación del conocimiento especializado sobre división de fracciones de futuras profesoras de primaria en un contexto de estudio de clases (tesis doctoral). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Vasco, D. (2015). Conocimiento especializado del profesor de álgebra lineal. Un estudio de casos en el nivel universitario (tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

DESAFÍOS Y PERSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN CON/DEL MATHEMATICS TEACHERS' SPECIALIZED KNOWLEDGE

Challenges and Research perspectives with / from the Mathematics Teachers' Specialized Knowledge

Carreño, E.[a]; Escudero-Avila, D.[b]; Estrella, S. [c]

[a] Universidad de Piura, Perú; [b] Investigadora independiente; [c]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Resumen. Este escrito reúne tres acercamientos diferentes respecto a los desafíos, retos y perspectivas de investigación uso y/o desarrollo con/del MTSK, que se vislumbran a través de la trayectoria de trabajo que se ha seguido en congresos anteriores a este y de la producción científica reportada en diversos artículos. El escrito muestra un análisis de distintas fuentes que apoyan la identificación de los logros que se han alcanzado y definir y proponer algunas líneas de acción que pudieran ser de interés para quienes trabajan con el MTSK.

Palabras clave. Desafíos del MTSK, Perspectivas de investigación del MTSK, CIMTSK.

Abstract. This paper compiles three different approaches regarding the difficulties, challenges and perspectives of research, use and / or development with / of the MTSK, which are seen through the trajectory of work that has been followed in conferences prior to this and scientific research reported in various articles. In that sense, we propose to show an analysis of different sources that allow us to identify the achievements that have been attained and define and propose courses of action that could be of interest to those of us who work with the MTSK.

Keywords. MTSK Challenges, MTSK research perspectives, CIMTSK.

INTRODUCCIÓN

Desde su origen, el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) ha tenido como foco de atención la especificidad del conocimiento del profesor de matemáticas. Si bien el grupo SIDM de la Universidad de Huelva tomó como puntos de referencia y partida los trabajos de Shulman y del grupo de Deborah Ball (Contreras-Gonzáles et al., 2013) para construir el MTSK, este ha avanzado en la diferenciación de subdominios y categorías que, según su contenido e interrelación, permite estudiar, de manera exhaustiva y profunda, el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. A la fecha, el modelo ha trascendido a otras disciplinas, como la biología (p.ej. Luís y Carrillo, 2020) y a otros focos de investigación como el conocimiento del formador de profesores (Pascual, 2021). En este contexto, este documento propone la reflexión sobre desafíos y perspectivas para la investigación, y sobre el uso y/o el desarrollo del "Mathematics Teachers' Specialized Knowledge" para la mejoría de la educación matemática; y finaliza integrando estas ideas con los aportes del CIMTSK 2021.

Desafíos del MTSK: temas atendidos y demandas de investigación

Las actas de los congresos anteriores (Carrillo et al., 2015; Carrillo y Contreras, 2017; Carrillo et al., 2019) y la producción científica desarrollada en torno al MTSK (Moriel Junior et al., en prensa), dan cuenta del desarrollo y uso del modelo, así como de la variedad de estudios realizados. Así pues, se ha investigado en contextos presenciales y en plataformas virtuales, mediante trabajos situados en el paradigma interpretativo que

Carreño, E., Escudero-Avila, D., & Estrella, S. (2021). Desafíos y perspectivas de investigación con/del Mathematics Teachers' Specialized Knowledge. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 11–18). Congresseme.

tienen, mayoritariamente, el estudio de caso instrumental como diseño de investigación. En este sentido, los datos se han recogido de sesiones de clase grabadas en video o audio o de las notas de campo tomadas de estas. También se han empleado tareas diseñadas ad hoc, discusiones grupales entre profesores en formación inicial o continua, foros de discusión, cuestionarios y entrevistas. El análisis de estos datos ha requerido identificar episodios y subepisodios de clase, así como diferenciar entre evidencias, indicios y oportunidades de conocimiento y conocimiento evocado. Dicho análisis se ha apoyado en bases teóricas y metodológicas tales como: el Análisis didáctico, las tendencias didácticas para analizar concepciones (Carrillo, 1998), la Grounded Theory, el análisis de contenido, los espacios de trabajo matemático, entre otras; y, como herramientas auxiliares–para estudiar los datos cualitativos recogidos–como MAXQDA.

Los primeros desafíos del MTSK estuvieron centrados en el desarrollo de investigaciones ligadas, por un lado, a temas específicos y conceptos menos explorados como los de geometría, y por otro lado, a prácticas matemáticas concretas (p.ej. definición, ejemplificación o generalización). Esto ha permitido profundizar en el contenido de cada subdominio y establecer relaciones entre estos, así como buscar relaciones entre el MTSK y otros modelos de conocimiento o perspectivas teóricas. Este desafío va más allá de aportar un modelo más a los que ya existen, pues el propósito final es mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, mediante la formación inicial y continua de los profesores. De hecho, el interés por el conocimiento del profesor, su desarrollo profesional y los programas de formación de profesores ha estado presente desde las primeras investigaciones de los miembros del grupo SIDM de la Universidad de Huelva. En ese sentido, interesa “integrar el MTSK a un marco de desarrollo profesional, de tal manera que podamos tener programas de formación basados en la organización de conocimientos específica que propone este modelo” (Montes et al., 2017, p. 69).

Revisar la lista de desafíos (D) propuestos en el IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Codes et al., 2019) permite diferenciar lo que se ha avanzado y lo que aún es un desafío. Sobre el primer grupo puede decirse que: se ha profundizado en el conocimiento de los subdominios y categorías del MTSK (D1), mediante su aplicación a diferentes temas (D3) y niveles educativos. Así pues, se ha avanzado en el diseño de tareas formativas basadas en el MTSK (D11), en el significado del MTSK en Educación Infantil (D2), todo lo cual ha permitido mejorar la identificación y descripción de las relaciones entre subdominios (D4). También, se ha avanzado en la proyección del MTSK sobre prácticas de enseñanza concretas (D9), en el establecimiento de relaciones entre el MTSK y otras perspectivas o enfoques teóricos (D12) en lo cual destaca los Espacios de Trabajo Matemático (ETM), en el estudio del conocimiento del formador de profesores (D8) y en la extensión del modelo a otras disciplinas (modelos **X**TSK), al respecto destacan los trabajos relacionados con la biología (BTSK). Sobre el grupo de desafíos menos trabajados se puede indicar: el abordaje del dominio afectivo que incluye a las creencias (D5), pues su contenido aún no está caracterizado de manera similar a los subdominios; analizar el MTSK en entornos tecnológicos (D11) lo cual puede requerir estudiar el modelo Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK) y el diseño de cuestionarios MTSK (D15) pues, si bien se han elaborado algunos (p.ej. Montes et al., 2015, Carreño, 2021, Advíncula et al., 2021), surge la necesidad de contar con instrumentos que tengan mayor alcance de aplicación, sin que se pierda la oportunidad de recoger evidencias o indicios de conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Este último desafío y el propósito final del MTSK (mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas), recuerda unos de los desafíos planteados, cautelosamente, en las actas de II congreso:

> Una de las vías de desarrollo de la agenda de investigación parece apuntar a la formación inicial y continua diseñada con MTSK, por lo que pretendemos no solo comprender la práctica, sino modificarla para mejorarla. Habrá que preguntarse si es que estamos avanzando hacia un paradigma socio-crítico en el sentido de Ernest (1998) y si es el caso, establecer y definir los requisitos que deberían cumplir las investigaciones. Habrá que ser cauto, pues la mera presencia de un cambio o el hecho de documentarlo y explicarlo no garantiza el cambio de paradigma. (Escudero-Ávila et al., 2016, p. 66)

Probablemente, las investigaciones desarrolladas hasta ahora constituyen una especie de diagnóstico o línea base, sobre la que es preciso tomar acciones de intervención para transformar planes de formación y prácticas docentes, de tal manera que, a partir de nuevos planes de formación y de los resultados alcanzados con dichas intervenciones, se logre conseguir mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los distintos niveles educativos.

Perspectivas de investigación

Los desafíos antes descritos plantean perspectivas sobre el modelo analítico MTSK (Figura 1) que permite: el análisis del conocimiento especializado que posee un profesor de matemáticas, indagar en los contextos de formación inicial y continua del profesorado de matemáticas de educación infantil, primaria, secundaria y terciaria; desde el ejercicio de la docencia del futuro profesor, del profesor en servicio, o del formador de profesores. La educación paralela, aquella que considera que los estímulos del entorno y los medios de comunicación educan, puede ser una nueva línea de investigación, pues especialmente, ha tenido un nuevo auge en este periodo de pandemia, tanto por el uso de las tecnologías, como ser soporte de los avances escolares, o por la tendencia de padres o apoderados de emanciparse de los sistemas educativos jerárquicos y acercarse a una educación que valora la matemática, pero prioriza el bienestar y desarrollo socioemocional de sus hijos e hijas.

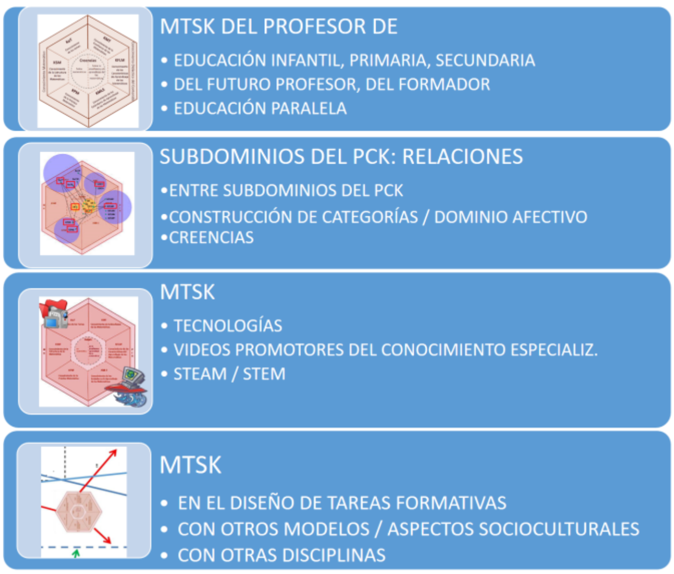


Figura 1. Perspectivas de investigación del MTSK

Una línea de investigación sobre el conocimiento de los profesores en diferentes contenidos matemáticos ha permitido identificar situaciones y relaciones en las que los dominios y subdominios se evidencian, con sus categorías e indicadores, entregando una mayor comprensión de estos, lo cual permite afrontar la complejidad de la docencia en el aula escolar considerando el dinamismo de la generación de conocimiento. También, la investigación sobre el conocimiento del profesor asociado a lo afectivo y al subdominio nuclear de las creencias, junto a la mayor profundización de subdominios, como el del conocimiento de la práctica del profesor por contener conocimientos implícitos y específicos sigue siendo una perspectiva que requiere atención (C.f., Figura 2).

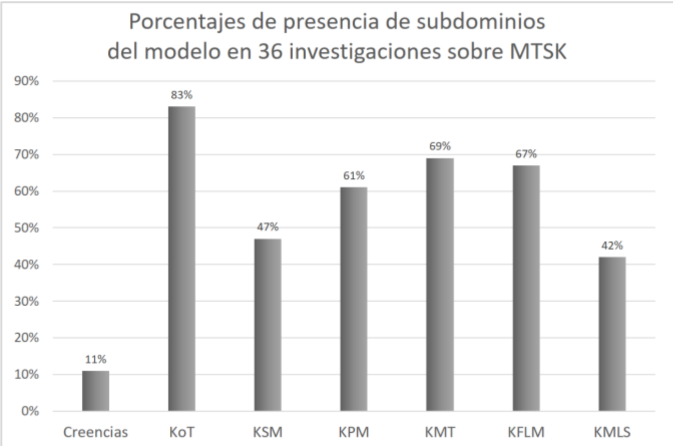


Figura 2. Subdominios del modelo MTSK en 36 investigaciones hasta 2020.

Fuente: Moriel Junior et al. (en prensa).

Desde una perspectiva tecnológica, habrá investigaciones que indaguen en la interacción interdisciplinaria con uso de las tecnologías de la información y comunicación en ámbitos tan innovadores como la realidad virtual o la realidad aumentada en la educación matemática u otras disciplinas, y tan usuales –en pandemia- como la enseñanza a distancia. Asimismo, investigaciones que consideran el uso de videos que promueven el conocimiento especializado del profesor; o sobre formas prometedoras de garantizar el desarrollo profesional de los docentes, como las plataformas de educación a distancia. Estas perspectivas de investigación permitirán aumentar el conocimiento del profesor de matemáticas, de sus nuevas prácticas y las complejidades asociadas a ellas, proporcionando más comprensión sobre las posibles oportunidades de aprendizaje y beneficios positivos y útiles a la enseñanza.

Una línea investigativa emergente es el desarrollo de las extensiones del modelo, denominado XTSK, que permite a la comunidad de desarrolladores interactuar con los conocimientos de profesores de matemática que enseñan otra disciplina (e.g., Estadística; Vidal-Szabó y Estrella, 2021) o conocimientos de profesores de otras disciplinas (e.g., Biología, Física, entre otras) en el marco de análisis que propone el MTSK. También es incipiente el diálogo con otras perspectivas y modelos, incluso con posturas sociocríticas de la educación matemática; como también, con modelos de desarrollo profesional docente colaborativos como Lesson Study, el cual aboga igualmente por la mejora de la educación matemática en equipos de profesores, especialmente usando el enfoque de resolución de problemas y convirtiendo a los profesores de matemática en investigadores y estudiosos de sus lecciones.

Aportes del V CIMTSK a los desafíos y perspectivas de investigación

Dentro de este 4to congreso se realizaron discusiones que permitieron poner de manifiesto los avances y logros alcanzados, tanto en desarrollo del modelo como en la búsqueda de un entendimiento más profundo de las necesidades del profesorado de matemáticas. En este sentido se presentaron 46 comunicaciones repartidas en 5 temáticas, como se muestra en la tabla 1. Además, se realizó una mesa en memoria del Dr. José Carrillo Yáñez poniendo el foco en su contribución a la creación del modelo y un workshop sobre tareas formativas y su potencialidad para desarrollar conocimiento especializado. En todos estos espacios encontramos momentos para reflexionar sobre las perspectivas y desafíos que se vislumbran para nuestro grupo de trabajo, así como respuestas a algunos de los retos que nos habíamos planteado anteriormente.

Tabla 1. Comunicaciones presentadas por temática

Temáticas	*Comunicaciones*
Aplicación de MTSK en la formación de profesores	17
Investigaciones sobre el formador de profesores de matemáticas	2
MTSK en relación con distintos tópicos y etapas	14
Desarrollo del MTSK	3
Extensiones del MTSK	10

En la primera mesa homenaje los ponentes manifiestan lo que, personalmente, identifican como intereses de trabajo en los cuales habrá que poner especial atención en el futuro. Entre estos intereses se habla de la necesidad continuar en la profundización, la construcción y caracterización de modelos de conocimiento especializado del profesor para disciplinas distintas a la matemática: el XTSK. En este sentido, dentro de estas memorias podremos observar que se han presentado varias comunicaciones que muestran avances en la caracterización de la enseñanza del sistema respiratorio, la enseñanza de los agrotóxicos, sobre la relevancia del lenguaje en los modelos teóricos, y sobre el conocimiento especializado del profesor de biología, así como una comunicación en la que se trata las extensiones del MTSK realizadas por el grupo TSK en Brasil. Estos resultados de investigación permiten observar un avance en esta línea que continúa en expansión y que permite reflexionar sobre la naturaleza del conocimiento profesional y la potencialidad que tiene la definición de estas categorías en el modelo.

Por otro lado, se menciona también el interés por entrar más a fondo en las investigaciones sobre el conocimiento del formador de profesores, puesto que es un área de interés compartido con otros muchos grupos de trabajo y que parece tener todavía un amplio camino por recorrer. Dentro del congreso se recibieron solo 2 comunicaciones referentes a esta temática, a pesar de que en varias discusiones se llega a la conclusión de que el conocimiento del formador forma parte fundamental del proceso de desarrollo de conocimientos de los futuros profesores de matemáticas.

Además, se menciona la importancia de consolidar la colaboración en grupo a través de la red iberoamericana MTSK y la necesidad de aprovechar la diversidad de países y contextos para generar estudios a gran escala o de tipo comparativo. Dentro de este congreso pueden identificarse 14 comunicaciones en las cuales figuran investigadores de dos o más países. Sin embargo, no parece haber entre estas un especial énfasis en esta diversidad de perspectivas, lo que señala una clara oportunidad para realizar este tipo de investigaciones en el futuro, potenciando así el trabajo en red.

Otra de las líneas que se visualizan como interesantes es el trabajo en el impacto del MTSK en la formación de profesores de matemáticas. Dentro de las comunicaciones que se presentan en este evento, 17 se presentan en el marco de la temática *aplicación del MTSK en la formación de profesores*, sin embargo, dentro de estas se presentan más bien avances relativos a la identificación de conocimientos de futuros profesores de matemáticas más que de estudios interesados en el desarrollo de conocimientos del profesor, con lo cual, no siempre es posible realizar reflexiones sobre el impacto del modelo en la formación. Entre estos estudios destaca la inclusión de 2 comunicaciones en las que se reflexiona sobre los efectos que puede tener en la formación incluir al MTSK como un contenido en la formación de profesores, discusión que surgió en varios espacios de trabajo de este congreso y que aquí encuentra una ventana para la reflexión formal que aporte luz a este debate.

En la misma línea del interés por analizar investigaciones que permitan ver la aplicación del modelo en la formación, se desarrolla el workshop: *Tarefas formativas e suas potencialidades para o desenvolvimento de conhecimento especializado docente*. En este se muestra un claro avance en estudios sobre desarrollo de conocimientos con el MTSK a través de tareas específicamente diseñadas. Además de exponer esta propuesta de diseño para propiciar una discusión al respecto, se fijan algunos retos al momento de poner en funcionamiento este tipo de tareas, como por ejemplo la importancia de fijar objetivos de formación y la necesidad de sistematizar el desarrollo de este tipo de herramientas formativas. Se habla además de que una de las dificultades que se tuvieron al momento de diseñar y aplicar estos instrumentos es reconocer y desarrollar conexiones interconceptuales que forman parte del Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas. Este es un punto importante a destacar porque ha sido una de las dificultades reportadas en distintos trabajos de investigación, desde la creación del modelo, por lo que es un reto importante y urgente para este grupo de investigación.

Otro de los retos reconocidos en este espacio ha sido el situar al PCK en un plano distinto al MK, puesto que esto podría implicar poner especial atención en el conocimiento de quien aplica la tarea de formación.

Por otra parte, se logró recopilar también algunas prospectivas y retos manifestados en las discusiones de las comunicaciones del congreso. Entre estos podemos destacar que se manifiestan dudas de los usuarios del modelo respecto de las relaciones entre subdominios que permitan regresar de lo analítico a lo práctico del conocimiento. Sobre esto se han propuesto algunos trabajos en los que se habla del uso de redes y paquetes de conocimiento.

Además, se habla de la necesidad de reconocer las relaciones entre lo que conoce el profesor y cómo lo utiliza, poniendo sobre la mesa una discusión acerca de la funcionalidad que tiene reconocer e interpretar los conocimientos especializados del profesor más allá del análisis. Se abre así la puerta para generar relaciones entre lo que sabe el docente y lo que hace con ese conocimiento.

También se logra identificar en las comunicaciones avances en la identificación de conocimientos relativos a contenidos específicos como son las figuras y cuerpos geométricos, medidas de longitud, números periódicos, clasificación, localización en el plano cartesiano, fracciones, área y volumen, simetría, límite de sucesiones, funciones afines, cuadráticas y exponenciales, ecuaciones lineales y cuadráticas, método de la inversa y sistema de numeración decimal. Además, se identifican comunicaciones relacionadas con contenidos más generales como estudios relacionados con álgebra, geometría, estadística, probabilidad, y TIC's.

Por último, se identifica también trabajos en los que se relaciona el modelo con otros constructos o modelos teóricos como los espacios de trabajo matemático (ETM), teoría APOE, teoría de situaciones didácticas, la competencia *noticing* y la identidad profesional.

A modo de conclusión

Algunos de los investigadores han iniciado el estudio de trayectorias hipotéticas de aprendizaje de conceptos que aportan a la profundización de los dominios y subdominios del MTSK. Los desafíos en educación matemática son muchos y variados, una meta es incidir en la formación inicial docente y formación continua para apoyar la mejora de la Educación Matemática, puesto que los programas de formación docente tienen un rol fundamental en las conexiones entre la teoría y la práctica.

La red de investigadores del MTSK, como un colectivo en que se consensuan los desafíos y avances del MTSK como modelo útil para la enseñanza, incentiva a los investigadores y profesores a llevar los descubrimientos sobre el conocimiento del profesor más allá de lo teórico insertándolo en las aulas, a través de la reflexión sobre la acción y en la acción.

Esta reflexión general nos sirve para reconocer que hemos realizado grandes avances en el trabajo y desarrollo del MTSK, sin embargo y afortunadamente, tenemos mucho por hacer para avanzar en la comprensión de la construcción, funcionamiento y desarrollo del conocimiento especializado del profesorado de matemáticas.

Esperamos que este tipo de eventos funcionen como un espacio de encuentro y discusión profunda de nuestro trabajo, así como una fuente de inspiración para trabajos futuros que puedan coincidir con los interés y necesidades que tiene la red MTSK.

Referencias

Advíncula, E., Beteta, M., León, J., Torres, I., y Montes, M.A. (2021). El conocimiento matemático del profesor acerca de la parábola: diseño de un instrumento para investigación. *Uniciencia*, *35*(1), 190-209.

Carreño, E. (2021). *Conocimiento geométrico especializado en estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria. Un estudio entorno a los polígonos.* (Tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Hueva: Universidad de Huelva.

Carrillo, J., Codes, M., y Contreras, L.C. (2019). *Actas de IV Congreso Iberoamericano sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas* [Huelva: Universidad de Huelva, 2020.] - Permalink: http://digital.casalini.it/9788418280030

Carrillo, J., y Contreras, L. C. (2017). *Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva*. Huelva: CGSE.

Carrillo, J., Contreras, L.C., y Montes, M.A. (2015). *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor*. Huelva: CGSE.

Codes, M., Moriel-Junior, J., Alfaro, C., y González, Y. (2019). Síntesis y problemas abiertos en el IV Congreso Iberoamericano de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras. (Eds.). *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 41-48). Huelva: CGSE.

Contreras-Gonzáles, L.C., Climent, N., Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. Mariotti (Eds.), Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 2985-2994). Antalya, Turkey: ERME.

Escudero-Ávila, D., Gomes Moriel, J., Muñoz-Catalán, M.C., Flores-Medrano, E., Flores, P., Rojas, N., y Aguilar, A. (2016). Aportaciones metodológicas de investigaciones con MTSK. En J. Carrillo y L. C. Contreras, y Montes, M.A. (Eds.). *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor* (pp. 60-68). Huelva: CGSE.

Luís, M., y Carrillo, J. (2020). O modelo do conhecimento especializado do professor de Biologia (BTSK). *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 11(7), 19-36,

Montes, M.A., Contreras, L.C., Liñán, M.M., Muñoz-Catalán, M.C., Climent, N., Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación*, 367, 36-62.

Montes, M.A., Aguilar, A., Escudero-Ávila, D., Moriel-Junios, J., Contreras, LC., y Climent, N. (2017). Problemas de la educación matemática donde la contribución de MTSK puede ser relevante. En J. Carrillo y L. C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 68-70). Huelva: CGSE.

Moriel Junior, J., Escudero-Avila, D. y Flores-Medrano, E. (2021). Producción MTSK en la web of science hasta 2020: focos, abordajes, aportes complementarios y alcances. (en prensa)

Pascual, M.I. (2021). El conocimiento del formador de maestros en la etapa de formación inicial, en relación con la enseñanza de la Didáctica de las Matemáticas. Un estudio de caso. (Tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Vidal-Szabó, y Estrella, S. (2021). Conocimiento Estadístico Especializado en Profesores de Educación Básica, basado en la taxonomía SOLO. Revista Chilena de Educación Matemática, RECHIEM. (aceptado).

COMUNICAÇÕES ORAIS

TEMÁTICA 1

APLICAÇÃO DO MTSK NA FORMAÇÃO DOCENTE

IDENTIDADE PROFISSIONAL DOCENTE E CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA (MTSK: APROXIMAÇÕES ENTRE CONCEITOS

Teacher Professional Identity and Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK: approaches between concepts

Melo, C. I. B. de [a]

[a] Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Temática: 1 – MTSK na formação docente

Resumo. Dois campos da discussão sobre o professor de Matemática ganharam relevo ao se aproximarem do debate sobre a profissionalização da docência e a importância do sujeito nesse processo: os conhecimentos necessários para o ensino e a identidade profissional docente (IPD). A amplitude da literatura a esse respeito evidencia sua importância, havendo produções mais recentes dado ênfase à especificidade da IPD e do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK, em inglês), mote central deste estudo teórico, que tem por objetivo discutir possíveis aproximações entre os conceitos de MTSK e IPD. A partir da discussão proposta, evidenciamos uma interrelação entre essas categorias e a formação inicial, sendo a noção de crenças um elemento-chave nesse entendimento. O aprofundamento desse debate, através de maiores estudos, se faz necessário para propiciar uma visão ampliada de docência e de formação docente em Matemática.

Palavras-chave. Identidade profissional docente, MTSK, Conhecimento especializado, Formação do professor de Matemática.

Abstract. Two fields of discussion about the mathematics teacher gained prominence as they approached the debate on the professionalization of teaching and the importance of the subject in this process: the knowledge needed for teaching and the teaching professional identity (TPI). The breadth of the literature in this regard highlights its importance, with more recent productions emphasizing the specificity of the TPI and the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), the central theme of this theoretical study, which aims to discuss possible approaches between the MTSK and TPI. From the proposed discussion, we evidenced an interrelationship between these categories and the initial formation, being the notion of beliefs a key element in this understanding. The deepening of this debate, through further studies, is necessary to provide a broader view of teaching and teacher training in mathematics.

Keywords. Teacher professional identity, MTSK, Specialized knowledge, Mathematics teacher training.

INTRODUÇÃO

Assistimos nas últimas décadas avanços nos estudos, no âmbito da Educação e do ensino de Matemática, sobre o professor e sua formação, especialmente no domínio da então emergente área denominada Educação Matemática. Saindo de um paradigma pragmático e tecnicista, no qual o docente era encarado como mero reprodutor de lições, nos aproximamos da visão do professor de Matemática como um profissional, com identidade e conhecimentos próprios de sua profissão.

Nesse processo, é possível observar dois movimentos. O primeiro diz respeito ao refinamento das discussões sobre os conhecimentos profissionais para a docência, reconhecendo esta como uma profissão de saberes específicos e reafirmando seu caráter

Melo, C. I. B. de (2021). Identidade profissional docente e conhecimento especializado do professor de matemática (MTSK): aproximações entre conceitos. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), A*nais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 20–27). Congresseme.

profissional. Shulman (1986) é considerado um dos precursores desse debate, ao instituir o *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), característica particular do trabalho docente.

Partindo desse marco teórico, diversos outros pesquisadores empenharam – e ainda empenham – esforços em aprofundar as discussões sobre os conhecimentos profissionais do professor, enfatizando as especificidades do ensino de Matemática. É o caso do grupo liderado por Deborah Ball, que propôs o modelo do *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) (Ball, Thames, & Phelps, 2008), e do grupo liderado por José Carrillo, que elaborou o mais recente desses modelos, o *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK) (Carrillo et al., 2014), mote central da discussão proposta.

O segundo movimento, por sua vez, se refere aos estudos que enveredaram na compreensão de aspectos subjetivos relativos à docência e à constituição do professor. Nesse nicho consubstanciam-se as pesquisas e discussões acerca da identidade profissional docente (IPD), compreendida, em linhas gerais, como resultante dos processos de socialização que o indivíduo vivencia no âmbito da docência, o que também confere viés profissional ao trabalho do professor. A discussão dessa temática é vasta, tanto no campo da Educação, quanto no campo da Educação Matemática, onde há vários estudos, nacionais e internacionais, acerca da constituição identitária do professor que ensina Matemática (Cyrino, 2016, 2017; De Paula & Cyrino, 2018, 2020).

Em face desse cenário surgem-nos questionamentos, tais como: que aproximações é possível estabelecer entre o constructo teórico do MTSK e o conceito de IPD? Que implicações pode-se vislumbrar dos subdomínios do MTSK sobre a IPD em Matemática e, de modo análogo, da IPD sobre a aquisição de conhecimentos por parte do docente? A literatura a respeito do conhecimento especializado e da identidade profissional do professor de Matemática é extremamente ampla, mas, ao observarmos poucas iniciativas de estabelecimento de uma relação nesse sentido, é nosso objetivo com este ensaio teórico discutir possíveis aproximações entre ambos os conceitos, MTSK e IPD. É ao que nos dedicamos nas seções seguintes.

IPD E MTSK: BREVE APANHADO CONCEITUAL

Compreender a discussão sobre a IPD, requer assimilar, antes de qualquer coisa, o conceito de identidade e de seus processos constitutivos. Embora tenha sido interpretada nos últimos tempos, sob a ótica de mundo e de homem que construímos, como o conjunto de traços – fixos e imutáveis – que nos define, a identidade, na verdade, deve ser compreendida como produto de nossos processos de socialização. Produto esse que está em constante transformação, revisão e negociação com os papéis sociais e aspectos de nossa realidade, por isso nunca findado.

Nas palavras de Dubar (2005), a identidade "nada mais é que o resultado a um só tempo estável e provisório, individual e coletivo, subjetivo e objetivo, biográfico e estrutural, dos diversos processos de socialização que, conjuntamente, constroem os indivíduos e definem as instituições" (p. 136). É nossa identidade que nos materializa em meio às disputas de forças do mundo, entre o que acreditamos e gostaríamos de ser e como somos vistos pelos outros, especialmente no desempenho dos papéis sociais que nos cabem.

Por estarmos inseridos numa sociedade inteiramente marcada pelo trabalho, o que implica na socialização e na vida do ser social por completo, é pertinente observarmos as reverberações desse setor na identidade humana, isto é, a constituição da identidade profissional. Os processos de socialização no mundo do trabalho assumem tamanha importância em nossas vidas, que, muitas vezes, traços profissionais sobrepõem-se às identidade sociais. O inverso, todavia, é inevitável: aspectos pessoais, oriundos das socializações primárias e de nossa personalidade, infalivelmente apresentam-se em nossa identidade profissional.

Cumpre, nesse sentido, lançar vistas à identidade profissional do professor, compreendendo esta como resultante dos processos de socialização na docência e, portanto, carregada de marcas da história de vida, da formação e da prática profissional. Longe de um perfil de docente a ser alcançado, a IPD é a maneira de cada professor, enquanto indivíduo, ser e estar na profissão, que o iguala aos demais, visto a categoria profissional, em si, mas que também o difere, considerando suas especificidades.

Essa identidade está, assim, situada na dialética

> [...] da revisão constante dos significados sociais da profissão [...] da reafirmação de práticas consagradas culturalmente e que permanecem significativas [...] Do confronto entre as teorias e as práticas [...] de seu modo de situar-se no mundo, de sua história de vida, de suas representações, de seus saberes, de suas angústias e anseios, do sentido que tem em sua vida o ser professor [...] de sua rede de relações com outros professores, nas escolas, nos sindicatos e em outros agrupamentos (Pimenta, 1999, p. 19).

Por esse motivo importa àqueles que se preocupam com a constituição do professor considerar a IPD, tendo em vista que "o professor é a pessoa e uma parte importante da pessoa é o professor" (Nóvoa, 1992, p. 25). É a partir da constituição identitária do professor que conseguimos alcançar e mobilizar a identificação com a profissão e o comprometimento com o desenvolvimento profissional, tendo plena consciência do papel da docência na vida do indivíduo.

Tal aspecto ganha ainda mais relevo em se tratando da formação do professor de Matemática, visto que esse campo do conhecimento carrega marcas de uma gênese histórica derivada do bacharelado e de uma visão, muitas vezes, limitada e antiquada sobre docência e docente. Não resta dúvidas, portanto, que, se intencionamos potencializar a formação desse professor, implicando na qualificação de seu trabalho, ou seja, no ensino da Matemática, é imperativo que consideremos o processo de constituição identitária desse profissional, sobretudo em seu período de formação.

Todavia, esse aspecto do *saber ser*, ao qual diz respeito a IPD e a subjetividade da pessoa que se faz professor, tem alcançado maior espaço nas discussões somente nas últimas décadas. Herdeiro de uma tradição pragmática e utilitarista, que felizmente ganha novas interpretações sob óticas mais humanísticas, está a dimensão do *saber fazer*, que compreende a discussão dos conhecimento necessários para o ensino.

Nesse rol, como mencionado, figura como uma das pioneiras a conceituação proposta por Lee Shulman. Esse pioneirismo se deve ao fato de que, antes de sua concepção, considerava-se conhecimento do professor apenas aquele referente ao objeto de ensino, ratificando a falácia de que para ensinar basta saber o conteúdo. Contrariando esse pensamento hegemônico da época, Shulman (1986) propõe uma categorização do conhecimento profissional do professor pautado no: "(a) conhecimento do conteúdo, (b) conhecimento pedagógico do conteúdo, e (c) conhecimento curricular" (p. 9, tradução nossa).

A maior contribuição desse autor ao debate em questão é, provavelmente, a concepção acerca do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK, em inglês), que é, com efeito, a marca da docência, ou seja, o conhecimento específico dos professores, responsável por traduzir o saber de determinada área em conteúdo a ser ensinado. Nas palavras do teórico, o PCK "vai além do conhecimento do conteúdo, em si, para a dimensão do conhecimento do conteúdo para o ensino" (Shulman, 1986, p. 9, tradução nossa).

O paradigma proposto por Shulman trouxe novas lentes para se enxergar o caráter profissional da docência, de modo geral, mas também de maneira específica nas áreas de ensino. Assim, sendo a Matemática considerada uma ferida aberta na educação de crianças e jovens em diversos países do mundo, pesquisadores dessa área lançaram mão do postulado do PCK para compreender as especificidades do conhecimento para o ensino desse componente curricular.

Surge, nesse contexto, o modelo do Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT, em inglês), proposto pelo grupo de pesquisadores liderados por Deborah Ball. Nas palavras dos autores, esse modelo pode ser entendido como "o conhecimento matemático necessário para realizar o trabalho de ensino da Matemática" (Ball et al., 2008, p. 395, tradução nossa), compreendendo que "o ensino pode exigir uma forma especializada de conhecimento puro da matéria [...]. Essa singularidade é o que torna esse conhecimento do conteúdo especial" (Ball et al., 2008, p. 396, tradução nossa).

> Ao se referirem a um conhecimento "puro" da matéria, os autores justificam como sendo aquele não vinculado ao conhecimento dos alunos ou da pedagogia, mas sim pertencente ao campo específico, sendo, portanto, distinto do PCK de Shulman; e "especializado", no sentido de que não é utilizado em contextos outros que não o ensino de Matemática, sendo único aos professores dessa área do conhecimento (Melo, 2021, p. 105).

O MKT é proposto em dois grandes domínios e seis subdomínios. São eles: o conhecimento do conteúdo, subdividido em conhecimento comum, especializado e horizontal; e o conhecimento pedagógico do conteúdo, configurado em conhecimento dos conteúdos e dos estudantes, do conteúdo e do ensino e do conteúdo e do currículo. Esse modelo causou grande impacto nas pesquisas da área, sobretudo pelo estabelecimento de um campo e referencial específicos para se considerar os conhecimentos profissionais próprios dos professores de Matemática.

Aprofundando ainda mais a discussão e partindo de fragilidades localizadas no modelo MKT – como a de apontar e melhor especificar seus subdomínios –, o grupo *Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática* (SIDM), liderado pelo espanhol José Carrillo, dirigiu seus estudos ao refinamento do modelo anterior, conduzindo à emergência do conceito de Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK, em inglês). Em relação ao MKT, o MTSK "apresenta uma reconfiguração do conhecimento matemático, uma reinterpretação do conhecimento pedagógico do conteúdo e uma nova forma de conceituar a noção de especialização" (Carrillo-Yañez et al., 2018, p. 5, tradução nossa), considerando que para esse modelo todo conhecimento do professor, seja ele matemático ou pedagógico da matemática, é tido como especializado. No entendimento de Carrillo, Climent, Contreras e Muñoz-Catalán (2013),

> A especialização do MTSK deve permitir que seja diferenciado dos conhecimentos pedagógicos gerais (conhecimentos de pedagogia e psicologia geral, que também fazem parte dos conhecimentos profissionais do professor de matemática), dos conhecimentos especializados dos professores de outras disciplinas e dos conhecimentos especializados de outras matemáticas profissionais. Em outras palavras, é especializado no ensino de matemática (p. 2988, tradução nossa).

Ilustrado em um hexágono, numa espécie de mandala, na qual os elementos se interrelacionam, o MTSK foi igualmente estruturado em dois grandes domínios e seis subdomínios. Do lado direito do modelo encontra-se o conhecimento matemático, subdividido em conhecimento dos tópicos, da estrutura e da prática matemática; do lado esquerdo está o conhecimento didático do conteúdo, demarcado pelo conhecimento das características de aprendizagem matemática, do ensino de Matemática e dos parâmetros de aprendizagem de Matemática (Moriel Junior & Wielewski, 2017).

Um importante diferencial entre esse e os demais modelos é que, ao centro do hexágono (e da concepção, em si), há um espaço dedicado às crenças dos professores, relativas à Matemática e seu ensino. Tal elemento, articulado à subjetividade do professor, está presente em todos os subdomínios de seu conhecimento profissional, o que sinaliza uma aproximação da caracterização do *saber fazer* com a dimensão do *saber ser*. Por essa razão, cabe lançar luzes à essa relação, compreendendo suas possíveis reverberações na formação e no trabalho docente, ao que nos propomos a seguir.

APROXIMAÇÕES ENTRE CONCEITOS: UMA VISÃO AMPLIADA DE FORMAÇÃO DOCENTE EM MATEMÁTICA

A primeira consideração a ser feita nesta análise é sobre a composição da identidade profissional do professor de Matemática. Segundo a expressiva maioria das conceituações de autores da área, especialmente aqueles relacionados ao campo da Educação Matemática, o conjunto de conhecimentos profissionais que têm os professores é parte fundante de sua IPD. Cyrino (2016), uma referência nos estudos da identidade de professores que ensinam Matemática, aponta o conceito da IPD como

> [...] um conjunto interligado de crenças/conceitos e saberes sobre o seu trabalho, associados à autonomia (vulnerabilidade e sentido de agência) e ao compromisso político. O conjunto de crenças/conceitos que os professores têm sobre si próprios e sobre sua profissão, do que significa ser "um excelente professor" e do tipo de professor que pretende ser, entre outras coisas, estão interligados e afetam o conhecimento que desenvolvem sobre o seu trabalho (p. 168, tradução nossa).

Perceba o leitor que, nesse entendimento, "é muito forte a associação da IP de PEM [identidade profissional de professores que ensinam Matemática] aos contextos, experiências anteriores, ou *conhecimentos*, necessários para o exercício da profissão" (De Paula & Cyrino, 2018, p. 146, grifo nosso). O que significa dizer que a identidade profissional desse professor é (re)elaborada e mobilizada a partir dos conhecimentos profissionais que possui e, ainda, das crenças que carrega sobre a profissão e sobre a Matemática, em si, elementos presentes no modelo MTSK.

Asseveramos, apoiados em Santos e Rodrigues (2010), que "esses saberes são transformados e/ou ressignificados e passam a integrar a identidade do professor, constituindo-se em elemento fundamental nas práticas e decisões pedagógicas" (pp. 22-23). Note-se que a identidade, como dito, é a síntese da maneira de ser e estar na profissão, o que implica diretamente nas práticas e decisões profissionais, de acordo com os autores. O conhecimento profissional age, desse modo, como uma base teórica/epistemológica de ação para o professor, estando sua IPD intimamente relacionada ao que e ao como ensina.

Por outro lado, "mobilizar alguém para a busca de conhecimentos e saberes, bem como para o alcance da consciência sobre qual, como, quando e porquê utilizá-los nos diversos contextos que venha a atuar, nada mais é do que trabalhar diretamente sobre sua identidade" (Melo, 2021, p. 97). Isto é, a aquisição de conhecimentos profissionais para o ensino de Matemática é um agente direto na (re)constituição da IPD, ao mesmo tempo em que esses conhecimentos são assimilados pelos docentes através de suas identidades.

Dito de outra forma, ao aprender a profissão, apropriando-se de conhecimentos característicos, o sujeito passa pelo processo de mobilização da identidade, realocando-se enquanto sujeito profissional, localizado numa classe social de características e saberes próprios. Esse movimento, todavia, é processado a partir da identidade que o professor já possui; ou seja, a maneira como ele incorpora os conhecimentos (os traços) da profissão, constituindo-se enquanto professor, está intimamente ligada à sua identidade relativamente já estabilizada. Nesse sentido,

> O desenvolvimento profissional do professor processa-se em dois campos, estreitamente relacionados. Por um lado, envolve o crescimento do conhecimento e competência profissionais, habilitando-o tanto a desenvolver as atividades de rotina como a resolver os problemas complexos que lhe surgem numa variedade de domínios. Por outro lado, refere-se à formação e afirmação da identidade profissional que constitui uma parte especialmente importante da identidade social do professor (Ponte & Oliveira, 2002, p. 147).

Compreendendo, sob essa ótica, a estreita relação entre identidade e desenvolvimento profissional (Melo, Silva, & Falcão, 2021), “podemos ver o conhecimento profissional como um suporte para o desenvolvimento do professor (ele o possibilita) e como um produto desse desenvolvimento (enriquecimento do conhecimento profissional)” (Carrillo et al., 2014, p. 42). Vê-se também que tal aspecto já é mencionado – embora não explorado em profundidade – no próprio marco teórico do MTSK (Carrilo et al., 2014), a partir da compreensão dos autores de que a subjetividade docente, e, portanto, sua IPD, e os conhecimentos profissionais são elementos imbricados na constituição do professor (embora a obra não mencione propriamente o conceito de identidade profissional).

Esse cenário aponta para um processo retroalimentativo, no qual o conhecimento profissional especializado do professor de Matemática é assimilado por sua identidade docente, enquanto que essa IPD é elaborada, dentre outros fatores, pelo conhecimento profissional. Esse movimento intermitente tem como elemento comum as crenças dos professores, presentes tanto no modelo do MTSK como nas mais diversas concepções de IPD (especialmente na definição proposta por Cyrino (2017), nossa principal referência sobre a identidade profissional em Matemática). A Figura 1 ilustra esse esquema:

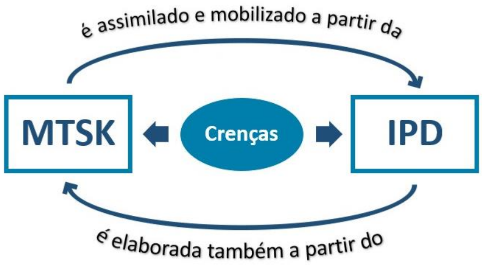


Figura1. Relação entre o MTSK e a IPD

Tal conjunto de crenças é o elemento mais representativo dos aspectos subjetivos presentes na constituição e na prática docente. São noções que o indivíduo carrega sobre o professor, o ensino, a Educação, a Matemática, etc., pré-estabelecidas, e, muitas vezes, cristalizadas, sem um processo guiado de reflexão intencional, que reverberam em sua carreira profissional. Muitas dessas crenças surgem ainda nos anos de escolarização e permanecem irrefletidas ao longo de toda formação, reverberando na ação docente.

Essa evidência aponta um caminho a ser trilhado pelos pesquisadores afeitos à temática da constituição profissional do professor em questão. Caminho que sugere uma visão ampliada de formação docente em Matemática, pois esta “[...] será tanto mais importante para a carreira do futuro professor quanto mais próximo ela estiver da construção identitária desse sujeito” (D’Ávila, 2007, p. 237). Para tanto, se faz “necessário estudar o saber relacionando-o com os elementos constitutivos da identidade do professor e, consequentemente, do trabalho docente” (Santos & Rodrigues, 2010, p. 21).

A visão ampliada de formação docente em Matemática que mencionamos diz respeito à compreensão de que formar um professor não é apenas desenvolver (muito menos atribuir-lhe) conhecimentos e competência afeitas ao ensino, mas também mobilizar no indivíduo características próprias da profissão, a partir da revisão de suas crenças e percepções acerca da docência, o que implica diretamente agir sobre sua identidade profissional. Os cursos de formação, sobretudo as licenciaturas, devem considerar, assim, ambos os aspectos – *saber fazer* e *saber ser* –, entendendo que a ação do docente está em muito relacionada a quem ele é como professor. Nas palavras de Cyrino (2017),

> O professor que cada um é, ou que irá se tornar, não depende simplesmente dos conhecimentos matemáticos e didáticos, trabalhados nos processos de formação. O movimento de construção/desenvolvimento da IP de PEM implica em uma transformação pessoal, e se dá a partir da sua biografia, das suas crenças e concepções, das várias experiências formativas, da sua atuação profissional (p. 702).

Urge, portanto, que nos apropriemos e ampliemos esse espaço de discussão de uma formação cada vez mais qualificada, que possua uma noção especializada do conhecimento do professor e perceba a importância de considerar aspectos identitários nesse processo. Compreendendo, assim, haver atingido o objetivo proposto neste ensaio teórico, mesmo que ainda estejamos delineando esse campo de pesquisa que carece de profundas reflexões e estudos, seguimos à algumas considerações derradeiras.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa intenção com esta pesquisa foi colocar-nos diante de um complexo e ainda pouco explorado campo de pesquisa, que combina os esforços mais recentes na caracterização do conhecimento (especializado) dos professores de Matemática e de suas identidades profissionais. As tendências das investigações aqui apontadas convergem à compreensão de que há uma interrelação entre o MTSK e a IPD, mediada, sobretudo, pela subjetividade do professor.

O elemento-chave da análise dessa aproximação, em nosso entendimento, é a noção de crenças, presente no modelo MTSK e na concepção de IPD adotada por pesquisadores da Educação Matemática. A recorrência dessa componente de subjetividade indica que a formação do professor deve considerar a dimensão do *saber ser* tanto quanto a dimensão do *saber fazer*. A ação docente está, afinal, pautada nas decisões do professor, condicionadas, por sua vez, ao que conhece e a como se percebe enquanto profissional.

Cumpre apontar, ainda, que essa aproximação entre os conceitos, que inicialmente aparentavam estar em polos opostos da compreensão de docência em Matemática, só foi possível pelos esforços de pesquisadores em caracterizar a IPD e, mais especialmente, em reconhecer aspectos da pessoalidade do professor presentes em seu conhecimento profissional. Cabe, portanto, àqueles interessados em contribuir com as discussões nesse âmbito compreender mais profundamente as relações entre as crenças, os conhecimentos e a identidade do professor de Matemática, indicando elementos desse processo.

Por fim, concluímos ressaltando a necessidade de desenvolver mais estudos sobre a interrelação entre o MTSK e a IPD, a fim de propiciar e potencializar uma visão ampliada de docência e formação docente em Matemática. O caminho percorrido pela Educação Matemática, sobretudo pelo ramo que se dedica à formação do professor, é um indicativo de que, mesmo com entraves e resistências, temos nos distanciados de uma visão utilitarista e pragmática de formação, rumo à compreensão de que formar professores requer considerar-lhes pessoas em processos profissionalizantes, com identidades e conhecimentos próprios.

Referências

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407. Recuperado de https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., Montes, M. Á., Escudero, D., & Medrano, E. F. (2014). *Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. In *Proceedings of the Congress of the european society for research in mathematics education* (pp. 2985-2994). Antalya: ERME.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., . . . Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. Recuperado de https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Cyrino, M. C. C. T. (2016). Mathematics teachers' professional identity development in communities of practice: reifications of proportional reasoning teaching. *Bolema*, 30(54), 165-187. Recuperado de http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a08

Cyrino, M. C. C. T. (2017). Identidade Profissional de (futuros) Professores que Ensinam Matemática. *Perspectivas da Educação Matemática*, 10, 699-712. Recuperado de https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/5518/4136

D'Ávila, C. M. (2007). Universidade e formação de professores: qual o peso da formação inicial sobre a construção da identidade profissional docente? In A. D. Nascimento & T. M. Hetkowski (Orgs.). *Memórias e formação de professores* (pp. 219-240). Salvador: EDUFBA.

De Paula, E. F., & Cyrino, M. C. C. T. (2018). Perspectivas de identidade profissional de professores que ensinam matemática presentes em dissertações e teses brasileiras. In M. C.C. T. Cyrino (Ed.). *Temáticas emergentes de pesquisas sobre a formação de professores que ensinam matemática:* desafios e perspectivas (pp. 126-154). Brasília: SBEM, GT7.

De Paula, E. F., & Cyrino, M. C. C. T. (2020). *Identidade profissional de professores que ensinam Matemática em contextos de formação.* São Paulo: Pimenta Cultural.

Dubar, C. (2005). *A Socialização:* construção das identidades sociais e profissionais. São Paulo: Martins Fontes.

Melo, C. I. B. de (2021). *Constituição da identidade profissional de professores de Matemática sob a ótica dos formadores* (Dissertação de Mestrado em Educação), Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza.

Melo, C. I. B. de, Silva, S. P., & Falcão, G. M. B. (2021). Identidade e desenvolvimento profissional docente: dinâmica e implicações. *Revista Cocar, 15*(32), 1-21. Recuperado de https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/4146

Moriel Junior, J. G., & Wielewski, G. D. (2017). Base de conhecimento de professores de matemática: do genérico ao especializado. *Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas*, 18(2), 126-133. Recuperado de https://doi.org/10.17921/2447-8733.2017v18n2p126-133

Nóvoa, A. (Org.) (1992). *Os professores e sua formação*. Lisboa. Publicações Dom Quixote.

Pimenta, S. G. (1999). Formação de professores: identidade e saberes da docência. In S. G. Pimenta (Org.). *Saberes pedagógicos e atividade docente* (pp. 15-34). São Paulo: Cortez Ed.

Ponte, J. P. da, & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: a construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação*, 11(2), 145-163. Recuperado de https://repositorio.ul.pt/handle/10451/3167

Santos, S. P., & Rodrigues, F. F. S. (2010). Formações identitárias e saberes docentes: alguns apontamentos para pensar a formação docente do ensino superior. *Cadernos da FUNCAMP*, 10(12), 18-26. Recuperado http://fucamp.edu.br/editora/index.php/cadernos/article/view/140

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4-14. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/1175860

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR NO TÓPICO DE MEDIDAS DE COMPRIMENTO: UMA DISCUSSÃO TEÓRICA

Mathematics teachers specialized knowledge in the scope of length measurement: a theoretical discussion

Belo, P. [a]; Ribeiro, M. [b]

[a] Universidade Estadual de Campinas; [b] Universidade Estadual de Campinas

Temática: 1 – MTSK na formação docente

Resumo. A temática de medidas é considerada como sendo de extrema relevância social, pois contribui para o entendimento do mundo físico e se relaciona com outras áreas do conhecimento, tal como Geografia e Ciências. Além disso, sua compreensão favorece a aprendizagem em áreas da matemática, como a Aritmética e no tópico de proporção. Para melhorar a formação e a prática do professor no âmbito da medida de comprimento, faz-se necessário entender que conhecimento é esse que nos cumpre enquanto professores de modo que a formação se possa focar no seu desenvolvimento. Neste trabalho apresenta-se uma discussão teórica sobre o conhecimento especializado do professor no tópico de medida de comprimento.

Palavras-chave. Matemática, Ensino, Medida de comprimento, Conhecimento Especializado.

Abstract. The theme of measures is considered to be of extreme social relevance, as it contributes to the understanding of the physical world and is related to other areas of knowledge, such as Geography and Science. In addition, its understanding supports the learning of other mathematical subjects, such as arithmetic and proportion. To improve training and teaching practice in the scope of measuring length, it is necessary to understand what is this knowledge that is attributed to teachers, so that training can be focused on its development. This paper presents a theoretical discussion about the specialized knowledge of the teacher in the topic of length measurement.

Keywords. Mathematics, Teaching, Length Measurement, Specialized Knowledge.

INTRODUÇÃO

Situações que envolvem medidas ocorrem constantemente no cotidiano do ser humano, como a organização e montagem de móveis dentro do espaço de um cômodo, o recorte de um tecido com o comprimento requerido para produção de um vestido e a capacidade de um recipiente. Este é um dos temas da Matemática que possui extrema relevância social, pois favorece a compreensão do mundo físico e se relaciona com outras áreas de conhecimento, como a Geografia e as Ciências (e.g., Policastro, Almeida, & Ribeiro, 2017). Além disso, os aspectos relacionados ao tema de medidas são fundamentais para a compreensão de outras áreas da Matemática, tal como proporção, Aritmética, e relações entre variáveis (Sarama & Clements, 2009).

Dada a sua importância, os conteúdos de medidas perpassam no currículo escolar em todos os níveis de ensino (e.g., Brasil, 2018; NCTM, 2010), porém a temática é problemática tanto para alunos quanto para professores (Silva, 2011; Bertolino, 2017). Os alunos revelam dificuldades em relação à medição por não entender a lógica das atividades de medidas abordadas na escola, a relação entre os instrumentos de medição,

Belo, P., & Ribeiro, M. (2021). Conhecimento especializado do professor no tópico de medidas de comprimento: uma discussão teórica. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 28–35). Congresseme.

às unidades de medidas e os diferentes contextos (Kamii, 2006; Sarama & Clements, 2009). Também os professores (pelo menos) dos Anos Iniciais[1] revelam dificuldades em compreender os conceitos relacionados a essa temática e sentem-se despreparados para desenvolver uma prática que faça associações aos diversos contextos para além da escola (D'ambrosio, 2005; Madarino, 2006). Assim, considerando que o conhecimento do professor é um dos fatores que mais impacta os resultados dos alunos (e.g., Hill, et al., 2005), o conhecimento limitado e fragmentado vai trazer limitações nas aprendizagens matemáticas (Rockoff, et al., 2011).

Por isso, a necessidade de que o professor detenha um conhecimento matemático especial que sustente a sua prática, contribuindo para o entendimento dos alunos. Este conhecimento essencial é entendido como especializado e auxilia na compreensão dos tópicos matemáticos e na ciência do que cada aluno sabe, a forma como sabe, e o que precisa aprender nos determinados níveis de ensino (Ribeiro, et al., 2017). Esta especificidade é assumida aqui na perspectiva do *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* – MTSK[2] (Carrillo, et al., 2018).

Entender a medida de comprimento envolve a compreensão de vários conceitos interligados, mas também o conhecimento de que esse atributo envolve distâncias fixas (Clements & Sarama, 2009). O comprimento é o ponto de entrada para o trabalho com medidas na escola por ser visualmente saliente, fisicamente tangível e experiencialmente real, acessível através de diversos objetos do cotidiano, e um componente fundamental para o entendimento de outras medidas (Smith & Barrett, 2017). Todavia, no que diz respeito a pesquisas e estudos sobre o assunto, com foco principalmente na perspectiva do conhecimento do professor, estes ainda são escassos (Smith & Barrett, 2017). Desse modo, neste trabalho que é parte de uma pesquisa mais ampla vinculada ao Grupo de Pesquisa e Formação CIEspMat[3], efetuamos aqui uma discussão teórica sobre o MTSK no âmbito do tópico de medida de comprimento.

MEDIDA DE COMPRIMENTO

O processo de medição é entendido como uma atribuição de valor numérico a quantidades contínuas, cuja relação associa-se à capacidade de realizar estimativas para aproximação da ordem da grandeza a ser medida com aquilo que se mede (Clements & Stephan, 2004). De acordo com Ribeiro et al. (2017), perceber e entender a medida com suas múltiplas formas de fazer corresponde ao conhecimento do sentido de medição. No entanto, a compreensão deste sentido implica em um processo complexo integrando a percepção e a comparação de quantidades mensuráveis e o uso de estratégias de estimativas e técnicas de medição que precisam ser inseridas de modo significativo no contexto de aprendizagem dos alunos (Di Bernardo et al., 2018).

O comprimento é entendido como a característica de um objeto que pode ser encontrada a partir da quantificação da distância entre suas extremidades, ou seja, a distância entre os pontos inicial e final (Stephan & Clements, 2003). Trata-se de uma grandeza linear e

[1] No Brasil, Anos Iniciais correspondem aos primeiros 5 anos de escolaridade – alunos de 6 a 10 anos.

[2] Optamos por utilizar a nomenclatura em inglês por ser esta uma conceitualização já reconhecida internacionalmente e por poder a tradução acarretar a dessignificação que se encontra associada à cada uma das dimensões da conceitualização.

[3] O CIEspMat é um grupo de formação e investigação que assume a centralidade das especificidades do conhecimento de professores de matemática – Conhecimento Interpretativo e Especializado. www.ciespmat.com.br

unidimensional, que é fundamental para o entendimento de outras grandezas, tal como área e volume.

O entendimento do processo de medição, no tópico de comprimento, envolve conhecer e aplicar corretamente seis princípios (Clements & Stephan, 2004): partição de objetos; unidade de iteração; transitividade; conservação; acumulação de distância, e relação com o valor numérico. A partição está relacionada com a atividade mental de subdividir o comprimento de um objeto em unidades iguais. A iteração é a atividade física de posicionar repetidamente a unidade de medida ao longo do objeto sem deixar lacunas e sem sobreposição. A transitividade envolve a comparação de dois objetos recorrendo a um terceiro. A conservação diz respeito ao fato de que a medida de um objeto não se altera com o movimento. A acumulação de distância associa-se à compreensão do comprimento total de um objeto como sendo resultado de quantas vezes uma unidade foi iterada nele. E a relação com o valor numérico diz respeito à determinação de um número para a medida realizada.

A comparação (direta ou indireta) do comprimento é essencial para o desenvolvimento das noções de conservação, transitividade, iteração de unidade e acumulação de distância (Kamii & Clark, 1997). Contudo, essa atividade é pouco explorada nas práticas de ensino ou, quando está presente, tende a focar apenas nos procedimentos de medição, sem dar importância à atividade mental envolvida e sem que se lhe atribua significado conceitual (Kamii, 2006).

A compreensão do processo de medição progride com o tempo e a partir de situações que explorem os aspectos relacionados a essa temática. Dessa forma, a trajetória de aprendizagem dos alunos quanto ao comprimento começa tipicamente com a comparação direta e o reconhecimento do comprimento como atributo de um objeto, desenvolve-se progressivamente para a compreensão do que é uma unidade e, eventualmente, internalizam-se as ações mentais, que não requerem ferramentas físicas para realizar a medição (Smith & Barrett, 2017).

Tradicionalmente, o ensino de medidas de comprimento tem-se focado nas habilidades para usar a régua como instrumento convencional (Clements & Sarama, 2009). Todavia, o professor deveria conhecer várias formas de efetuar a medição relacionando os conceitos envolvidos nesse processo e, principalmente, ter a ciência dos porquês de utilizar as diferentes possibilidades, além disso, deveria associar uma mesma unidade de medida para medir o todo de uma grandeza, considerando também a existência de diferentes unidades para medir – incluindo as unidades não-convencionais (Ribeiro et al., 2017).

Isto posto, é importante salientar que o processo de medição de uma distância implica na escolha da unidade de medida e na percepção de quantas unidades cabem de uma extremidade a outra (Ribeiro et al., 2017). Compreender a unidade de medida e os instrumentos de medida associados, sejam convencionais ou não, necessários para a realização da medição, são elementos importantes à aprendizagem da medida. Nesse sentido, duas ideias principais estão associadas à ação de medir: a relação inversa entre o comprimento da unidade usada e o número de unidades empregadas (quanto maior o todo a ser medido, menor será a quantidade de unidades de medida utilizadas e vice-versa), bem como a necessidade de usar a mesma unidade de medida ao longo de todo o comprimento medido (Clements & Stephan, 2004).

Embora as crianças com idade entre 6 e 10 anos consigam usar a régua e determinar o valor numérico corretamente, são poucas as que compreendem o significado do centímetro (unidade de medida) indicado nessa ferramenta, ou seja, a tendência está na consideração da marca na régua e no número ilustrado, e não no espaço entre um ponto e outro ao longo do comprimento (e.g., Lehrer, 2003; Mcdonough & Sullivan, 2011). Ademais, as crianças não veem problema em utilizar unidades variadas em uma mesma medição, e não percebem a necessidade de uma padronização da unidade, pois supõem que o importante é cobrir todo o comprimento do objeto de alguma forma (Clements & Sarama, 2009). O procedimento de iteração, o reconhecimento da necessidade de unidades idênticas, o entendimento sobre a relação inversa entre a magnitude da unidade e o resultado da medida de comprimento e a compreensão da partição de unidade são ideias fundamentais para a construção do entendimento sobre unidade (Lehrer, 2003).

Assim, o professor precisa superar as suas próprias dificuldades (Ribeiro et al., 2017) para compreender o processo de medição como uma combinação complexa entre conceitos e habilidades que se desenvolvem progressivamente e, principalmente, entender os conceitos fundamentais associados à medição para que se perceba a forma de raciocínio das crianças no decorrer das atividades a fim de fazer perguntas que irão conduzi-las para a construção do sentido de medição (Clements & Sarama, 2009). O desenvolvimento do conhecimento matemático do professor, assumindo a importância do entendimento sobre os conceitos envolvidos na medição de comprimento, potencializará a tomada de decisões didático-pedagógicas, bem como favorecerá à criação de oportunidades de aprendizagens (Di Bernardo, et al., 2018).

Desse modo, é necessário refletir sobre a forma que os temas e tópicos matemáticos são abordados em sala de aula, considerando o conhecimento específico do professor tanto em relação aos conteúdos matemáticos quanto ao conhecimento didático. Por isso, é necessário ter um conhecimento consolidado sobre os conceitos, técnicas e processos matemáticos que perpassam os níveis escolares. “Necessita ter uma boa noção do que são as grandes ideias da Matemática e qual o seu papel no mundo de hoje” para que professor se sinta confortável com a matemática que ensina (Serrazina, 2002, p. 5).

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR NO TÓPICO DE MEDIDA DE COMPRIMENTO

A conceitualização do *Mathematics Teachers Specialized Knowledge* – MTSK (Carrillo et al., 2018) surge da necessidade de aprofundamento em relação ao conhecimento essencial para ensinar Matemática, consequentemente oportunizando a criação de um modelo que permitisse descrever e compreender as suas dimensões desse conhecimento e suscitar discussões e reflexões que ultrapassem os aspectos descritivos e/ou avaliativos, para assim poder fazer recomendações efetivas para a formações e desenvolvimento profissional dos professores dessa área (Carrillo et al., 2018).

O ponto de partida do MTSK está no reconhecimento de que os professores, para ensinar Matemática, necessitam de um conhecimento específico que possa dar suporte ao desenvolvimento de sua prática de modo geral (planejamento de aula, discussões e explicações em sala e nos momentos extraclasse). Esta especificidade, portanto, está associada ao ensino de Matemática, incluindo, concomitantemente, os aspectos do conhecimento matemático e do conhecimento pedagógico em relação aos tópicos matemáticos. Logo, inclui “os significados, as propriedades e definições de tópicos específicos, os meios de construir a compreensão do assunto, as conexões entre os itens do conteúdo, o conhecimento do ensino da matemática e as características associadas à aprendizagem da matemática, entre outros” (Carrillo et al., 2018, p. 236–253).

O MTSK está organizado em dois domínios e seis subdomínios, localizando dentro destes os elementos específicos do conhecimento do professor para o desenvolvimento de sua prática profissional. Esse conhecimento especializado do professor refere-se tanto à dimensão do *Mathematical Knowledge* (MK) quanto ao *Pedagogical Content Knowledge* (PCK). Em cada um desses domínios, consideram-se três subdomínios – vide Figura 1.

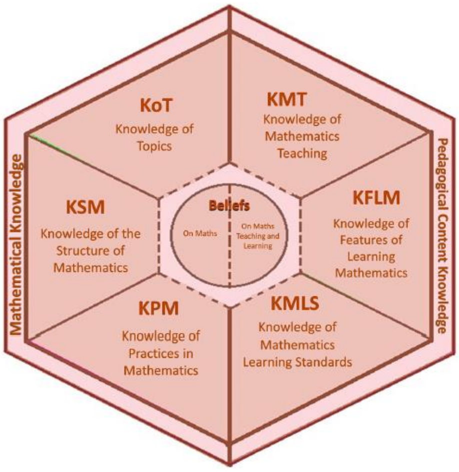


Figura 1. Modelo MTSK

No *Knowledge of Topics* – KoT, inclui-se o conhecimento do professor relativo ao domínio do conteúdo matemático em si mesmo, integrando um aprofundamento dos conceitos e estruturando suas respetivas definições, propriedades, fundamentos, procedimentos, classificações, diferentes representações, exemplos variados, significados e demonstrações. No âmbito da medida de comprimento, incluem-se, por exemplo, conhecer que a comparação de objetos é uma atividade fundamental para a compreensão da transitividade (Kamii & Clark, 1997) e conhecer que a iteração pode ser representada a partir da repetição de uma unidade de medida – convencional ou não – ao longo de um objeto a ser medido, sem deixar espaços e sem haver sobreposição (Clements & Stephan, 2004).

O *Knowledge of Structure of Mathematics* – KSM está relacionado à ciência das conexões entre os diferentes conceitos matemáticos, considerando, assim, as relações feitas entre os elementos nos momentos concretos de ensino com os alunos. Sobre medida de comprimento, incluem-se, por exemplo, conhecer que o sentido de divisão está implícito no entendimento da medição de comprimento quando existe o raciocínio de quantas unidades cabem (iteração) ao longo do objeto a ser medido (Policastro et al., 2017) e conhecer que a proporcionalidade está imbricada no processo de medição durante a iteração, visto que quanto menor for a unidade mais iterações serão necessárias para cobrir o todo do comprimento (NCTM, 2010).

O *Knowledge of Practices in Mathematics* – KPM refere-se ao conhecimento sintático do fazer matemático e envolve a demonstração, definição, utilização de símbolos e linguagem formal, argumentação, justificação, validação, dedução e indução, exemplos e contraexemplos, como também a compreensão quanto à lógica que sustenta cada uma dessas práticas, ou seja, trata-se de um conhecimento dos modos de produção e funcionamento matemático. Na temática de medida de comprimento, temos como exemplos conhecer que a escolha de uma mesma unidade é importante porque essa padronização influencia no valor atribuído para o comprimento medido, acarretando uma precisão (Lehrer, 2003) e conhecer que o princípio da transitividade pode ser demonstrado matematicamente da seguinte forma: se A > B e B > C, então A > C (Stephan & Clements, 2003).

O *Knowledge of Mathematics Teaching* – KMT associa-se ao conhecimento sobre as características dos tópicos matemáticos, as distintas possibilidades de ensinar e os recursos didáticos. Forma parte deste subdomínio um conhecimento das características matemáticas específicas desses recursos para então poder decidir se seria mais ou menos adequado utilizá-lo na sua prática matemática. Como exemplos relacionados ao tópico de medida de comprimento, destacam-se: conhecer que a comparação direta de objetos, tal como os brinquedos, é uma estratégia potente para iniciar o trabalho de medição de comprimento com crianças em idade pré-escolar, visto que incentiva à percepção das características desses objetos e promove verbalização das noções como mais alto e mais baixo, maior e menor, mais longo e mais curto (Lorenzato, 2008) e conhecer que a régua e a fita métrica, instrumentos que ilustram as unidades convencionais do comprimento metro e centímetro, bem como os palitos e clipes de papel, instrumentos para medição não-convencional podem ser utilizados como recursos potentes para abordar a medida de comprimento (Kamii, 2006).

O *Knowledge of Features of Learning Mathematics* – KFLM foca nas características de aprendizagem que são evidenciadas nas interações dos alunos com os tópicos matemáticos. Este é um conhecimento do professor sobre a forma como o aluno constrói o conhecimento e tem como fonte de conhecimento as vivências dos professores e as teorias das pesquisas em Educação Matemática. Como exemplos dentro do tópico de medida de comprimento, temos: conhecer que a criança pequena (por volta dos 3 anos) inicialmente compara os atributos de dois objetos diretamente para só depois conseguir realizar a comparação indireta, percebendo e realizando a transitividade (Kamii & Clark, 1997) e conhecer que a criança com idade entre 6 e 10 anos tem dificuldades em compreender que a unidade de medida na régua ou fita métrica representa o espaço entre um ponto e outro, portanto, relaciona-se com a distância, e não é apenas um número sem atribuição de significado (Lehrer, 2003).

O *Knowledge of Mathematics Learning Standarts* – KMLS está relacionado ao conhecimento dos conteúdos propostos nas normas curriculares para cada nível de ensino e os materiais e recursos para se trabalhar tais conteúdos. Sobre medida de comprimento, temos como exemplos: conhecer que o trabalho com medida de comprimento a partir de unidades convencionais e não-convencionais, também realizados com a utilização de diversos instrumentos de medição em diversos contextos diferentes, é esperado nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (Brasil, 2018) e conhecer que o ensino da medição de comprimento parte das noções de comparação entre as características dos objetos – Educação Infantil – para posteriormente o desenvolvimento de práticas que possibilitem a determinação de um valor numérico à medida de comprimento realizada no Ensino Fundamental (NCTM, 2010).

COMENTÁRIOS FINAIS

O conhecimento especializado do professor contempla uma gama de particularidades e especificidades que impactam na sua prática profissional, dando suporte para a elaboração e implementação de tarefas matemáticas com os alunos, favorecendo também o estabelecimento de estratégias para ensinar (Ribeiro et al., 2018). Os elementos constituintes desse conhecimento sustentam a prática docente, de modo que o professor compreenda a complexidade em torno dos conceitos e tópicos matemáticos, possua uma gama de estratégias de resolução e tipos de representações, também reconheça o que os alunos sabem, suas dificuldades e as situações que possam ser potencializadoras para a aprendizagem.

No âmbito da medida de comprimento, o conhecimento matemático do professor deve ser aprofundado e que ele assuma a importância do entendimento sobre os conceitos envolvidos na medição de comprimento para que esse processo não seja tratado apenas como aspectos procedimentais, mas sim como ideias matemáticas que possuem significado e que contribuem para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Neste trabalho, buscou-se apresentar uma discussão teórica sobre a medida de comprimento e o conhecimento especializado do professor no âmbito dessa medida. No âmbito do projeto de pesquisa que desenvolvemos, contribui para obter um mais amplo entendimento dessas especificidades do conhecimento matemático do professor por forma a conceitualizar as denominadas Tarefas para a Formação (Ribeiro, et al., 2021), que buscam aceder e desenvolver o Conhecimento Interpretativo (Jakobsen, Ribeiro & Mellone, 2014), que é considerado também um conhecimento especializado para a prática profissional do professor de Matemática.

Como questões de pesquisa que se encontram em aberto e que perseguimos, podemos elencar: que conhecimento interpretativo, no âmbito da medida de comprimento, revela professores dos Anos Iniciais ao discutir produções dos alunos no contexto de um curso de extensão que trata sobre o tema de medidas? Que dificuldades matemáticas apresentam os professores dos Anos Iniciais, participantes do curso de extensão, sobre o tópico de medida de comprimento durante a resolução de tarefas que visam a interpretação e construção de sentido para as produções dos alunos nesse tópico? Em que nível de conhecimento interpretativo se encontram os professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, participantes do curso de extensão, no tópico de medida de comprimento? De que maneira as discussões suscitadas no curso de extensão sobre o tópico de comprimento contribuem para a progressão do conhecimento interpretativo dos professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental?

Referências

Brasil. (2018). Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Base nacional comum curricular.* Brasília: DF.

Bertolino, J. (2017). Matemática significativa: sequência didática para aprendizagem de área e perímetro no ensino fundamental. *Revista Científica on-line - Tecnologia, Gestão e Humanismo*, 8(1).

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Rojas, N.; Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., e Muñoz-Catalán. M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), (pp. 236–253).

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). Early childhood mathematics learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 461–555). New York: Information Age Publishing.

Clements, D. H.; Stephan, M. (2004). Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. In: D. Clements, J. Sarama, & A.-M. DiBiase (Eds*.), Engaging young children in mathematics*: Standards for early childhood mathematics education. Mahwah, NJ: Erlbaum, pp. 299–317.

D'ambrosio, Ubiratan. (2005). Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Educação e Pesquisa*, São Paulo, 31(1), pp. 99-120, jan./abr.

Di Bernardo, R.; Policastro, M.; Almeida, A. R; Ribeiro, M.; Mamoré, J.; Aiub, M. (2018) Conhecimento matemático especializado de professores da educação infantil e anos iniciais: conexões em medidas. *Cadernos Cenpec*, v.8, pp. 98-124.

Hill, H. C.; Rowan, B.; Ball, D. (2005) Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal*, 42(2), pp. 371-406.

Jakobsen, A.; Ribeiro, M.; Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. Nordisk studies in mathematics education, v.19, pp. 135- 50.

Kamii, C. (2006). Measurement of length: How can we teach it better? Teaching Children Mathematics, 13 (3), pp. 154-158.

Kamii, C., & Clark, F. B. (1997). Measurement of length: The need for a better approach to teaching. *School Science and Mathematics*, 97(3), 116–121.

Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 179–192). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lorenzato, Sergio. (2008). Educação Infantil e percepção matemática. Campinas: Autores Associados. (Coleção Formação de Professores).

Mandarino, M. C. F. (2006) *Concepções de ensino de matemática elementar que emergem da prática docente*. 273p. Tese (Doutorado em Educação), PUC-Rio, Rio de Janeiro.

McDonough, A., & Sullivan, P. (2011). Learning to Measure Length in the First Three Years of School. *Australasian Journal of Early Childhood*, 36 (3), pp. 27-35.

National Council of Teachers of Mathematics. (2010). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Policastro, M. S.; Almeida, A. R.; Ribeiro, M. (2017) Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida de comprimento e sua estimativa. *Espaço Plural*, 18(36), jan./jul. p.123-154. ISSN 1981-478X

Ribeiro, M.; Badillo, E.; Sánchez-Matamoros, G.; Montes, M.; De Gamboa, G. (2017) Intertwining noticing and knowledge in video analysis of self-practice: the case of Carla. In: *Congress of the European Society for research in mathematics education*, 10. Dublin.

Rockoff, J.E.; Jacob, B.A.; Kane, T.J.; Staiger, D.O. (2011). Can you recognize an effective teacher when you recruit one? *Education finance and Policy*, 6(1), pp. 43-74.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York, NY: Routledge.

Serrazina M. L. (2002). *A formação para o ensino da Matemática: perspectivas futuras*. A formação para o ensino da matemática na educação pré-escolar e 1° ciclo da educação básica. (pp. 9-19).

Silva, C. C. R. (2011). *Construção de conceito de grandezas e medidas nos anos iniciais: comprimento, massa e capacidade*. 230 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, Brasília-DF.

Smith, J. P., & Barrett, J. E. (2017). Learning and teaching measurement: Coordinating quantity and number. *Compendium for research in mathematics education*, 355-385.

Stephan, M., & Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. In D. H. Clements (Ed.), *Learning and teaching measurement*: 65th yearbook (pp. 3–16). National Council of Teachers of Mathematics.

EL MTSK EN LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA EN SEGUNDO Y CUARTO GRADO DE PRIMARIA

The MTSK in the teaching of statistics in second and fourth grades of elementary school

Martínez Blancarte A. M. [a]; García Ulloa, L. A. [b]

[a, b] Benemérita Escuela Nacional de Maestros

Temática: 1 – MTSK en la formación docente

Resumen. La investigación de corte cualitativo sobre la enseñanza de la estadística tuvo por objetivo identificar y describir cómo se propone y se lleva a cabo la enseñanza de la lección 4, ¿Qué nos dicen los datos? del trayecto 10, Búsqueda de Información del bloque dos del libro de matemáticas de acuerdo al plan y programas de estudio (2018) y el tema de la moda en cuarto grado. Se llevó a cabo una revisión documental de las propuestas institucionales, los libros de texto y la observación de la práctica docente de una profesora en activo y de una en formación. Algunos resultados fueron: la tutora del grupo uso los mismos recursos señalados en el libro de texto para llevar a cabo la lección 4. Presentó dificultades para identificar el tamaño de la muestra en todos los ejercicios propuestos, lo que refleja una carencia el dominio del contenido matemático.

Palabras clave. MTSK, Enseñanza, Estadística, Primaria.

Abstract. The qualitative research on the teaching of statistics aimed to identify and describe how the teaching of lesson 4 is proposed and carried out, what do the data tell us? Of the course 10, Search for Information from block two of mathematics book according to the plan and study programs (2018) and the topic mode in fourth grade. A documentary review of the institutional proposal, the textbooks and the observation of the teaching practice of an active teacher and one in training was carried out. Some results were: the group tutor used the same resources indicated in the textbook to carry out lesson 4. She presented difficulties to identify the sample size in all the proposed exercises, which reflects a lack of mastery of the mathematical content.

Keywords. MTSK, Teaching, Statistics, Elementary school.

INTRODUCCIÓN

A la mayoría de los docentes se les dificulta la enseñanza de algunos contenidos matemáticos, así como la selección de recursos, las estrategias o las actividades para enseñarlo.

La enseñanza de la estadística en los planes y programas de estudio de 2011 de educación primaria se delega hasta los últimos cuatro años; sin embargo, recientemente se le incluyó en los Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Plan y programas de estudio para la educación básica (SEP, 2018). El tratamiento de la estadística se lleva a cabo a lo largo de los seis años, y el de la probabilidad se restringe su enseñanza sólo a los dos últimos grados (quinto y sexto grado).

En estos tiempos de pandemia la Secretaria de Educación Pública implementó el proyecto Aprende en Casa para continuar la educación de los niños de educación primaria. La investigación cualitativa se llevó a cabo en la enseñanza de la estadística en el segundo año de Educación Primaria ya que nuestro interés era identificar cómo el docente y las

Martínez Blancarte A. M., & García Ulloa, L. A. (2021). El MTSK en la enseñanza de la estadística en segundo y cuarto grado de primaria. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 36–43). Congresseme.

propuestas institucionales (SEP, 2011 y SEP, 2018) sugieren dicha enseñanza dadas las incorporaciones recientes de la estadística en los seis grados de primaria.

Fundamentos Teóricos. Enseñanza de la estadística

Hace más veinte años, los investigadores Mokros y Russell (1995) señalaron que se sabe poco sobre el desarrollo del pensamiento estadístico sin escolarización. Lo que quizás se deba a que la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística es relegada a los últimos bloques de los libros de texto, en el caso de primarias, o a los últimos semestres en el caso de la educación superior. Aksu (1990, citado en Gattuso, 2006) señaló que "la estadística se relega al final del año escolar, si es que no llega a ser completamente olvidada, porque el tiempo disponible es insuficiente" (p. 1).

Dada la formación de los estudiantes, y en nuestro caso, de los docentes de educación primaria, que son nuestros sujetos informantes, éstos presentan dificultades al enseñar la estadística pues genera en ellos "un sentimiento de inseguridad, debido no tanto a la falta de preparación en Estadística, sino también en su enseñanza" (Gattuso y Pannonne (2002), citado en Gattuso, 2006, p. 1).

Gattusso (2006) en su investigación de estadística y matemáticas, precisó que los docentes en activo y los futuros docentes debido a su formación "no son conscientes de la riqueza del contenido estadístico que tienen que enseñar" y "…no se sienten cómodos con el tema" (p. 1).

Burrill y Biehler (2013) señalaron que "los profesores carecen de una educación estadística y no tienen una preparación especial" (p.40) sobre cómo enseñar los temas estadísticos. Por lo anterior, es necesario que los formadores de formadores "se preparen profesionalmente como expertos en educación de adultos y en el diseño de cursos para la enseñanza de análisis de datos" (p. 41).

Batanero (2000) señaló que los docentes al enseñar temas estadísticos deben considerar las fuentes de aplicación de la asignatura en la vida diaria; por lo tanto, se requiere que el docente conozca y domine diferentes estrategias para su enseñanza y aprendizaje para erradicar los errores conceptuales y las dificultades al tratar temas estadísticos.

Por todo lo anterior, Råde (1986, citado en Steinbring, 1990) señaló que "la probabilidad y la estadística deberían ocupar un lugar bien determinado en el currículo escolar" (p. 209). En los planes y programas de educación primaria en 1993 y 2009, sí se trataba la estadística a lo largo de los seis años.

En la propuesta 2011 la enseñanza de la estadística se restringió a los últimos cuatro de educación primaria. Mientras que en la en la propuesta 2018, se ha recobrado en las propuestas institucionales vigentes a lo largo de los seis grados, sin embargo, hasta el momento sólo se cuenta con los libros de texto para primero y segundo grado.

También las escuelas normales tuvieron cambios en sus planes y programas desde 1984 hasta 2018, si bien, en todas las propuestas institucionales se destina todo un semestre para una asignatura que tiene relación con la enseñanza de la estadística, no siempre de le estudió debido a la temporalidad en la que se le tenía que impartir.

Conocimiento Matemático para Enseñar

El Conocimiento Matemático para Enseñar tuvo sus inicios en la propuesta de Shulman (1986), la cual consistía en considerar no solamente el conocimiento *per se* de la asignatura, sino también el aspecto pedagógico de la misma. La propuesta de Shulman identifica tres categorías: *Conocimiento de Contenido, Conocimiento Curricular* y el

Conocimiento de Contenido Pedagógico. Ball y Bass (2000) señalaron que existe una separación entre la asignatura a enseñar y su pedagogía lo que ocasiona una fragmentación en la formación de los docentes. Las investigaciones de Ball y Bass (2000, 2003), Ball, Thames & Phelps (2007) se fueron modificando hasta que Hill, Ball y Schilling (2008) propusieron una estructura del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (véase la Figura 1).

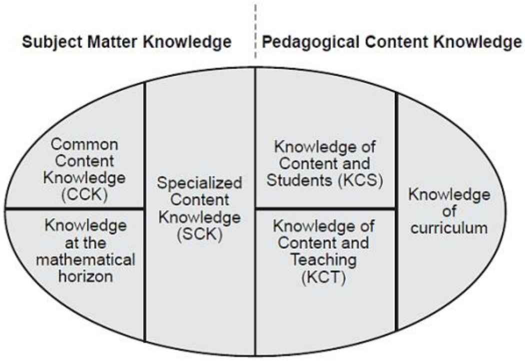


Figura 1. Mapa de dominio para el conocimiento matemático para la enseñanza (Hill, et al., p. 377)

Dos diferencias muy importantes de la propuesta de Shulman (1986) con esta de Hill, et al. (2008), es el cambio del nombre de categorías al de dominio, y que, en lugar de ser tres categorías, ahora, son dos dominios con tres subdominos cada uno. Cabe señalar que una dificultad de la segunda propuesta es que no delimita perfectamente una línea para diferenciar exactamente cada uno de los subdominos.

El Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (en adelante MTSK) considera como punto de partida, los dos grupos de conocimiento precisados por Hill, et al (2008); el conocimiento de la matemática y el conocimiento didáctico (véase la Figura 2). Cada uno de los dos dominios consideran tres subdominios (véase la Figura 2). Diferencia de la propuesta de Hill y colaboradores, el MTSK considera las creencias del profesor tanto de la matemática como asignatura y de su enseñanza. En este artículo, no nos referiremos a las creencias. El dominio Conocimiento de Contenido Matemático se subdivide en tres subdominios:

Conocimiento de los temas (KoT). Considera los conceptos con sus propiedades y argumentaciones que se señalan en el currículo, de acuerdo a cada país.

Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM). Los docentes en activo o en formación deben conocer los contenidos y procedimientos del grado que atiendan, más por lo menos, los del grado anterior y posterior como antecedente y consecuente de la formación de los niños. Así como la relación entre diferentes contenidos matemáticos entre sí y con los de otras asignaturas.

Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM). Este subdomino se refiere a la práctica matemática y no a la de enseñanza. Es decir, "las diferentes formas de demostrar, el significado de definición, axioma o teorema como elementos constituyentes de la matemática, o el conocimiento de la sintaxis matemática (Rojas, 2014, p. 61).

El Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático (PCK) está conformado por los siguientes tres subdominios:

Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT). Se precisan las formas de presentar y enseñar un contenido matemático; es decir, es la selección de recursos, actividades, ejemplos, entre otros, para enseñar un tema matemático en específico. Parker y Leinhardt (1995) señalaron que es un reto tanto para los investigadores como para los maestros es diseñar o seleccionar las representaciones para la enseñanza.

Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM). Requiere que el docente conozca las características del grupo con el que lleva a cabo la enseñanza de contenidos matemáticos, en específico, el modo de pensar, las necesidades, las dificultades que presentan los niños sobre un tema matemático en específico.

Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS). "Estipula que aprende un estudiante y el nivel de profundidad y manejo con el que se espera que lo aprenda en un determinado momento escolar, así como secuenciaciones del contenido" (Carrillo, Flores-Medrano, Contreras y Climent, 2015, p. 467).

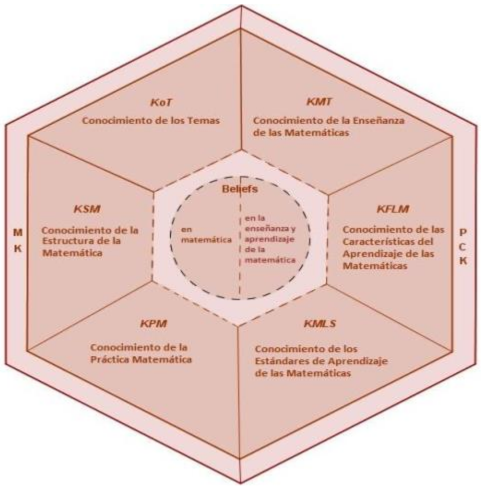


Figura 2. Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK

Metodología

La metodología usada en esta investigación fue la cualitativa de acuerdo con Flick (2007) quien señala que la información recabada a través de las prácticas de campo es definida como "entrevistas, observaciones" (p. 24). Realizamos la revisión documental de las propuestas institucionales de primaria y de la Licenciatura, una observación de clase de estadística realizada por la tutora del grupo 2°A sobre la lección ¿Qué nos dicen los datos? del Trayecto 10, *Búsqueda de información*, y la sesión de una docente en formación quién diseñó actividades para la enseñanza de la moda en 4° grado con el objetivo de conocer cómo proponen las propuestas institucionales vigentes la enseñanza de la estadística y cómo imparten una clase de estadística una docente en activo y una en formación para saber si consideran o modifican las sugerencias propuestas en el libro de texto. La observación cualitativa (Flick, 2007) es un proceso para recopilar datos o información sobre la situación que se investiga. A los sujetos informantes los denominamos como E1 (docente en activo) y E2 (docente en formación).

Resultados Obtenidos

En la revisión documental de las propuestas institucionales de la Licenciatura en Educación se encontró que todas han implementado un semestre para la enseñanza de la estadística (véase la Tabla 1). En las dos primeras propuestas (1984 y 1997) se consideraba la enseñanza en el segundo semestre, lo que nos haría suponer que los normalistas sí eran instruidos en la asignatura, e incluso, en la propuesta de 1997 se precisaba el nombre del Bloque IV, Tratamiento de la información, predicción y azar. Las últimas dos propuestas (2012 y 2017) dedican todo un semestre a la formación estadística, pero no se trata de manera completa dado que los normalistas deben asistir a las escuelas primarias a realizar sus prácticas docentes antes de recibir la enseñanza de todos los contenidos por lo que el KoT no es favorecido en un cien por ciento en la formación del futuro docente. En la revisión de la propuesta (2012) identificamos que las referencias bibliográficas que se sugieren enfatizan más el KSM y el KoT dejando de lado el KMT, el KFLM y el KMLS necesarios al momento de la práctica docente de los normalistas.

Tabla 1. Propuestas institucionales de Licenciatura en Educación Primaria

Plan y programas	*1984*	*1997*	*2012*	*2018*
Asignatura	2° Semestre Estadística	2° semestre Matemáticas y su enseñanza II	4° Semestre Procesamiento de Información Estadística	5° Semestre Probabilidad y estadística

No todas las propuestas institucionales de primaria favorecen la formación de los niños en temas estadísticos, en específico, la de 2011 restringe la enseñanza y el aprendizaje de dicha asignatura a partir del tercer grado. El eje de la propuesta 2009, Manejo de la Información comprendía el análisis y representación de la información, mientras que el mismo eje en la propuesta 2011 considera temas de proporcionalidad y funciones, y análisis y representación de datos. El eje Análisis de datos de la propuesta 2018, propone temas de estadística en los seis grados y de probabilidad sólo para quinto y sexto grado.

Tabla 2. Propuestas institucionales de Educación Primaria

Plan y programas	*1993*	*2009*	*2011*	*2018*
Ejes	Procesos de cambio Tratamiento de la información La predicción y el azar	Manejo de la Información	Manejo de la Información	Análisis de datos

Desde las propuestas institucionales que se han puesto en práctica en México, hay confusiones en considerar a la Estadística como asignatura (en las tres primeras propuestas) o como tema (en la última propuesta), lo anterior señala imprecisiones por parte de los responsables que elaboran los planes y programas, pues evidencian desconocimiento del Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM), de los temas (KoT) y de la Práctica Matemática (KPM).

Libro de texto de Segundo Grado de Primaria (SEP, 2018)

En segundo grado se señalan tres bloques, en los dos primeros se destina todo un trayecto para el análisis de datos y en el bloque tres sólo una lección del trayecto.

En el bloque I, se localiza el Trayecto 4, *Registro en tablas sencillas* y comprende cinco lecciones para escribir preguntas y realizar encuestas. En el bloque II, el Trayecto10, *Búsqueda de información* tiene cuatro lecciones, en específico la lección 3, ¿Qué hacemos con los datos? presenta información en un portador para complementar tablas y contestar preguntas. En el bloque III, el Trayecto 9, *Puesto de galletas* presenta cinco lecciones, pero sólo se destina la lección 4, Abren los puestos de galletas para el tratamiento de temas estadísticos, además de favorecer que los alumnos recaben datos y propongan cómo organizarlos, aunque el tema de la encuesta (tipos de galletas) es preestablecido con anterioridad.

Libro de texto de Cuarto Grado de Primaria (SEP, 2011)

Desde la propuesta de 2009 se incluyeron los libros de texto llamados Desafíos Matemáticos, los cuales se han seguido utilizando con las propuestas institucionales 2011 y 2018, los cambios que han sufrido se deben más al título y portada de libro o el cambio de algunas lecciones o actividades; sin embargo, mantienen la misma estructura por lo que no están acordes con los planes y programas. En 2018 aún no hay libros para los grados de tercero a sexto grado. En los libros para cuarto grado de acuerdo al plan y programas 2011 se encontraron dos lecciones que tratan la enseñanza y el aprendizaje de la moda: 105, ¡Pasteles, pasteles! y 106, Cuando la moda se acomoda que plantea tablas para que los niños contesten preguntas. El libro de texto no fue considero por la docente en formación para la enseñanza del tema.

Observaciones de prácticas docentes

E1 realizó sus actividades apegadas a las que señala el libro de texto. Planteó preguntas a los alumnos y registró las respuestas en tablas (véase la Figura 3) y, por último, resolvieron la lección 4, ¿Qué nos dicen los datos? (SEP, 2018b, véase la Figura 4).

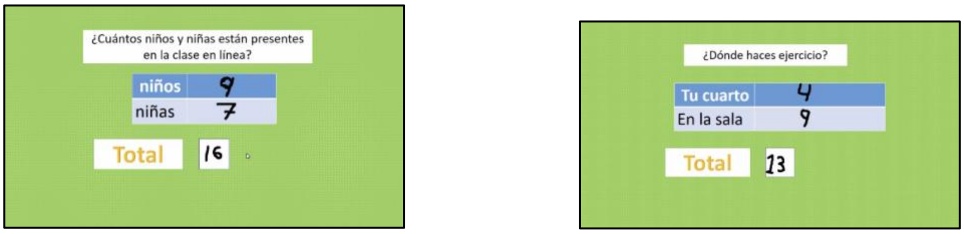


Figura 3. Preguntas y tablas propuestas por E1

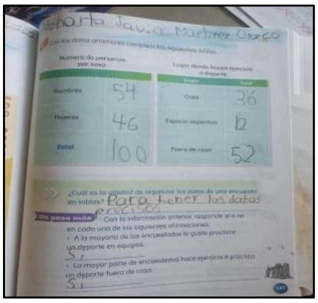


Figura 4. Constetación de la lección 4 del libro de texto por alumnos de segundo grado.

Como se observa en las dos primeras figuras, **E1** evidenció una dificultad en el KoT pues el tamaño de la muestra fue distinto en cada pregunta, a pesar de que el grupo estuvo conformado por 16 personas. Y el KMT se limitó a usar los mismos recursos (tablas preestablecidas) que el libro de texto. Para la enseñanza de la moda con alumnos de cuarto grado, **E2** seleccionó un vídeo de notas musicales https://vm.tiktok.com/ZMeGtbrhk/ el cual iban realizando con los alumnos pues consistía en ir dando golpes con un vaso sobre las notas musicales (véase la Figura 5). Al final realizó la pregunta ¿Qué figura musical se presenta más veces?, por último, al igual que **E1** hizo preguntas a los alumnos y fue concentrando las respuestas en tablas, ejemplo de preguntas fue: ¿qué genero de película te gusta? Se les presentaron las opciones, de terror, ficción, aventuras y otro.

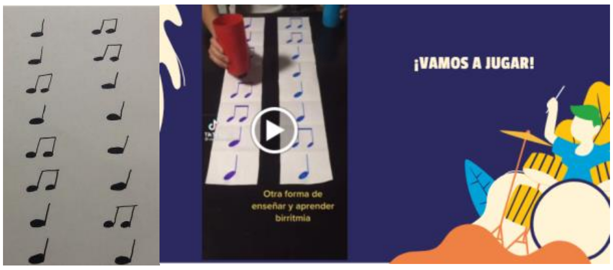


Figura 5. Actividad propuesta por E2 para el tratamiento de la moda

La primera actividad de **E2** da evidencia que consideró el KoT al identificar la nota con mayor frecuencia; el KMT al seleccionar un vídeo con un juego musical para enseñar la moda. Y el KFML al considerar el vídeo de TikTok, actividad en boga en redes sociales.

Conclusiones

Desafortunadamente, la enseñanza de la estadística se basa por lo general, en la complementación de tablas en los libros de texto sugeridos por las propuestas institucionales; lo anterior fue imitado por las docentes en activo y en formación coartando así la posibilidad de que los niños propongan cómo organizar la información recabada. De acuerdo con Garfield y Ben-Zvi (2008) se requiere que sean los alumnos quienes planteen las preguntas para que comprendan de dónde surgen y cómo se tratan los datos, lo anterior favorecería el KFLM.

La docente en activo mostró dificultades en el tratamiento del término muestra (KoT) al no considerar las abstenciones de los niños al realizar las preguntas y completar las tablas. Los docentes en activo y en formación fortalecen su Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) si no utilizan los libros de texto propuestos por la Secretaria de Educación Pública para llevar a cabo la enseñanza y el aprendizaje de la estadística al seleccionar otros recursos (vídeos de tiktok) para el tratamiento de los temas estadísticos.

Referencias

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51 (3), 241-247.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2007) *Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?* Manuscrito enviado para publicación.

Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? (Trabajo Académico), Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Burrill, G. & Biehler, R. (2013). Les idées statistiques fondamentales dans le curriculum scolaire. *Statistique et Enseignement*, 4(1), 5-24. Recuperado el 20 de octubre de 2016, de http://www.statistique-etenseignement.fr.

Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Contreras, L.C., & Climent, N. (2015). El profesor en el marco de los ETM: el papel del MTSK como modelo de conocimiento. En I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak, & P. Richard (Eds.), *Actas del ETM 4* (pp. 461-471). Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Flick, U. (2007). *El diseño de investigación cualitativa*, Ed. Morata, Madrid, España.

García, L. A. (2021). *Estrategias para la enseñanza de la estadística*. Tesis de Licenciatura en Educación Primaria. BENM. México.

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning. Conecting Research and Teaching Practice,* pp. 187-200. USA: Springer.

Gattuso, L. (2006). Statistics and mathematics: Is it possible to create fruitful links? In Rossman, A. & Chance, B. (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS7). International Association for Statistical Education (IASE): International Statistical Institute (ISI). Recuperado el 28 de mayo de 2015, de http://iase-web.org/documents/papers/ icots7/1C2_GATT.pdf.

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39 *(4)*, 372-400.

Martínez, A. M. (2021). *Comprensión de Ideas Fundamentales de Estocásticos de Docentes en Formación para la Educación Primaria. Tesis de doctorado en ciencias*. DME, Cinvestav IPN. México.

Parker, M. & Leinhardt, G. (1995). Percent: A Privileged Proportion. *Review of Educational Research*. Vol. 65, No.4, pp. 421-481

Pfannkuch, M. (2011). The Role of Context in Developing Informal Statistical Inferential Reasoning: A Classroom Study. *Mathematical Thinking and Learning*, 13:1-2, 27-46. Recuperado el 26 de noviembre de 2015, de http://dx.doi.org/10.1080/10986065.2011. 538302.

Rojas, N. (2014). *Caracterización del Conocimiento Especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. España.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*(1), 39-63.

SEP. (1993). *Planes y programas de estudio 1993*. Educación Básica. México.

SEP. (1997). *Plan de Estudios 1997*. Licenciatura en Educación Primaria. México.

SEP. (2009). *Planes y programas de estudio 2009*. Educación Básica. México.

SEP (2011). *Planes y programas de estudio 2011*. Educación Básica. México.

SEP (2012). *Planes y programas de la Licenciatura en Educación Primaria 2012.* México.

SEP (2017). Aprendizajes Clave para la Educación Integral. *Plan y programas de estudio para la Educación Básica.* México. pp.7-29. Recuperado el 7 de enero de 2018, de http://www.aprendizajesclave.sep.gob.mx/descargables/MATEMATICAS.pdf.

SEP (2018). *Matemáticas*, *Segundo grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2011). *Matemáticas*, *Cuarto grado* (Libro para el alumno). México.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Reserch*, 15 (2), 4-14.

Steinbring, H. (1990). The nature of stochastic knowledge and the traditional mathematics curriculum – Some experience with in-service training and developing materials. In A. Hawkins (Ed). *Training teachers to teach statistics. Proceeding of the International Statical Institute Round Table Conference* (pp.2-19). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of new Mathematical Knowledge in Classroom Interaction*. USA: Springer.

O MODELO TEÓRICO MTSK E SUA INFLUÊNCIA NA DOCÊNCIA DE UMA PROFESSORA DO ENSINO MÉDIO

The MTSK Theoretical Model and its Influence on the Teaching of a High School Teacher

Mauso, A. P. T. [a]; Wielewski, G. D. [b]

[a] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso, *Campus* Cuiabá;
[b] Universidade Federal de Mato Grosso, *Campus* Cuiabá (MT)

Temática: 1 – MTSK na formação docente

Resumo. O objetivo deste trabalho é apresentar reflexões a respeito das experiências iniciais de uma professora de matemática ao exercer a sua docência junto a discentes do Ensino Médio concomitantemente com a busca pela compreensão do modelo teórico MTSK - *Mathematical Teacher's Specialized*. O exercício da docência perpassa diversas experiências durante mais de vinte anos de profissão e, a busca por uma formação cada vez mais completa é incessante, e torna-se mais presente após a docência junto a professores em formação inicial.

Palavras-chave. Reflexões, Matemática, Prática docente, MTSK.

Abstract. The objective of this paper is to present reflections on the initial experiences of a mathematics teacher when teaching high school students concomitantly with the search for understanding the theoretical model MTSK - Mathematical Teacher's Specialized. The exercise of teaching goes through several experiences during more than twenty years of profession, and the search for an increasingly complete training is incessant and becomes more present after teaching with teachers in initial training.

Keywords. Reflections, Matemática, Teaching practice, MTSK.

O CONHECIMENTO MATEMÁTICO DO PROFESSOR

O conhecimento matemático do professor, seja em formação inicial ou continuada, pode ser tratado sob diferentes olhares metodológicos. Neste artigo, será retratado o modelo teórico MTSK - *Mathematical Teacher's Specialized Knowledge* para a compreensão e análise do conhecimento especializado do professor de Matemática quando este desenvolve as suas atividades.

Segundo Ávila (2015, p. 11, tradução nossa) vários são os elementos que compõem o conhecimento, definindo-o "como uma ampla rede de conceitos, imagens e habilidades inteligentes que possuem os seres humanos" a fim de resolver problemas, alcançar metas, realizar tarefas. Para Carrillo et al. (2014), o conhecimento está sujeito a uma permanente revisão, pois é um constructo que satisfaz o grupo no momento científico, social, cultural, profissional em que se encontra, de tal forma que se algum destes contextos variarem, a visão de conhecimento também pode ser revisada.

Carrillo et. al. (2014, p. 12) traz as crenças sendo compreendidas

> como verdades pessoais, sustentadas individual e/ou coletivamente, derivadas da experiência ou pensamento em si, com um certo componente afetivo e avaliativo, que podem ter diferentes graus de convicção, além de serem justificadas com base em argumentos que não seguem critérios que possam responder aos cânones evidentes, ou seja, eles não são falsificáveis.

Mauso, A. P. T., & Wielewski, G. D. (2021). O modelo teórico MTSK e sua influência na docência de uma professora do ensino médio. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 44–49). Congresseme.

Em relação às concepções, elas são "entendidas como estruturas mentais gerais, que possuem significados, conceitos, proposições, regras, imagens mentais etc." (Carrillo et al., 2014, p. 12, tradução nossa). Assim, a diferença entre crença e concepção remete aos sentimentos afetivos e emocionais despertados pela crença, frente a racionalização promovida pela concepção.

Os autores acreditam que as crenças podem ser pessoais, o que os levam a propor um tratamento integrado, evitando a diferenciação explícita entre crença e concepção, pois o foco é o conhecimento, sendo que as crenças e concepções o permeiam.

O conhecimento relacionado ao professor de Matemática

O conhecimento necessário para um professor ensinar Matemática não se constitui de forma linear tendo início na graduação em uma determinada licenciatura e, depois sendo aprimorado em uma pós-graduação, em cursos de formação continuada. O conhecimento que envolve o trabalho profissional do professor constitui-se durante toda a sua trajetória de vida. Ao cursar uma graduação de Licenciatura em Matemática, ese conhecimento constitui-se cientificamente, transformando-se ao longo do exercício profissional de sua docência.

Diversos modelos teóricos buscam contribuir para o processo de constituição do conhecimento necessário para o professor ensinar Matemática, seja na Educação Básica ou no Ensino Superior.

Segundo Moriel Junior e Wielewski (2017, p. 126) o modelo teórico desenvolvido por José Carrillo Yáñez e o seu grupo de pesquisa da Universidade de Huelva (Espanha) "é atualmente o modelo teórico que responde com maior profundidade, clareza e consistência interna a pergunta: qual é o conjunto de conhecimentos especializados, que deve ter um professor para ensinar matemática"?

Estando ciente de que o trabalho pedagógico não envolve intuição, mas, sim um "campo de ação com base em fundamentos filosófico-sociais, histórico-psicológicos e fundamentos de práticas específicas que demandam domínio de conhecimentos integrados a conhecimentos científicos e humanistas para a ação educacional voltada às novas gerações, em que linguagens, tecnologias e estruturas interpretativas constituem seu cerne" (Gatti et al., 2019, p. 19), o modelo teórico MTSK vem ao encontro dos anseios por uma melhor compreensão do como desenvolver o trabalho docente de tal forma que satisfaça às expectativas docentes em relação ao resultado de sua prática junto aos seus discentes, seja na Educação Básica ou Superior.

O modelo teórico MTSK

Os estudos desenvolvidos por Lee Shulman (1986) são considerados um marco importante relacionado a essa temática do conhecimento. O modelo criado por ele envolve categorias do conhecimento relacionado ao conteúdo, ao pedagógico do conteúdo e o curricular.

Outro modelo de grande importância foi desenvolvido por Ball et al. (2008) – *Conhecimento matemático para o ensino* (MKT – *Mathematical Knowledge for Teaching*), sendo considerado o precursor do modelo teórico tratado neste artigo.

Com o advento de diversas pesquisas direcionadas à compreensão do conhecimento do professor que ensina matemática, constatou-se a necessidade da ampliação do modelo de Ball *et al.* (2008), pois os subdomínios, o *conhecimento especializado de conteúdo* e o *conhecimento comum do conteúdo* não trazem claramente se o conhecimento que o professor utiliza durante um episódio de ensino se refere ao conhecimento especializado do conteúdo ou ao conhecimento típico.

Segundo Araujo (2018), José Carrillo juntamente com seu grupo de pesquisa da Universidade de Huelva, Espanha, propõe o modelo teórico *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* – MTSK, "tendo como base os dois modelos anteriores que visavam ao conhecimento geral do professor e específico do professor de/que ensina Matemática" (Araujo, 2018, p. 31).

O MTSK fundamenta-se no conceito estabelecido por Schoendeld (2010):

> [...] conhecimento de uma pessoa é entendido como um conjunto de informações e experiências que ela tem, podendo ser correto ou não, cuja intenção é de solucionar uma determinada situação, desempenhar uma tarefa, assim contemplando e alcançando um objetivo geral e específico do problema. (ARAUJO, 2018, p. 31).

O modelo MTSK possui dois domínios, o *Mathematical Knowledge* (MK) e o *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) e, em cada um deles, incluem-se três subdomínios, sendo permeados pelas **crenças** dos professores **sobre** a **matemática**, **seu ensino** e **aprendizagem**.

Para uma melhor compreensão, Carrillo et al. (2013) e Montes, Contreras e Carrillo (2013) trazem a visualização do modelo MTSK inserido em uma figura hexagonal, conforme pode ser observado abaixo.

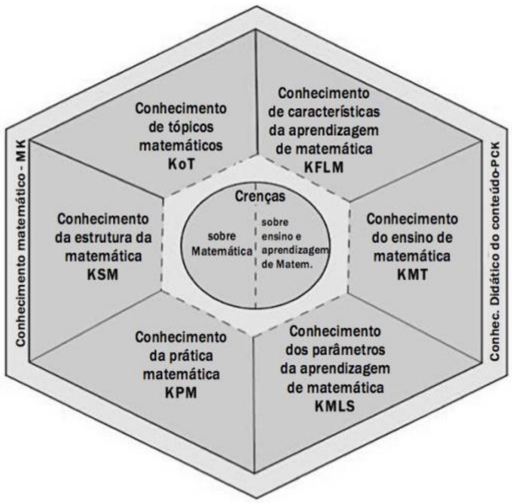


Figura 1. Original (Carrillo et al., 2013) traduzido (Moriel Junior e Wielewski, 2017).

Conhecendo o modelo MTSK e a prática docente

O primeiro contato com o modelo teórico MTSK fez emergir várias questões de ordem prática e, consequentemente, teóricas: quais contribuições esse modelo trará para os discentes que tenho contato, como desenvolvo o trabalho docente utilizando esse modelo, esse modelo pode ser utilizado para qualquer nível de ensino?

O primeiro passo foi organizar as informações iniciais de tal forma que contribuíssem com o (re)pensar durante todo o desenvolvimento docente. Assim, seguem dois quadros elaborados para melhor compreensão do modelo. As informações contidas nos quadros foram baseadas a partir de Moriel Junior e Wielewski (2017).

Tabela 1. Conhecimento Matemático.

Subdomínios do Conhecimento Matemático (MK) – se estende por toda a gama de conhecimento matemático.	
Conhecimento dos tópicos matemáticos (KoT) “[...] enfatiza que o subdomínio é definido em termos puramente matemáticos.” (p. 130)	“[...] conhecimento de aspectos fenomenológicos, significados de definições, de conceitos e de procedimentos matemáticos, juntamente com seus fundamentos teóricos correspondentes, bem como exemplos [...] que caracterizem aspectos do tópico abordado”. (p. 130)
	“Refere-se também ao conteúdo da disciplina de matemática contido em manuais e textos matemáticos”. (p. 130)
	“Inclui todo o conhecimento matemático desejável que um aluno saiba, em determinado nível, considerando uma concepção de matemática escolar, na qual os alunos também aprendem o ‘porquê’ de procedimentos e as razões para certos conceitos”. (p. 130)
	“Envolve também certo grau de formalismo”. (p. 130)
	“Este subdomínio focaliza o conhecimento de tópicos isoladamente, sendo que as conexões entre eles são contempladas” (p. 130) no subdomínio o conhecimento da estrutura da matemática.
Conhecimento da estrutura da matemática (KSM)	“[...] conhecimento das principais ideias e estruturas matemáticas” (p. 130).
	“Também envolve a ideia de complexidade crescente” implicando em “ver o conteúdo em perspectiva, a matemática básica a partir de um ponto de vista avançado, e matemática avançada do ponto de vista básico” (p. 130).
	Este subdomínio “incorpora uma parte do conhecimento do horizonte matemático do MKT [...], desconsidera elementos que não possuem a natureza do conhecimento (os valores e sensibilidades matemáticas fundamentais) e inclui uma outra parte (as maneiras de proceder em matemática” que será trabalhada no subdomínio KPM. (p. 130)
Conhecimento da prática matemática (KPM)	“[...] se refere às maneiras de proceder em matemática” (p. 130).
	“[...] conhecimento das formas de conhecer, criar ou produzir na área da Matemática (conhecimento sintático), aspectos da comunicação matemática, raciocínio e prova, saber como definir e usar definições, selecionar representações, argumentar, generalizar e explorar” (p. 130).
	“O conhecimento sobre as relações ou conexões entre os conceitos pertence ao (...) KSM”. (p. 130)

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Tabela 2. Conhecimento Didático do Conteúdo.

Subdomínios do Conhecimento Didático do Conteúdo (PCK)	
Conhecimento do ensino de matemática (KMT)	“[...] focaliza o conhecimento de como o ensino desta matéria pode ou deve ser realizado”. (p. 131)
	“Inclui reconhecer recursos que permitem ao professor escolher uma representação particular ou determinado material para aprendizagem de um conceito ou procedimento matemático”. (p. 131)
	“Trata-se da integração da matemática e do ensino”. (p. 131)

	Conhecimento de como "[...] abordar uma série estruturada de exemplos para ajudar os alunos a compreenderem o significado de um item de matemática". (p. 131)
Conhecimento das características de aprendizagem de matemática (KFLM) – preocupado com a forma como a matemática é aprendida.	"[...] entender como os alunos pensam, quando são envolvidos com atividades e tarefas matemáticas" (p. 131)
	"[...] as características desse processo de compreensão, erros comuns, dificuldades, obstáculos e a linguagem normalmente usada pelos estudantes, ao lidar com cada conceito". (p. 131)
	Esse movimento dos alunos é alimentado "pelo conhecimento geral do professor sobre o conteúdo e pela sua familiaridade com os alunos". (p. 131)
	O professor precisa saber quais as contribuições das teorias ou perspectivas de como os alunos aprendem matemática.
Conhecimento dos parâmetros de aprendizagem de matemática (KMLS)	"[...] se ocupa do conhecimento das diretrizes e de especificações curriculares". (p. 131)
	"[...] também é alimentado por resultados de pesquisas na área de Educação e Educação Matemática, incluindo relatos de vivências de professores experientes sobre a prática, além dos objetivos e medidas de desempenho desenvolvidos por organismos externos, como associações profissionais, pesquisadores e agências educacionais". (p. 131)

Fonte: Elaborado pelas autoras.

O modelo teórico MTSK tornou-se presente no desenvolvimento docente favorecendo o surgimento de vários questionamentos que até então ficavam sem direcionamento, a partir desse momento foram identificados e melhor compreendidos, e um pensar contínuo a respeito da prática docente se fez presente, principalmente na relação do que poderia ser realizado perante o exercício da docência junto a discentes do curso Técnico Nível Médio Integrado em Eventos e Técnico Nível Médio Integrado em Secretariado do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso (IFMT), *Campus* Cuiabá Cel. Octayde Jorge da Silva.

Uma das principais conclusões evidenciadas por esse movimento pela busca em conhecer melhor o modelo teórico MTSK foi a real necessidade em aprofundar os conhecimentos ligados ao ensino, e consequentemente a necessidade de ferramentas adequadas que auxiliem o professor.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo teórico MTSK pode ser compreendido como uma lente que "auxilia a identificar e interpretar dimensões de conhecimento do professor sobre o conteúdo matemático e o seu processo de ensino e aprendizagem" (ARAUJO, 2018, p. 118) e, a busca por melhor compreendê-lo fez com que a ideia trazida por Gatti et al. (2019, p.16) de que "[...] problematizar a partir de pontos de referência é fundamental para compreender e agir conscientemente" provocou uma melhor compreensão.

O movimento provocado pelo MTSK na minha prática docente corrobora com Nóvoa (s.a., p. 13):

> Não se trata de mobilizar a experiência apenas numa dimensão pedagógica, mas também num quadro conceptual de produção de saberes. Por isso, é importante a criação de redes de (auto)formação participada, que permitam compreender a globalidade do sujeito, assumindo a formação como um processo interactivo e dinâmico. A troca de experiências e a partilha de saberes consolidam espaços de formação mútua, nos quais cada professor é chamado a desempenhar, simultaneamente, o papel de formador e de formando.

Referências

Araujo, W. R. (2018). *Conhecimento especializado do professor de matemática sobre funções no contexto de uma experiência prévia de lesson study*. Dissertação de mestrado. Campinas, Brasil: Universidade Estadual de Campinas.

Ball, D. L., Thames, M. H. e Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of teacher education*, *59* (5), 389-407.

Carillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores, E., Escudero, D., Mora, D. V., Rojas, N., Flores, P., Aguillar, A., Ribeiro, M., Munoz-Catalan, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) Model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Carrillo, J. et al. (2013). Determining Specialized Knowledge For Mathematics Teaching. En: UBUZ, B. e HASER, C. et al. (Eds.), *VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* (pp. 2985-2994). Turquía: Middle East Technical University.

Carrillo, J., Rojas, N., Flores, P. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*(4), 47-64.

Gatti, B.A., Barretto, E.S.S., André, M.E.D.A., Almeida, P.C.A. (2019). *Professores do Brasil: novos cenários de formação*. Brasília: UNESCO.

Moriel Junior, J. G., Wielewski, G. D., Montes, M. (2013). Conhecimentos mobilizados durante uma formação docente sobre por quês matemáticos: o caso da divisão de frações. En: NACARATO, A. et al. (Eds), *VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática*. (pp. 1-14). Brasil: Ulbra.

Moriel Junior, J. G. (2014). *Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações*. Tese de doutorado. Cuiabá, Brasil: Universidade Federal de Mato Grosso.

Nóvoa, A. (1992). *Formação de professores e profissão docente*. Portugal: Universidade de Lisboa.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4-14.

CONOCIMIENTOS Y CREENCIAS ENTORNO A LAS TIC DE PROFESORES DE MATEMÁTICA EN FORMACIÓN

Knowledge and beliefs about ICT of teachers of mathematics in training

Valbuena-Duarte, S. [a]; Merlano Meza, D. [a]; Conde Carmona, R. [a]

[a] Grupo de Investigación GIMED, Universidad del Atlántico, Colombia

Temática: 1 – MTSK en la formación docente.

Resumen. Las Tecnologías de la información y la comunicación (TIC) se han transformado en componente esencial en la educación, así es objetivo en esta investigación caracterizar los conocimientos y creencias de los docentes de matemática en formación inicial entorno a las TIC. Con enfoque cualitativo y una metodología por fases se recolectó información de 47 estudiantes de licenciatura en matemáticas de una universidad pública del Caribe colombiano, a través de encuestas con formularios de Google, y con grupos focales por medio de Google meet. Se concluye la limitada integración del Conocimiento Tecnológico de Contenido Pedagógico en el aula de clases y el mínimo uso de tecnología al enseñar contenidos matemáticos.

Palabras clave. Conocimiento, creencias, TIC, MTSK.

Abstract. Information and communication technologies (ICT) have become an essential component in education, so the objective of this research is to characterize the knowledge and beliefs of mathematics teachers in initial training around ICT. With a qualitative approach and a phased methodology, information was collected from 47 undergraduate mathematics students from a public university in the Colombian Caribbean, through surveys with Google forms, and with focus groups through Google meet. The limited integration of the Technological Knowledge of Pedagogical Content in the classroom is concluded and the minimum use of technology when teaching mathematical contents.

Keywords. Knowledge, Beliefs, ICT, MTSK.

INTRODUCCION

En los tiempos actuales, las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) se han integrado cada vez más en la sociedad, por lo que, las instituciones educativas se han visto en la necesidad de involucrarlas en el aula de clase, donde buscan generar una enseñanza y aprendizaje de conceptos a través de estos recursos tecnológicos, y originar una adecuada integración con el contexto, lo que ocasiona que los sistemas educativos estén sujetos a una gran presión para poder enseñar a estas nuevas generaciones (Tran, Phan, Le & Nguyen, 2020).

Por consiguiente, los profesores presentan algunas dificultades ante la utilización de estos recursos tecnológicos, como son: tratar con la multiplicidad de los estudiantes, falta de acceso a la tecnología, falta de apoyo de la administración escolar y discrepancia entre el material didáctico existente y los recursos tecnológicos (Stein, Gurevich, & Gorev, 2019). Asimismo, otros aspectos en este orden de ideas están relacionados con los momentos en los que el docente utiliza las TIC en el aula de clase, reportándose en algunas investigaciones (Arévalo-Duarte, García-García & Hernández-Suárez, 2019) que no se arriesgan con las herramientas, no las adecúan, ni interrelacionan, sino que simplemente se quedan con una sola, a la que integran demostraciones, conceptualizaciones,

Valbuena-Duarte, S., Merlano Meza, D., & Conde Carmona, R. (2021). Conocimientos y creencias entorno a las tic de profesores de matemática en formación. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 50–57). Congresseme.

modelación con TIC y no dominan escoger con facilidad la adecuada al momento de orientar esos contenidos, lo que genera un cuestionamiento de su práctica pedagógica.

Por lo que, en resumidas cuentas, muchos de los profesores no tienen la información para aplicar los recursos tecnológicos, y producir una metodología innovadora y enriquecedora para los estudiantes (Villarreal-Villa, García-Guliany, Hernández-Palma y SteffensSanabria, 2019). Dado que se presentan mínimos espacios donde se puedan dirigir de forma significativa los conceptos, aplicados a un contexto, se les obstaculiza usar las diferentes representaciones simbólicas, a la hora de la actividad matemática (ValbuenaDuarte, Tamara-Gutiérrez, Berrio-Valbuena, 2021), por lo que, no logran conservar la organización, la dinámica del aula, ni identificar las diferentes formas en que aprende cada estudiante, y emplear la pedagogía adecuada para transmitir conocimientos (Arévalo-Duarte, García-García & Hernández-Suárez, 2019).

Sin embargo, los profesores de matemática en países en vía de desarrollo, con frecuencia se esfuerzan por implementar las TIC como una herramienta de aprendizaje transformadora, para respaldar las comprensiones matemáticas de los estudiantes (Saubern, Urbach, Matthew, & Phillips, 2019; Valbuena-Duarte et al., 2021). A causa de que, gran parte de profesores de matemáticas no fueron instruidos profesionalmente para la incorporación de TIC en la educación de contenidos, también se producen dificultades a la hora de integrar las computadoras en el aula (Saal, Ryneveld & Graham, 2019).

Por último, en un estudio realizado por Pincheira, Vásquez y Giacomone (2021) se distinguen las complicaciones que presenta el conocimiento especializado del profesor de matemática en formación al ser abordados los contenidos, ya que, no tienen relación con los conocimientos que se tratan desde el aspecto interaccional, como lo es la distribución de tareas matemáticas, correlaciones instituidas dentro del aula, planificaciones utilizadas y resolución de obstáculos, además, los futuros profesores no disponen de un buen uso del contenido con asociación al concepto de estimación y no alcanzan a relacionarlo con otros temas o conceptos más desarrollados del currículum escolar.

Debido a lo mencionado anteriormente, se plantea la siguiente pregunta de investigación ¿Que caracteriza el conocimiento y las creencias del profesor de matemáticas en formación entorno a las TIC? Se propuso, además, el siguiente objetivo de investigación: Caracterizar los conocimientos y las creencias entorno a la tecnología del profesor de matemáticas en formación.

MARCO TEÓRICO Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) y creencias del profesor

El modelo MTSK se orienta en un enfoque analítico buscando conseguir información sobre el conocimiento del profesor, particularmente los elementos que constituyen este conocimiento y las interacciones entre ellos, centrándose esencialmente en estudiar el conocimiento, que el profesor pone en uso, por lo cual, está compuesto por conocimiento de las matemáticas (MK) y conocimiento didáctico de contenido (PCK) (Flores-Medrano et al., 2016; Carrillo-Yañez et al., 2018).

Conocimiento de las Matemáticas (MK)

Está conformado por tres subdominios que dan sentido al conocimiento matemático del profesor de matemáticas: el conocimiento profundo del contenido matemático en sí (el conocimiento de los temas matemáticos), de su estructura (conocimiento de la estructura matemática) y de cómo se obtiene y origina en matemáticas (conocimiento de la práctica matemática).

Conocimiento de los temas matemáticos (KoT): el conocimiento de los temas no se relaciona únicamente al conocimiento de la matemática como disciplina, sino que también incorpora a la matemática escolar. De este modo, puntualiza qué y cómo conoce el profesor de matemáticas los temas que va a enseñar; adjuntando el contenido que se pretende que aprenda el alumno, con una calidad de indagación significativamente mayor.

Conocimiento de la estructura matemática (KSM): es un sistema incorporado de conexiones que implica comprender y ampliar conceptos avanzados desde un criterio elemental y juicios elementales por medio del tratamiento con ayuda de una visión avanzada, incluye adicionalmente las conexiones transversales entre contenidos con alguna cualidad común que los entrelaza, y las conexiones auxiliares, las cuales sirven como instrumento para obtener resultados (Aguilar, et al., 2013; García, Castarnado e Infante, 2014).

Conocimiento de la práctica matemática (KPM): adicionalmente de comprender los centros de contenidos matemáticos y sus vínculos, el profesor debe contar con conocimiento de cómo se origina conocimiento matemático y cuáles son las normas de construcción de la disciplina.

Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

Consta de tres subdominios con los que se distingue el conocimiento que tiene el profesor acerca del contenido como objeto de aprendizaje (conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas), como objeto de enseñanza (conocimiento de la enseñanza de las matemáticas) y desde la perspectiva de lo que se debe lograr en un definido instante escolar (conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas)

Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM): se basa en cuáles son los modos habituales de razonamiento de los estudiantes en determinados contenidos, como son sus dificultades, las características que logran ser más entendibles, así como cuáles les suelen parecer más y menos interesantes. Este conocimiento puede estar soportado en sistemas personales del profesor o institucionalizados.

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT): en este subdominio se indaga el conocimiento que posee el profesor acerca de los modos de expresar el contenido y su capacidad para la instrucción, así como el conocimiento de la potencialidad de los recursos y materiales didácticos en cuanto a la actividad matemática.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS): Reúne el conocimiento del profesor sobre lo que está establecido que aprenda un estudiante y el grado de profundidad y utilización con el que se confía que lo aprenda en un tiempo escolar definido, así como sucesiones del contenido y las motivaciones que lo sustentan.

Ahora bien, las creencias de los profesores de matemáticas son un elemento esencial en los procesos de enseñanza y aprendizaje (García, Azcárate y Moreno, 2006; Handal, 2003) estas son ideas poco elaboradas generales o específicas, formando parte del conocimiento que poseen pero no tienen tanto rigor e influyen de manera directa en su desempeño, a esto se agrega que tienen una estructura organizacional, la cual consiste en, primera dimensión: se organiza de manera similar a las premisas y conclusiones, no se basa en el contenido sino en cómo se sostienen, segunda dimensión: la fuerza psicológica está relacionada con cómo se mantienen y no con el contenido de las creencias y la tercera dimensión: la forma en que se agrupan (Cross, 2009).

Pedagogical content knowledge (TPACK) en matemáticas

Para Koehler & Mishra (2009) el TPACK es una estructura naciente de conocimiento, que va más allá de tres elementos, como son: contenido, pedagogía y tecnología, surgiendo de otras interacciones más entre contenido, pedagogía, y conocimiento tecnológico, siendo la base de una enseñanza significativa con tecnología, por lo que, necesita una interpretación de la representación de los conceptos al momento de utilizar tecnología, así, como las técnicas pedagógicas que utilizan tecnología en eficientes maneras de enseñar contenido, teniendo conocimiento a la hora de ver los factores que dificultan los conceptos, los que los facilitan, como estas ayudan a solucionar algunos de los problemas, por los que pasan los estudiantes y como estas se pueden utilizar para mejorar conocimientos antiguos y generar nuevos.

Formación del profesor y las competencias TIC

Anderson (2010) señala que la tecnología y la pedagogía forman parte de las competencias TIC del profesor, haciendo referencia la primera a las TIC, mientras que la segunda se fundamenta en el arte y la enseñanza, combinadas las dos lo que buscan es cambiar las prácticas de enseñanza al adoptar las TIC como complemento de ellas.

Seguidamente, Suárez, Almerich, Gargallo, y Aliaga en (2010) proponen que las competencias de los profesores en TIC están organizadas en tres áreas diferentes, estas son: conocimiento de las herramientas tecnológicas, integración de las TIC en el curriculum y el uso que hace el profesor sobre estos conocimientos, es necesario que el profesor las conozca y aplique para un mejor proceso de enseñanza y aprendizaje.

METODOLOGÍA

Esta investigación cuenta con un enfoque cualitativo, el cual para Bikner-Ahsbahs, & Knipping (2015) se refiere a la indagación de la vida y pensamiento de los participantes, a través de comunicaciones directas y preguntas abiertas, que permiten acceder directamente al campo estudiado, dispone de un diseño de tipo descriptivo, el cual permitirá una exposición detallada de los datos desde diferentes aspectos, como son el MTSK y creencias del profesor, TPACK en matemáticas, y la formación de profesores en las competencias TIC.

La metodología es una adaptación de Padilla y Conde-Carmona en 2020.

Primera fase: se hace un recorrido histórico de los desarrollos de la problemática identificada en el contexto educativo y a partir de su estado actual comenzar a desarrollar el trabajo. Se define también en esta fase la muestra de estudio la cual es conformada por estudiantes de licenciatura en matemática de una universidad de carácter pública, ubicada en el norte de Colombia, el programa académico se desarrolla en 8 semestres para adquirir el título profesional.

Segunda fase: se definen las técnicas y se diseñan los instrumentos para recabar la información de la investigación. Así se selecciona la entrevista como técnica la cual se desarrolla a través de una encuesta conformada por 8 preguntas, y adicionalmente se hace uso de la técnica de grupo focal, para lo cual se utiliza Google meet, en este caso se trabaja con preguntas abiertas y por último se realiza un análisis de episodios de las prácticas pedagógicas de algunos participantes. Finalmente se hace uso de la técnica de triangulación de la información, para tomar la información recolectada con los instrumentos, compararla e identificar hallazgos importantes.

Tercera fase: una vez recolectada y analizados los resultados, se procede a sistematizar las posibles conclusiones.

RESULTADOS MTSK y creencias del profesor de matemáticas

Una vez obtenidas las respuestas de los participantes en cuanto a la encuesta realizada, se logra identificar que conocen o distinguen la definición de conocimiento matemático, así pues, se presentó en uno de los grupos focales el interrogante mostrado a continuación ¿Desde tu experiencia con las TIC consideras que se debe mejorar algo a la hora de su utilización en la educación?, ante la afirmación a este cuestionamiento, se indagó en el ¿Qué se debe mejorar? Los participantes concordaron en que los profesores que les dictaban clases, necesitaban fortaleces sus habilidades con las TIC, fueron propositivos en agregar un espacio de capacitación del docente frente a estos recursos, como lo expresó el siguiente estudiante (*E*):

E: La mayoría de los profesores que me imparten clase tratan de usar las TIC, pero algunos no, debido a que no las conocían, ya que, hay profesores de edades avanzadas que no tienen como una de sus fortalezas a las tecnologías, por lo que les resultaba difícil adaptar su didáctica y pedagogía a ellas, asimismo, tiene muchas falencias esta integración en la formación de licenciados, porque eso hace que nuestra practica pedagógica padezca de integración tecnológica, yo cursé la primera práctica profesional y como no tenía la experiencia pedagógica con las TIC, no las implemente en las clases

Con relación, a las creencias del profesor en formación de matemáticas se logra evidenciar que estos muestran interés por integrar estos recursos tecnológicos como un apoyo en el aula de clases a la hora de enseñar contenidos matemáticos, como lo señala un participante (*E*):

E: Es necesario conocer las TIC como profesores en formación para darle sentido a nuestro quehacer como docente, también es un medio en donde se puede llegar a muchas más poblaciones de estudiantes o comunidades para llevar un aprendizaje diferente a lo tradicional, además es una manera de integrarse a nuevos cambios que ha tenido el mundo.

De igual manera, se puede identificar que, al momento de impartir conocimiento matemático de forma didáctica con ayuda de estos recursos, piensan principalmente en el estudiante y sus posibilidades para luego adaptar la tecnología adecuada como se expresa por un estudiante de la muestra (*E*):

E: En mi opinión. En un primer caso si se involucran estudiantes de bajos recursos en lo referente al momento de escoger los recursos TIC, tendría en cuenta los recursos tecnológicos con que ellos cuentan, como también la disponibilidad y herramientas de la institución. Sin embargo, otro factor a tener en cuenta sería que tipo de contenido se quiere impartir en los estudiantes ya que algunas herramientas TIC permiten la enseñanza de una forma más "eficaz", dependiendo del contenido a desarrollar se haría la elección de la herramienta.

TPACK y conocimientos del profesor de matemáticas

En relación al TPACK se logra distinguir a través de las respuestas proporcionadas por los participantes el conocimiento de la definición de este y la limitada integración de sus componentes en el aula de clases, donde los docentes involucran algunos, pero no todos de manera eficaz.

Ahora bien, se busca conocer los recursos tecnológicos con los que cuentan los participantes y su integración en el proceso de instrucción, por ende, se desarrolla la pregunta siguiente: ¿Qué software especializado en matemática, como licenciado de matemática en formación, en cuanto a la integración de TIC a la enseñanza de la matemática y cuáles son sus beneficios?, entre las respuestas halladas se puede identificar que los más usuales son GeoGebra, Matlab y Excel, pero asimismo, se evidenció que hubo participantes que respondieron que no habían escuchado ni trabajado con software especializado y no conocían ninguno.

Con base a las respuestas anteriores, y con la finalidad de establecer una información más detallada de los softwares mencionados y sus beneficios se estableció en uno de los grupos focales el interrogante ¿Qué aportes te brinda el software especializado al momento de usarlos? Pero, como también hubo participantes que respondieron que no conocían ninguno, se indagó alrededor de ello con preguntas como: ¿por qué crees que respondieron que no conocían? donde cabe destacar la respuesta de un estudiante (*E)* en formación para profesor de la muestra de estudio:

E: En algunos de los cursos de TIC I y TIC II nos enseñan el manejo de muchas herramientas y recursos tecnológicos, por eso se mencionan esos, ya que, son los más utilizados, son gratuitos y tienen múltiples funcionalidades, dependiendo de la apropiación del docente, los que afirman no conocerlos podría ser porque no han dado los cursos de TIC o no se animan a explorar las herramientas tecnológicas y los diversos softwares, dado que Excel casi todo el mundo los tiene en sus computadoras.

Por todo lo expresado anteriormente, se puede percibir como a pesar del momento actual aún se siguen presentando falencias y grandes deficiencias a la hora de integrar el modelo TPACK en el aula de clases, la poca utilización de recursos en la instrucción de conocimiento matemático y la limitada integración a través del currículo.

Discusiones

Entre los hallazgos que sobresalen, se puede percibir el limitado conocimiento tecnológico con el que cuentan los docentes de matemática en formación, dado que algunos de los profesores que les imparten las clases no los implementan, porque se les dificulta adaptar sus metodologías y estilos de enseñanza, lo que genera que muchos de los estudiantes tampoco las integren al momento de realizar sus prácticas pedagógicas, lo cual, guarda relación con lo hallado por Arévalo-Duarte, García-García y HernándezSuárez (2019) donde pueden distinguir que los estudiantes cuestionan las competencias de sus docentes para usar diversos tipos de tecnología en el contexto del aula.

Con relación, al conocimiento especializado de contenido matemático de los docentes en formación y la utilización de TPACK en la instrucción, se aprecia como los participantes ven como elemento esencial las tecnologias en el proceso de instrucción y enseñanza de temas matemáticos, además piensan en las limitaciones y fortalezas con las que cuentan sus estudiantes al escoger la adecuada para desarrollar una clase, no obstante, el uso de softwares es mínimo por lo que muchas veces deben esperar hasta los cursos de TIC I y II para familiarizarse con ellos.

CONCLUSIONES

Entre los resultados hallados se puede distinguir, la poca integración de las TIC en la práctica pedagógica, al momento, de integrar el conocimiento de contenido matemático con la ayuda de los recursos tecnológicos se les dificulta a los docentes transformar sus metodologías y estilos de enseñanza, seguidamente, dados los componentes del TPACK se evidenció baja integración en la práctica pedagógica, ya que, los docentes tienden a utilizar algunos, pero, desconocen muchos otros, o no los utilizan de forma integrada, por lo que se puede concluir, el limitado conocimiento e integración de las competencias TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje, el escaso conocimiento de aplicaciones computacionales matemáticas al impartir los contenidos y las limitaciones que enfrentan los participantes a la hora de llevar recursos tecnológicos a sus prácticas pedagógicas, ya que, aunque muestren interés por involucrarlas debido al reducido conocimiento de ellas, muchas veces temen o no las incluyen en el aula.

Referencias

Aguilar, Á., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., Escudero, D., & Rojas, N. (2013). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK. *Actas del VII CIBEM*, 5063- 5069. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/19653/

Anderson, J. (2010). Las TIC transforman la educación: una guía regional. *Bangkok*, *TA: UNESCO.* Recuperado de: https://bit.ly/3gxxjZw

Arévalo-Duarte, M. A., García-García, M. Á., & Hernández-Suárez, C. A. (2019). Competencias TIC de los docentes de matemáticas en el marco del modelo TPACK. *Civilizar: Ciencias Sociales y Humanas, 19*(36), 115-132. https://doi.org/10.22518/usergioa/jour/ccsh/2019.1/a07

Bikner-Ahsbahs, A., & Knipping, C. (2015). *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. USA: Norma Presmeg.*

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., EscuderoÁvila, D., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. Recuperado de: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/14794802.2018.1479981

Cross, D. (2009). Alignment, cohesion, and change: Examining mathematics teachers' belief structures and their influence on instructional practices. *Journal of athematics Teacher Education*, *12*(5), 325–346. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9120-5.

Flores-Medrano, E., Montes, M. A., Carrillo, J., Contreras, L. C., Muñoz-Catalán, M., & Liñán, M. (2016). El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 30*(54), 204-221. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a10

García, M. M. L., Castarnado, V. J. B., & Infante, J. M. I. (2014). Conocimiento especializado de los estudiantes para maestro: la resolución de un problema con división de fracciones. *EA, Escuela Abierta, 17*, 41-63. https://doi.org/10.29257/EA17.2014.04

García, L., Azcárate, C., & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9*(1), 85-116. Recuperado de: https://bit.ly/3kmYfw3

Handal, B. (2003). Teachers' mathematical beliefs: A review. *The Mathematics Educator, 13*(2), 47-57. Recuperado de: https://openjournals.libs.uga.edu/tme/article/view/1863

Koehler, M., & Mishra, P. (2009). What Is Technological Pedagogical Content Knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 9*(1), 60-70. Recuperado de: https://www.learntechlib.org/p/29544/

Padilla Escorcia, I. A., & Conde-Carmona, R. (2020). Uso y formación en TIC en profesores de matemáticas: un análisis cualitativo. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte,* (60), 116-136. https://www.doi.org/10.35575/rvucn.n60a7

Pincheira, N., Vásquez, C., & Giacomone, B. (2021). Una aproximación al conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de Educación Básica para enseñar matemáticas elementales. *Uniciencia, 35*(2), 1-22. https://doi.org/10.17163/alt.v14n1.2019.01

Saal, P. E., Ryneveld, L., & Graham, M. A. (2019). The Relationship between using Information and Communication Technology in Education and the Mathematics Achievement of Students. *International Journal of Instruction, 12*(3), 405-424. https://doi.org/10.29333/iji.2019.12325a

Saubern, R., Urbach, D., Koehler, M., & Phillips, M. (2020). Describing increasing proficiency in teachers' knowledge of the effective use of digital technology. *Computers & Education, 147*, 103784. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2019.103784

Stein, H., Gurevich, I., & Gorev, D. (2020). Integration of technology by novice mathematics teachers–what facilitates such integration and what makes it difficult? *Education and Information Technologies, 25*(1), 141-161. Recuperado de: https://link.springer.com/article/10.1007/s10639-019-09950-y

Suárez Rodríguez, J. M., Almerich, G., Gargallo López, B., & Aliaga, F. M. (2010). Las competencias en TIC del profesorado y su relación con el uso de los recursos tecnológicos. *Education Policy Analysis Archives, 18*(10), 1-33. Recuperado de: https://bit.ly/3ygrWUg

Tran, T., Phan, H., Le, H., & Nguyen, H. (2020). ICT Integration in Developing Competence for Pre-Service Mathematics Teachers: A Case Study from Six Universities in Vietnam. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET), 15*(14), 19-34. https://doi.org/10.3991/ijet.v15i14.14015

Valbuena-Duarte, S., Tamara-Gutiérrez, Y., & Berrio-Valbuena, J. (2021). Intervención didáctica tecnológica para el estudio de las secciones cónicas basada en el potencial semiótico. *Formación Universitaria*. *14*(1), 181-194. http://dx.doi.org/10.4067/S071850062021000100181

Villarreal-Villa, S., García-Guliany, J., Hernández-Palma, H., & Steffens-Sanabria, E. (2019). Competencias docentes y transformaciones en la educación en la era digital. *Formación Universitaria, 12*(6), 3-14. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062019000600003

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE ROTAÇÃO E REVOLUÇÃO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

Mathematics prospective teachers' Specialized Knowledge on the topics of rotation and revolution of geometric figures

Oliveira, M. P. [a]; Almeida, A. R. [b], Ribeiro, M. [a]

[a] Universidade Estadual de Campinas (Brasil); [b] Pontifícia Universidade Católica de Campinas (Brasil)

Temática: 1 – MTSK na formação docente.

Resumo. Neste texto, temos por foco obter uma compreensão mais ampla do conhecimento especializado de futuros professores de matemática sobre figuras planas e espaciais, diferenciando-as por meio de rotações e revoluções. Focamos o conhecimento revelado sobre os tópicos de rotação e revolução de figuras geométricas, tendo as informações sido coletadas através da implementação de uma Tarefa para Formação. Os futuros professores revelaram conhecimentos relativos a exemplos de rotações e revoluções, bem como conhecimentos de figuras que podem ser formadas por revolução, confundindo com frequência revoluções de figuras geométricas com alguns tipos de rotações, sendo, dessa forma importante fazer a distinção destas duas transformações de forma relacionada com a prática futura.

Palavras-chave. Conhecimento especializado, futuros professores, rotação de figuras geométricas, revolução de figuras geométricas.

Abstract. This paper focus on obtaining a deeper understanding of prospective mathematics teachers' specialized knowledge about plane and spatial figures, differentiating them through rotations and revolutions. We focus on the revealed knowledge on the topics of rotation and revolution of geometric figures and data has been collected from a task for teacher education. Prospective teachers' reveal knowledge regarding examples of rotations and revolutions and of figures that can be obtained by revolution. They confuse geometric figures revolutions with some types of rotations, and it is therefore important to distinguish these two transformations in contexts preparing for future prospective teachers' practices.

Keywords. Specialized knowledge, prospective teachers, geometric figures rotation, geometric figures revolution.

INTRODUÇÃO

A Geometria é uma área tradicionalmente pouco abordada nas salas de aula brasileiras (Lorenzato, 1995) e, em particular, também o são os tópicos dentro das transformações geométricas, sendo um destes fatores o conhecimento insuficiente dos professores nesses tópicos (e.g., Delmondi & Pazuch, 2018). O estudo de transformações geométricas mostra-se responsável por desenvolver, entre outras, as habilidades da visualização, do pensamento crítico, da intuição, da resolução de problemas e da demonstração matemática (Gomes, 2012). Um dos fatores responsáveis para melhorar a aprendizagem dos alunos é o conhecimento do professor, e esse tem sido o foco de pesquisas recentes na área da educação matemática (e.g., Ribeiro, Gibim, & Alves, 2021).

Muitas pesquisas sobre a formação de professores possuem foco no conhecimento do professor no âmbito de um determinado tópico matemático (e.g., Carrillo et al., 2018, Ribeiro et al., 2021). Nesta pesquisa, temos como foco o conhecimento de futuros professores sobre a transformação geométrica rotação e a revolução de figuras

Oliveira, M. P., Almeida, A. R., & Ribeiro, M. (2021). Conhecimento especializado de futuros professores de matemática sobre rotação e revolução de figuras geométricas. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 58–65). Congresseme.

geométricas e buscamos respostas para a seguinte questão: Que conhecimento matemático especializado é revelado por futuros professores de matemática sobre rotação e revolução de figuras geométricas?

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

As transformações geométricas são construções geométricas que preservam certas propriedades em relação à sua construção original (Wagner, 2007). As rotações são um tipo de transformação que leva uma imagem inicial a uma nova posição, de forma que cada ponto correspondente entre a imagem inicial e a imagem rotacionada forma um mesmo ângulo a partir de uma origem comum (Resende & Queiroz, 2008).

Existem as rotações no plano, em que existe um plano que contém ambas as imagens iniciais e finais da rotação, e cuja origem é formada por um ponto. Neste caso, rotacionamos figuras com dimensão no máximo igual a dois. Há também a possibilidade de rotacionarmos no espaço tridimensional, onde a origem da rotação (também chamada de eixo) é formada por uma reta (Wagner, 2007). N este caso, podemos também rotacionar figuras espaciais.

Já a revolução de figuras ocorre somente no espaço tridimensional, em torno de um eixo. Considera-se uma figura sendo rotacionada em torno desse eixo, em todas as suas posições possíveis, formando uma nova figura composta pela união de todas estas imagens (Dolce & Pompeo, 1995). Um exemplo de revolução de figura plana é inserido abaixo:

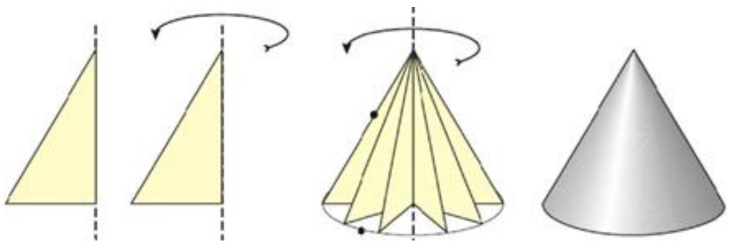


Figura 1. Exemplo da revolução de um triângulo.

Precisamos, além de discutir algumas definições sobre estes tópicos, discutir o conhecimento associado a eles. Para isso, fazemos o uso do *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge*[1] - MTSK (Carrillo et al., 2018), que é um modelo teórico para entendimento do conhecimento especializado do professor de matemática, o qual também terá uma função analítica neste trabalho. O modelo MTSK é organizado em dois domínios, o *Mathematical Knowledge* (MK), composto pelo conhecimento matemático em cada um dos tópicos e *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), composto pelo conhecimento didático em cada um dos tópicos. O modelo contempla também as crenças e concepções dos professores, *Beliefs*. Esta pesquisa foca no MK e descreveremos características desse domínio a seguir.

O MK se estrutura nos subdomínios *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge of the Strructure of Mathematics* (KSM) e *Knowledge of the Practices in Mathematics* (KPM). O KoT compreende o conhecimento do que e de que forma o professor conhece aquele tópico matemático e envolve o conhecimento, por exemplo, de definições, procedimentos

[1] Optamos por manter todas as nomenclaturas referentes do modelo em Inglês, uma vez que esta é uma conceitualização do conhecimento professor divulgada e reconhecida internacionalmente e sua tradução poderia desvirtuar não apenas o sentido mas, essencialmente, o entendimento dos conteúdos de cada um dos subdomínios que compõem o modelo que a representa.

e propriedades do tópico em questão. O KoT compreende as categorias: *(i) definitions, properties and foundations, (ii) phenomenology and applications, (iii) register of representation, e (iv) procedures*. Faz parte do subdomínio KoT conhecer elementos necessários para realizar rotações e revoluções, procedimentos para realizar essas transformações e notações para representar estas transformações, por exemplo.

O KSM compreende o conhecimento sobre as conexões entre os diferentes tópicos matemáticos; as categorias empregadas pelo KSM são: *(I) auxiliary connections, (ii) transversal connections, (iii) connections based on simplification e (iv) connections of complexification.* Neste trabalho, usaremos a categoria *auxiliary connections*. Faz parte dessa categoria, conhecer propriedades de figuras que podem sofrer rotações ou revoluções, como classificação dos triângulos e quadriláteros.

O KPM compreende o conhecimento sobre as formas como são produzido o conhecimento matemático e envolve conhecimento, por exemplo, de demonstrações, do uso de definições e de formas de resolução de um problema. O KPM não possui categorias definidas, mas, para esse trabalho, consideraremos o que está disposto em Delgado-Rebolledo e Zakaryan (2020): *(i) ways of proceeding, (ii) ways of validating, (iii) ways of exploring,* e *ways of generating knowledge in mathematics.* Neste trabalho, usaremos a categoria *ways of proceeding*, da qual faz parte conhecer formas de criar definições destas transformações geométricas e conhecer generalizações possíveis acerca destas transformações.

CONTEXTO E MÉTODO

Esta pesquisa tem cunho qualitativo e foi utilizada a metodologia de estudo de caso (Stake, 2005). A coleta das informações se deu em uma disciplina de educação matemática ministrada em um curso de licenciatura em Matemática – formação de professores[2] (Brasil).

O objetivo da disciplina era desenvolver o conhecimento especializado dos futuros professores em alguns tópicos matemáticos e, para atingir tal objetivo, as aulas foram dinamizadas por meio de Tarefas para Formação – TpF (Ribeiro, Almeida & Mellone, 2021), que são especificamente elaboradas para aceder e desenvolver o conhecimento dos (futuros) professores nos tópicos abordados. A tarefa em questão abordava diferenciação de figuras planas e espaciais por meio de rotações e revoluções. Aqui, discutimos duas questões da TpF que eram preliminares para estabelecer o ponto de partida para as discussões posteriores:

(i) Podemos rotacionar figuras geométricas bidimensionais? Dê exemplos.
(ii) Podemos rotacionar figuras geométricas tridimensionais? Dê exemplos.

A TpF foi implementada em dois momentos: um primeiro com discussões em pequenos grupos (dois a três integrantes) para resolver a tarefa, e uma discussão plenária ao final com todos os futuros professores. As informações aqui analisadas fazem parte das discussões de três grupos de futuros professores (2 ou 3 elementos cada) para a primeira parte da implementação da tarefa e foram obtidas através da transcrição das discussões de cada grupo (gravadas em áudio) e de suas produções escritas para a TpF. Foi efetuada a identificação do conhecimento especializado revelado pelos grupos, e então determinamos cada descrição de conhecimento a uma categoria do modelo MTSK.

[2] Que vão lecionar para alunos de 10 a 17 anos.

Posteriormente, agrupamos e sintetizamos o conhecimento revelado em cada categoria por meio de descritores de conhecimento (Zakaryan & Ribeiro, 2019).

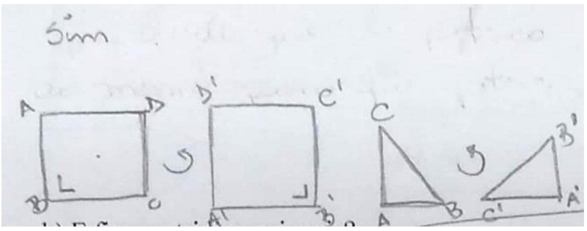
Para esses descritores, associam-se acrônimos correspondentes às categorias que se discutem neste trabalho: KoTd - *Definitions, properties and foundations,* KoTph - *Phenomenology and applications,* KoTr - *Register of representation*, KoTpc - *Connections of complexification*, KSMa - *Auxiliary connections,* e KPMwp - *Ways of proceeding.*

Apresentamos na análise trechos que possibilitaram a discussão dos descritores de conhecimento para sintetizar o conhecimento revelado e, nesses trechos, identificamos a categoria em que esse conhecimento se situa. No final, mostramos os descritores criados para sintetizar este conhecimento. As produções escritas para a TpF são apresentadas em imagens e quando é o caso efetuamos a transcrição do texto incluído; as transcrições estão organizadas em três colunas, apresentando as linhas, nome (fictício) do futuro professor e a transcrição. A numeração da linha da transcrição é extraída da transcrição do grupo para toda a tarefa. Quando nos referimos às linhas da transcrição, utilizamos parênteses para indicar as linhas, por exemplo, (40-42) para nos referirmos às linhas de 40 a 42.

ANÁLISE E DISCUSSÃO

Os futuros professores revelam conhecer exemplos de rotações de figuras planas e espaciais e, dessa forma, revelam também conhecer a distinção entre rotações no plano e rotação no espaço. Porém, há futuros professores que revelam conhecimento sobre o tópico de revoluções ao responderem questões que deveriam ser sobre rotações, revelando conhecimento adequado sobre esse outro tópico, mas revelando uma possível confusão entre as duas transformações geométricas.

Iniciamos a análise de uma produção escrita do primeiro grupo em resposta à pergunta "(i) *podemos rotacionar figuras geométricas bidimensionais? Dê exemplos*"



Sim (desenho)

Figura 2. Produção do grupo 1 sobre rotações no plano.

Os futuros professores revelam conhecer a rotação no plano de um quadrado e conhecer a rotação no plano de um triângulo, revelando conhecer exemplos deste tipo de rotação (KoTd: conhecer exemplos de rotação de figuras planas no plano).

Além disso, revelam conhecimento sobre algumas notações necessárias para a representação desta rotação: a representação das imagens iniciais e finais da rotação são feitas de forma separada, sem sobreposição; há o uso de notação para nomear os vértices das imagens do quadrado e do triângulo (quadrados ABCD e A'B'C'D', e triângulo ABC e A'B'C') indicando notações diferentes antes e após a rotação, mas que relacionam os vértices correspondentes destas figuras (KoTr: conhecer uma notação para representar os vértices correspondentes de figuras planas em uma rotação no plano); e revelaram também conhecer o uso de uma seta que indique o sentido e dar ideia de movimento para esta transformação geométrica (Resende & Queiroz, 2008). Dessa forma, os futuros professores revelam conhecer diversas características necessárias para representar a rotação no plano por meio de um desenho (KoTr: conhecer uma notação para representar o movimento de giro em uma rotação no plano).

Outro grupo aborda diferentes exemplos de rotação de figuras planas durante a discussão da mesma questão:

37. Mário: Ó, eu adoro assim, e que são coisas da escola,
38. você tem um triângulo equilátero, se você rotacionar ele 60º
39. você encontra outros três pontos que são de um hexágono, por
40. exemplo, a estrela de Davi né. É uma rotação.

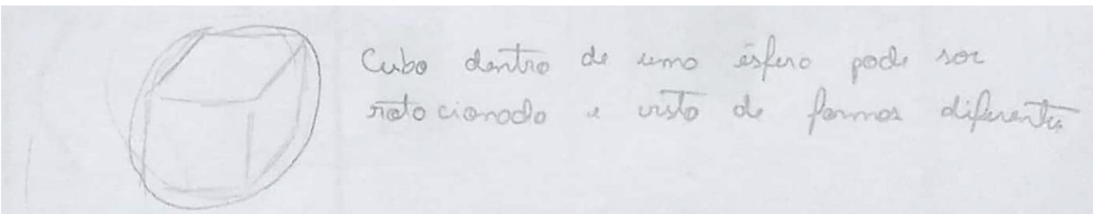
(...)

54. Mário: O quadrado se você rotacionar 45º você encontra os outros 4 pontos
55. que são do octógono

(...)

58. Mário: Vai dobrando, de três passa para seis.

Este futuro professor revela conhecer a rotação no plano de um triângulo equilátero (39-40), revelando conhecimento de um exemplo deste tipo de rotação (KoTd: conhecer o resultado da rotação de 60º de um triângulo equilátero no plano). Apesar de não mencionar explicitamente, considera esta rotação a partir do centro do triângulo equilátero, e, dessa forma, ao rotacionar 60º, os vértices encontram-se em uma bissetriz do ângulo central da figura inicial – o que leva a formar um hexágono regular. O futuro professor revela conhecer que, sendo a rotação efetuada desta forma, os vértices dos triângulos iniciais e finais formam um hexágono (KoTpc: conhecer o resultado da rotação de 60º de um triângulo equilátero no plano).
Nas linhas 41 e 42, revela conhecer o exemplo da rotação no plano de um quadrado por um ângulo de 45º - quando o centro de rotação é a interseção das diagonais (KoTd: conhecer um exemplo da rotação de 45º de um quadrado no plano). Ao identificar que os vértices do quadrado inicial e transformado pela rotação formam um octógono, revela também um conhecimento sobre características do resultado desta rotação (KoTpc: conhecer o resultado da rotação de 45º de um quadrado no plano). Quando o futuro professor identifica que a quantidade de vértices "vai dobrando, de três passa para seis" (58), ele analisa um padrão que ocorre ao rotacionar figuras regulares e faz uma generalização (KPMwp: conhecer que ao unir os vértices das imagens iniciais e finais de figuras planas regulares rotacionadas obtemos nova figura regular com o dobro de vértices).
Relativamente à questão "*podemos rotacionar figuras geométricas tridimensionais? Dê exemplo*", este grupo apresenta um exemplo da rotação de um cubo (KoTd: conhecer exemplos de rotação no espaço de figuras espaciais).



Cubo dentro de uma esfera pode ser rotacionado e visto de formas diferentes.

Figura 3. Produções do Grupo 2 para a pergunta "podemos rotacionar figuras geométricas tridimensionais? Dê exemplo".

A produção do grupo é complementada pela transcrição da sua discussão:

80. Mário: Você pode imaginar o cubo dentro da esfera, e você pode mudar os
81. vértices dele de lugar sobre a esfera
82. Júlia: Está rotacionando no centro, não é?

Os futuros professores explicitam que a rotação tem de possuir um centro de rotação – a origem – e que aqui corresponde ao centro do quadrado (82) – interseção das diagonais (KoTp: conhecer que a rotação possui uma origem). No espaço, esse centro corresponde a uma reta, mas os futuros professores não tornam esse conhecimento explícito.

Os futuros professores destes dois grupos revelaram um conhecimento acerca de rotações associado a serem isometrias e construírem imagens congruentes às iniciais (Wagner, 2007).

Houve grupos que revelaram conhecimento sobre revolução de figuras respondendo à questão "*podemos rotacionar figuras geométricas tridimensionais? Dê exemplo*", como o grupo 3 mostrado a seguir:

59. Carlos: Por isso eu pensei em paraboloides e hiperboloides.
60. Pedro: Acho que você pode.
61. Carlos: Se você rotacionar um círculo, dá uma esfera.

(…)

76. Carlos: Rotacionar um triângulo vira um cone.

(…)

79. Pedro: Um triângulo retângulo.
80. (…)
81. Carlos: Não precisa ser retângulo.
82. Pedro: Para dar o cone… precisa ser retângulo.
83. Carlos: Não, precisa ser isósceles só.

Os futuros professores (59) revelam um conhecimento de exemplos de figuras formadas por revolução (Dolce & Pompeo, 1995), referindo, em particular, paraboloides e hiperboloides (KoTd1: conhecer que paraboloides e hiperboloides são exemplos de figuras que podem ser formadas por meio de revolução). Revelam também conhecer também os procedimentos de revolução de um círculo (61) para obtenção de uma esfera (KoTpc: conhecer que a revolução de um círculo pode gerar uma esfera) e da revolução de um triângulo (76) para obtenção de um cone (KoTpc: conhecer que a revolução de um triângulo pode gerar um cone, o que ilustra um conhecimento procedimental associado à realização de uma revolução (KoTp: conhecer como obter o resultado da revolução de uma figura plana (triângulo e círculo) por um eixo não perpendicular ao plano dessa figura). Além disso, ao discutirem quais as características dos triângulos que permitem formar um determinado tipo de cone por meio da revolução – retângulo ou não –, revelam conhecer a implicação do uso de determinados tipos de triângulos para o tipo de cone obtido por essa revolução, mas consideram, de forma errônea, que só existem cones formados por triângulos retângulos (82). Conhecem a classificação de triângulos quanto aos ângulos (79; 81; 82) – retângulo (KSMau: conhecer a classificação dos triângulos quanto aos ângulos) e quanto aos lados (83) – isósceles (KSMau: conhecer a classificação de triângulos pelos lados).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os futuros professores revelam conhecer exemplos de figuras que podem ser rotacionadas – quadrados e triângulos –, bem como as características do resultado da rotação destas figuras, e conhecimento sobre notações usadas para representar a rotação destas figuras. Para rotações no espaço, revelam conhecer exemplos de figuras que podem ser rotacionadas – cubos – e sobre a origem da rotação – formado por retas –, o que ilustra as diferenças entre rotações no plano e no espaço.

Podemos apresentar o conhecimento revelado ao responderam as duas questões motivadoras de forma sintética, de modo a permitir obter uma visão mais ampla do espectro desse conhecimento e que nos permite responder à questão de pesquisa relativa a que conhecimento especializado revelam futuros professores no âmbito da rotação e revolução de figuras geométricas.

Tabela 1. Síntese do conhecimento especializado revelado pelos futuros professores

Categoria	**Conhecimento revelado** *Tópico de rotação*	 *Tópico de revolução*
KoT Definition	KoTd: conhecer exemplos de rotação de figuras planas no plano KoTd: conhecer exemplos de rotação no espaço de figuras espaciais	KoTd: reconhecer que paraboloides e hiperboloides são figuras que podem ser formadas por meio de revolução
KoT Procedures	KoTpc: conhecer o resultado da rotação de 60º de um triângulo equilátero no plano. KoTpc: conhecer o resultado da rotação de 45º de um quadrado no plano.	KoTpc: conhecer que a revolução de um triângulo pode gerar um cone. KoTpc: conhecer que a revolução de um círculo pode gerar uma esfera.
KoT Register of Representation	KoTr: conhecer uma notação para representar os vértices correspondentes de figuras planas em uma rotação no plano KoTr: conhecer uma notação para representar o movimento de giro em uma rotação no plano.	-
KoT Properties	KoTp: conhecer que a rotação possui uma origem, e que em rotações no espaço ela é constituída por uma reta	-
KSM Auxiliary conections	-	KSMau: conhecer a classificação dos triângulos por ângulos. KSMau: conhecer a classificação de triângulos pelos lados.
KPM Ways os proceeding	KPMwp: conhecer que ao unir os vértices das imagens iniciais e finais de figuras planas regulares rotacionadas obtemos nova figura regular com o dobro de vértices.	-

Estes resultados contribuem para repensar e problematizar o foco da formação de professores, trazendo para a discussão as especificidades desse conhecimento para a prática docente. Repensar o foco e natureza da formação associa-se à conceitualização de Tarefas para a Formação (Ribeiro et al., 2021) que potenciem desenvolver este conhecimento na sua dimensão especializada.

Também, esta análise e resultados abrem outras linhas de trabalho relacionadas com o conhecimento de futuros professores e que podem ser descritas pelas questões de pesquisa:

(i) Quais são os elementos necessários para realizar uma rotação de figuras geométricas?
(ii) Quais são os elementos necessários para realizar uma revolução de figuras geométricas?

Referências

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Delgado-Rebolledo, R., & Zakaryan, D. (2020). Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(3), 567-587.

Delmondi, N. N., & Pazuch, V. (2018). Um panorama teórico das tendências de pesquisa sobre o ensino de transformações geométricas. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, *99*(253), 659-686.

Dolce, O., & Pompeo, J. N. (1995). Fundamentos de matemática elementar. *Geometria plana*, *9*, 252.

Gomes, A. (2012). Transformações geométricas: conhecimentos e dificuldades de futuros professores.

Lorenzato, S. (1995). Porque ensinar geometria. *Revista em Educação Matemática*, (4).

Rezende, E. Q. F., & de Queiroz, M. L. B. (2008). *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. Editora da UNICAMP.

Ribeiro, M., Almeida, A., & Mellone, M. (2021). Conceitualizando Tarefas Formativas para Desenvolver as Especificidades do Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor. Perspectivas da Educação Matemática, 14(35), 1-32.

Ribeiro, M., Gibim, G., & Alves, C. (2021). A Necessária Mudança de Foco na Formação de Professores de e que Ensinam Matemática: Discussão de Tarefas para a Formação e o Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo. *Perspectivas da Educação Matemática*, *14*(34), 1-24.

Stake, R. (2005). Qualitative case studies. *The Sage handbook of qualitative research (3th edition, pp. 443–466) SAGE Publications Ltd.*

Wagner, E., & Carneiro, J. P. Q. (2007). *Construções geométricas*. Sociedade Brasileira de Matemática.

Zakaryan, D., & Ribeiro, M. (2019). Mathematics teachers' specialized knowledge: a secondary teacher's knowledge of rational numbers. *Research in Mathematics Education*, *21*(1), 25-42.

LAS FRACCIONES EN EL MARCO DEL CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS

Fractions in the framework of knowledge of the topics

Prieto G. [a]; Perdomo A. [b]; Parra-Sandoval H. [c]

[a] Universidad del Zulia; [b] Universidad Tecnológica del Perú; [c] Universidad del Zulia

Temática: 1 - MTSK en la formación de profesores

Resumen. En coherencia a lo planteado sobre el Conocimiento de los Temas (KoT) en el MTSK, se hace indispensable que los profesores en formación y los que ya laboran, comprendan en profundidad el tema de las fracciones. Se muestran los resultados del análisis de la participación de un grupo de profesores de primaria en un episodio de un programa de formación en el que se abordó la conceptualización de la fracción. El enfoque metodológico fue de carácter naturalista, esperando analizar las situaciones tal y como sucedieron. Los resultados mostraron un arraigo muy fuerte de los profesores por concebir la fracción como parte – todo, evidenciándose una gran ausencia de los otros significados de las fracciones. Estos resultados exigen la necesidad de ampliar en los procesos formativos la comprensión de los otros significados de la fracción.

Palabras clave. Conocimiento de los temas, Desarrollo profesional, Fracciones, MTSK

Abstract. Consistent with what is stated about Knowledge of Themes (KoT) in the MTSK, it is essential that teachers in training and those who already work, understand in depth the subject of fractions. The results of the analysis of the participation of a set of primary school teachers in an episode of a training program in which the conceptualization of the fraction was addressed are shown. The methodological approach was of a naturalistic nature, hoping to analyze the situations as they happened. The results showed a very strong attachment of these professors for conceiving the fraction as part - whole, evidencing a great absence of the other meanings of the fractions. These results demand the need to broaden the understanding of the other meanings of the fraction in the formative processes.

Keywords. Subject Knowledge, Professional Development, Fractions, MTSK

INTRODUCCIÓN

El estudio sobre el conocimiento del profesor ha sido motivo de interés en las últimas cuatro décadas, lo que ha significado un incremento en la cantidad de investigaciones donde el foco de atención es lo que el profesor conoce, piensa y actúa. Junto a este incremento del número de investigaciones también hallamos la aparición de numerosos trabajos con características cualitativas y enmarcados en un conocimiento del profesor contextualizado a las diferentes áreas académicas presentes en los sistemas educativos, entre esos resaltan los de la Educación Matemática. Ejemplo de ello es que desde el planteamiento realizado hace más de tres décadas por Shulman (1986) sobre la particularidad del conocimiento del profesor, se han planteado deferentes modelos que buscan representar ese conocimiento en el profesor de matemáticas, uno de ellos es el modelo MTSK que nos reúne en esta quinta edición del Congreso Iberoamericano sobre el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas.

Sin embargo, este creciente interés por estudiar el conocimiento del profesor de matemáticas no ha sido uniforme en cuanto a los diferentes niveles educativos y modalidades de formación de profesores. La mayoría de las investigaciones han

Prieto G., Perdomo A., & Parra-Sandoval H. (2021). Las fracciones en el marco del conocimiento de los temas. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 66–73). Congresseme.

privilegiado los estudios dirigidos hacia los futuros profesores (formación inicial) y en menor medida, hallamos investigaciones cuya población de estudio se enfoca en el profesor que ya ejerce su profesión (educación continua o desarrollo profesional) (Montes et al., 2021). Esta realidad nos motivó a investigar una experiencia donde profesores de primaria en ejercicio desarrollaban un proceso de formación en el que se estaba trabajando el tema de las fracciones. En esta presentación compartimos parte de los resultados de este estudio, en particular, mostramos el conocimiento del tema de las fracciones que este grupo de profesores manifestó en torno a la manera de iniciar a sus estudiantes en el conocimiento de las fracciones.

REFERENTES TEÓRICOS

El trabajo que presentamos considera al MTSK como su principal marco de referencia, en particular, en lo referido al "Conocimiento de los temas" (KoT), en este caso, referido el tema trata de las fracciones.

El KoT de acuerdo a Carrillo-Yañez et al. (2018), es el conocimiento que posee el profesor sobre los temas y la manera de enseñarlos. Eso supone, de parte del profesor, un conocimiento más profundo que el conocimiento que se espera adquieran sus estudiantes. En el caso de las fracciones no solo bastaría que el profesor conociera sus significados de acuerdo a sus diferentes representaciones, también es necesario que conozca sus aplicaciones, la razón por la cual se operan de una manera, los diferentes procesos para su operacionalización, entre otros aspectos. En el KoT se distinguen cuatro categorías, estas son, la fenomenología y aplicaciones; los procedimientos; definiciones, propiedades y sus fundamentos y, los diferentes registros de representación (Montes et al., 2019; Carrillo-Yañez et al., 2018; Vasco et al., 2017).

Muñoz-Catalán et al. (2015) abordaron el estudio del KoT analizando el conocimiento de un profesor en torno a las fracciones y sus operaciones, específicamente la división como medida, empleando las representaciones gráficas como soporte para la resolución de problemas. En la investigación se indica la importancia de la definición de la unidad en el concepto de fracción y algunas limitaciones de la noción de fracciones como parte/todo, la cual, constituye la noción más empleada y en varias ocasiones la única trabajada. Por otra parte Liñán et al. (2016) trabajaron el KoT sobre las fracciones y señalan que no debe estar restringido sobre la definición del concepto, tal y como deseamos mostrar en este estudio sino que se requiere conocer sobre los algoritmos de las operaciones, los fenómenos asociados y el conocimiento de las diferentes interpretaciones (parte-todo, medida, razón, cociente y operador), pues favorece a la utilización de diversas maneras de representar una fracción y los contextos asociados a esta.

Las fracciones representan un tema complejo por los diferentes significados inmiscuidos, situación que propicia dificultades en su enseñanza y aprendizaje (Reyes & Sosa, 2016). Sin embargo, los docentes, con la intención de establecer entre sus estudiantes las primeras vías de acceso a la fracción, en su mayoría enfatizan en la noción de este concepto partiendo del enfoque parte-todo, ejemplificando a partir de la equipartición de figuras planas circulares y rectangulares. Esta tendencia a iniciar el estudio de las fracciones representándolas como parte-todo es posible que se deba a que entre los profesores esta concepción de fracción está muy arraigada; así lo demuestran diversos estudios realizados en diferentes contextos con profesores en formación y profesores en ejercicio. Valenzuela-Molina et al. (2018) en Argentina y Reeder & Utley (2017) en los EE. UU. investigaron en futuros profesores el significado que tenían en relación a las fracciones y en ambos estudios coinciden en que la fracción es identificada mayoritariamente como la división en partes iguales de una unidad (parte – todo). De igual manera Rau & Mattheus (2017) en un estudio, esta vez realizado con profesores de primaria en ejercicio en Turquía, llegan a las mismas conclusiones.

La introducción de este concepto desde la perspectiva parte – todo se apoya en el supuesto de que las actividades propias de este enfoque resultan ser más cercanas para los estudiantes (uso de material concreto, representación figural); además que les permite identificar sus elementos, numerador y denominador, por medio de un esquema ya establecido, el esquema de conteo. Por otro lado, también permite el uso de sistemas de representación como el verbal (lectura de fracciones) y el simbólico (expresión numérica asociada a una fracción). Así que, en la práctica, la conceptualización de la fracción se inicia desde "una situación de reparto equitativo, empleando material concreto que facilita la obtención de trozos o partes de objetos. Conjuntamente, se fortalece la lectura de diversas fracciones previamente a la introducción de la representación simbólica" (Rojas et al., 2013, p.61). A pesar de las bondades que pudiera ofrecer el enfoque parte-todo, privilegiarlo pondría en riesgo la conceptualización de la fracción desde otras interpretaciones (cociente, operador, razón y medida), dejando una falsa idea de comprensión. Cortina et al. (2013), identifican tres imágenes que los estudiantes pueden adquirir de la fracción desde la equipartición y que se muestran como obstáculos didácticos, comprometiendo la concepción de la fracción como número. Las imágenes identificadas son: la fracción como resultado de transformar un objeto, la fracción como tantos de tantos y la fracción como incluida en un entero. El obstáculo se presenta cuando el estudiante asume que las fracciones modifican irreversiblemente un objeto, de allí que no lleguen a comprender relaciones recíprocas como que sumar n veces la fracción unitaria 1/n produce el entero 1. Los estudiantes también podrían conceptualizar a las fracciones como números que cuantifican conjuntos de elementos discretos, generando de este modo un tratamiento de lo continuo de la misma forma como trata lo discreto. Por ejemplo, si se trata de un círculo dividido en 3 sectores circulares, no necesariamente de igual área, de los cuales están sombreados dos de ellos, la estrategia del estudiante será contar en cuántas partes se dividió el círculo y cuántas de ellas están sombreadas sin tener en consideración la conservación del área y asumiendo la representación simbólica fraccional como un par de números naturales, uno sobre otro separado por una pequeña "rayita", 2/3 para el ejemplo citado, perdiéndose la relación entre sus partes y pudiéndose llegar a la idea de que las fracciones no deben superar a la unidad o todo. El privilegiar esta interpretación de la fracción solo para identificar numerador y denominador resulta ser una práctica didáctica frágil si lo que se desea es una conceptualización robusta.

METODOLOGÍA

La investigación es de carácter cualitativo de tipo naturalista porque los hechos se estudian tal y como sucedieron en la realidad (Flick, 2015) y el enfoque es interpretativo porque se identifican, analizan e interpretan las diferentes manifestaciones del conocimiento que en él surgen sobre las fracciones (KoT) durante el episodio estudiado. Para conservar su anonimato los actores se identifican como Mi, donde i=2,3, ….

Para el análisis nos apoyamos en cuatro categorías propuestas por Montes et al. (2019), Carrillo-Yañez et al. (2018) y Vasco et al. (2017), estas son *registros de representación* (posibles maneras de representar el tema de las fracciones) *fenomenologías y aplicaciones* (conocimiento de fenómenos o aplicaciones asociadas al tema de las fracciones), *procedimientos* (¿cuándo? ¿cómo y por qué se hace?, características de los resultados). Por último, *definiciones, propiedades y sus fundamentos* (descripción y caracterización del concepto y propiedades de las fracciones).

PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El conocimiento de los temas (KoT) se entiende como el conocimiento que posee un docente de matemática sobre el uso y aplicaciones que tienen los contenidos, en este caso, el de las fracciones y está constituido por las categorías mencionadas anteriormente.

Registro de representaciones

Con la idea de plantear a los participantes la manera cómo se debe iniciar a los estudiantes en la noción de fracción, comienza un intercambio de ideas entre ellos y sale a relucir una intervención de M1 quien aboga por el uso de material concreto, en este caso, una hoja de papel (representación de tipo material). M1expresa:

> "Si los niños no dominan la parte de las líneas, los segmentos, las diagonales, todo eso, yo acostumbro a tomar una hoja, dibujo el rectángulo. ¡Ajá, vamos conmigo! (invita a los demás compañeros a que vean cómo lo hace mostrando una hoja de papel y ejemplificando de forma ostensiva). Vamos partiendo [mientras dobla a la mitad una hoja de papel] y vamos trazando y ellos van observando a medida que uno va haciendo los dobleces. ¿En cuántas partes lo hemos partido? ¿Cómo nos va quedando? Así vamos sucesivamente hasta obtener las divisiones que se puedan obtener en ese rectángulo"

M1 percibe que cuando los estudiantes se inician en Educación Primaria presentan limitaciones en el dominio de representaciones de tipo figural; ese vacío es el que justifica la introducción del concepto de fracción con una estrategia que resulte ser más cercana y "manipulable" para los estudiantes, usando material concreto. Esta estrategia parece que genera conexiones entre lo concreto (hoja de papel con dobleces) y lo abstracto (concepto de fracción como parte-todo, lectura y representación simbólica de la fracción). En la práctica, la conceptualización de la fracción se inicia desde "una situación de reparto equitativo, empleado material concreto que facilita la obtención de trozos o partes de objetos. Conjuntamente, se fortalece la lectura de diversas fracciones previamente a la introducción de la representación simbólica" (Rojas et al., 2013, p.61).

M1 continúa y expresa:

> "…porque entonces caen los niños en un error que a veces quieren utilizar una circunferencia y dividirla en cinco. ¡No se puede dividir en 5 porque no tiene 5 partes iguales!". En ese momento el formador cuestiona la respuesta y añade: "¿Por qué la tendencia [de los estudiantes] a irse a un cuarto, a un medio en un círculo? ¿Por qué será? ¿Es un problema de madurez mental o hay otras razones?"

Respondiendo a las preguntas planteadas interviene M2 y dice: "Porque para nosotros [los profesores] es más fácil enseñar a dividir [el círculo] en pares. ¡Vamos a dividir en un cuarto! ¡Vamos a tomar dos cuartos! Siempre los estamos enseñando a dividir en pares".

En el estudio de las fracciones existe una fuente y un objetivo: la fuente es la representación figural externa, mientras que el objetivo es el concepto de fracción asociado a la fuente (Tunç-Pekkan, 2015). Según lo expresado por M1 un círculo (la fuente) presenta la limitación de no permitir representar fracciones con denominador impar: un quinto, dos quintos, …, cinco quintos (el objetivo), algo que es reforzado por M2. Parece que los profesores tienden a privilegiar las fracciones con denominador par en el caso de las figuras circulares, derivado de la acción de doblar la hoja por la mitad repetidamente, acción que usualmente ejecutan al introducir la noción de este concepto mediante el uso de material concreto, dejando entrever que en este caso (denominador impar), el rectángulo es la figura adecuada a presentar a sus estudiantes.

Podría decirse que hay una creencia de que las fracciones tienen asociadas ciertas figuras geométricas que permiten su representación y que es necesario diferenciar entre el uso de fuentes dependiendo del número de partes, pares o impares, en las que se divida el todo. Si el número de partes en las que se divide el todo es impar, entonces su representación figural será un rectángulo, pero si el número de partes es par, se podría usar un círculo. Es importante hacer notar que dentro de las representaciones figurales no se presentó la recta numérica.

Fenomenología y aplicaciones

Respecto a esta categoría M1 colocó como ejemplo de aplicación lo siguiente*:* “Lo digo por experiencia, yo a veces les digo: miren mis hijos si yo tengo una torta y la divido en 2, esa fracción representa un medio*”*. El ejemplo presentado por M1 generó un intercambio de ideas, una de ellas fue planteada por M3 quien señala que:

> “normalmente, cuando se va a dar fracciones, lo he visto en textos y también en muchos compañeros [colegas profesores] que no salen de la torta, no salen de una pizza, no salen de algo que sea circular, cuando podemos dar otros ejemplos”

Entre estas dos intervenciones de M1 y M3 se evidencia que M1 asume la clásica utilización de la torta para contextualizar el concepto de fracción. Este ejemplo es clásico, no solo por lo que expresa M3, también es algo que otras investigaciones al respecto señalan (Ríos, 2019). Esta tendencia a privilegiar estos ejemplos de aplicación de la fracción es coherente con la idea de solo presentar a la fracción como parte-todo y nos lleva a lo que Freudenthal (1983) denominaba como “pobreza fenomenológica” que, en el caso de las fracciones, produce experiencias muy limitadas para la comprensión de lo que es este concepto ya que no se presentan otros casos donde las fracciones se apliquen.

Procedimientos

El ámbito de los procedimientos hace referencia al conocimiento de algoritmos convencionales y alternativos, el cómo se hace o se emplea (Liñan et al., 2016), en este caso se evidencia cuando se indica la manera de representar una fracción bien sea con material concreto o mediante un gráfico, en ese sentido M1 manifiesta:

> “... si los niños no dominan la parte de las líneas, los segmentos, las diagonales, todo eso, yo suelo tomar una hoja, dibujo el rectángulo. ¡Ajá, vamos conmigo! (mostrando una hoja de papel). Vamos partiendo [mientras dobla a la mitad una hoja de papel] y vamos trazando y ellos van observando a medida que uno va haciendo los dobleces. ¿En cuántas partes lo hemos partido? ¿Cómo nos va quedando? Así vamos sucesivamente hasta obtener las divisiones que se puedan obtener en ese rectángulo y luego los mandamos a colorear...”

Se puede notar en M1 que el proceso a seguir para mostrar lo que es una fracción consiste en plasmar y/o exhibir una figura, dividirla en porciones iguales y ver la cantidad de “divisiones” que conforman la totalidad. Según M1 se puede introducir la fracción de esta manera puesto que, si los estudiantes desconocen algunos de los términos asociados a otras representaciones de fracciones, probablemente comprenderían las partes de una fracción dentro del concepto parte – todo. Lo anterior atiende al cómo, cuándo y por qué se hace (Vasco et al., 2017). Por su parte M4 plantea otro modo de representar la fracción, en este caso cuando se trata de una figura circular, indicando que:

> "... Uno divide el diámetro [haciendo un gesto con las manos, indicando de cierto modo que se emplee el radio] y lo va dividiendo, o sea, sí lo puedes dividir en 5 partes, en partes iguales. Van a medir lo mismo, tú puedes dividir las 5 partes y que midan todo lo mismo, que el arco sea el mismo"

En su comentario M4 presenta algunas inconsistencias, sin embargo, al final, cuando menciona los arcos de una circunferencia se intuye el cómo debe hacerse cuando se desea representar una fracción con denominador impar en un círculo, respondiendo y refutando a lo manifestado por M1 quien daba a entender que en el caso de una fracción 1/n, donde n es un entero positivo impar no se podía representar mediante esta figura.

Definiciones, propiedades y fundamentos

En este caso, se revela el predominio de un significado de la fracción como parte-todo, lo cual puede ser empleado como "base para instaurar los diferentes sub-constructos" (Real et al., 2013, p. 22). Sin embargo, Ávila (2019) señala que la intención debería enfocarse en asociar las expresiones "a/b" con objetos/ acciones en cualquiera de los conceptos, brindando mayor apertura a otros significados como medida, razón, cociente y operador.

En ese sentido M1 al hacer referencia a la definición de fracción señala:

> "...que quede claro algo, que el niño esté consciente de que la fracción es una parte entera dividida en otras, o sea, es cuando se le da la diferencia de lo que es un numerador y un denominador…Yo dividí la hoja en tres partes y allí represento una fracción, ¿cuál es? ¡un tercio! Claro, porque mi hoja la dividí en tres partes, pero las partes iguales"

En el caso de M1 se continúan reflejando el predominio de la fracción como parte-todo, algo que parece ser del consenso de los demás participantes porque no se escuchan voces disidentes. A partir de la equipartición de una figura plana rectangular se pretende identificar sus elementos, numerador y denominador, por medio del esquema de conteo. Esta acción de acuerdo a Rojas et al. (2013) podrían facilitar el acceso a la lectura y simbología de las fracciones; sin embargo, este énfasis en ver la fracción solo como parte-todo no contribuye al enriquecimiento de este complejo concepto.

A MODO DE CONCLUSIÓN

Nuestro interés por identificar, analizar e interpretar los conocimientos emergentes que estuvieron presentes en profesores de primaria participantes de un programa de formación permitieron reconocer un predominio del concepto de fracción como parte – todo a lo largo del episodio. Esta manera de ver la iniciación al concepto de fracción liderada por M1 fue de alguna manera avalada por sus compañeros, cuando a lo largo de sus intervenciones nunca cuestionaron o propusieron alternativas diferentes. Estos resultados coinciden con las investigaciones realizadas por Valenzuela-Molina et al. (2018), Reeder & Utley (2017) y Rau & Mattheus (2017) quienes, en diferentes contextos y actores, obtuvieron iguales conclusiones.

De igual manera también observamos una tendencia a privilegiar las fracciones unitarias (1/n, donde n>0, $n \in N$) y, en el contexto de este tipo de fracciones, los profesores parecieron asociar dos tipos de figuras, dependiendo de si el denominador era par o impar. La tendencia a asociar las representaciones figurales continuas circulares con fracciones unitarias con denominador par fue bastante marcada y, en el caso del denominador impar, las representaciones figurales rectangulares parecieran ser las preferidas.

Respecto a los procedimientos, solo se evidenció a través del uso de materiales concretos, específicamente a las diferentes figuras que pudieran ser representadas en papel o en la pizarra (tablero); sin embargo, somos conscientes que alrededor de las fracciones existen muchos otros modos de proceder diferentes a los utilizados, incluyendo, obviamente, los procedimientos propios de los matemáticos.

Por último, en cuanto a la fenomenología, solo se asoció el concepto de fracción al clásico ejemplo de la torta. Esto evidencia una limitante que preocupa y que muestra un empobrecimiento de experiencias diferentes, tal y como lo señalaba Freudenthal, (1983) y que se repite en diferentes investigaciones realizadas al respecto (Ríos, 2019).

Este conjunto de resultados nos lleva a replantearnos a futuro los énfasis a trabajar sobre las fracciones como un tema que supere la limitada visión de parte – todo. Las otras diferentes maneras de abordar las fracciones como operador, cociente, razón o medida deberán ser trabajadas tanto en sus diferentes formas de representación, como en su fenomenología, procedimientos y definiciones. Los retos por superar el predominio de la fracción como parte – todo nos obliga como formadores a plantearnos estas nuevas tareas.

Referencias

Ávila, A. (2019). Significados, representaciones y lenguaje : las fracciones en tres generaciones de libros de texto para primaria. *Educación Matemática*, *31*(2), 22–60. https://doi.org/10.24844/EM3102.02

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á. M. R., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher ' s specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 1–18. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Cortina, J. L., Zúñiga, C., & Visnovska, J. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática*, *25*(2), 7–29. http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v25n2/v25n2a2.pdf

Doğan, A., & Işik Tertemiz, N. (2020). Fraction models used by primary school teachers. *İlköğretim Online*, 1888–1901. https://doi.org/https://doi.org/10.17051/ilkonline.2020.762538

Flick, U. (2015). *El diseño de investigación cualitativa*. Ediciones Morata, S.L.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Company, Reidel Publishing.

Liñán, M. ., Contreras, L. ., & Barrera, V. J. (2016). Conocimiento de los temas (koT). In J. Carrillo, L. . Contreras, & M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (Issue July, pp. 12–20). SGSE: Huelva. https://www.researchgate.net/publication/305205018_CONOCIMIENTO_DE_LOS_TEMAS_KOT

Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M., & Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. In E. Badillo Jiménez, N. Climent Rodríguez, C. Fernández Verdú, & M. T. González Astudillo (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: Práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 157–176). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca. https://www.researchgate.net/publication/341050692_ESTRUCTURANDO_LA_FORMACION_INICIAL_DE_PROFESORES_DE_MATEMATICAS_UNA_PROPUESTA_DESDE_EL_MODELO_MTSK

Montes, M., Pascual, M., & Climent, N. (2021). Una aproximación a la formación especializada en matemáticas de maestros egresados. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *24*(1), 83–104. https://doi.org/https://doi.org/10.12802/relime.21.2414

Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M., & Climent, N. (2015). Educación Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas Introducción. *La Gaceta de La Real Sociedad Matemática Española*, *18*(3), 1801–1817. http://hdl.handle.net/11441/51501%0A

Rau, M. A., & Matthews, P. G. (2017). How to make 'more' better? Principles for effective use of multiple representations to enhance students' learning about fractions. *ZDM Mathematics Education*, *49*, 531–544. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0846-8

Real, R., Gómez, B., & Figueras, O. (2013). Aspectos de la fracción en los modelos de enseñanza : El caso de un libro de texto. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, *30*(85), 21–36. https://www.researchgate.net/publication/341396664_Aspectos_de_la_fraccion_en_los_modelos_de_ensenanza_El_caso_de_un_libro_de_texto

Reeder, S., & Utley, J. (2017). What Is a Fraction ? Developing Fraction Understanding in Prospective Elementary Teachers. *School Science and Mathematics*, *117*(7–8), 307–316. https://doi.org/https://doi.org/10.1111/ssm.12248

Reyes, A., & Sosa, L. (2016). Caracterización del conocimiento especializado del profesor en formación inicial para enseñar la razón como un significado de la fracción. *Investigación e Innovación En Matemática Educativa*, *1*(1), 75–83. http://funes.uniandes.edu.co/15379/1/Reyes2016Caracterizacion.pdf

Ríos, Y. (2019). Diversas interpretaciones de las fracciones. In R. Flores, D. García, & I. E. Pérez-Vera (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 32, pp. 141–150). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. http://funes.uniandes.edu.co/14018/1/Rios2019Diversas.pdf

Rojas, N., Flores, P., & Carrillo, J. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, *4*, 47–64. https://www.researchgate.net/publication/334238355_Caracterizacion_del_conocimiento_matematico_para_la_ensenanza_de_los_numeros_racionales

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth inteaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14. https://depts.washington.edu/comgrnd/ccli/papers/shulman_ThoseWhoUnderstandKnowledgeGrowthTeaching_1986-jy.pdf

Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children ' s fractional knowledge depicted with circle , rectangle , and number line representations knowledge depicted with circle , rectangle , and number. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(May), 419–441. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9606-2

Valenzuela-Molina, M., Ramos, E., Reyes, P., & Rodríguez, P. (2018). Nociones básicas sobre fracción que manifiestan futuros profesores de enseñanza básica. *Actas de La XII Conferencia Argentina de Educación Matemática*, 19–28. http://funes.uniandes.edu.co/19642/

Vasco, D., Moriel, J. J., & Contreras, L. . (2017). Subdominios del mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK). In J. Carrillo-Yáñez & L. . Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de la III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 29–37). Huelva: CGSE. https://www.researchgate.net/publication/326479672_The_mathematics_teacher's_specialised_knowledge_MTSK_model

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS SOBRE NÚMEROS PERIÓDICOS

The Specialized Knowledge of Prospective Mathematics Teachers on Periodic Numbers

Galleguillos, J. [a]; Ribeiro, M. [b]

[a] Universidad de Valparaíso, Chile; [b] UNICAMP, Brasil

Temática: 1 – MTSK en la formación docente.

Resumen. En este trabajo analizamos el conocimiento especializado sobre números periódicos de un grupo de futuros profesores de matemáticas. La investigación se abordó como un diseño cualitativo básico y los instrumentos de recolección de datos comprendieron una tarea para la formación, la discusión de esa tarea y una consulta posterior. Los resultados revelaron que se desplegó un conocimiento KoT sobre la representación de los números periódicos y el conocimiento KPM al utilizar un método matemático para justificar la transformación de un número periódico a fracción. En la discusión apareció una resistencia para aceptar la igualdad $0{,}\overline{9} = 1$. Los profesores en formación sustentaron su discusión inicial en sus creencias más que en argumentos matemáticos, lo que evolucionó en momentos evaluativos posteriores.

Palabras clave. Profesores en Formación Inicial, Números Periódicos, Tareas para la formación, Creencias.

Abstract. In this work we analyse the specialized knowledge on periodic numbers of a group of prospective mathematics teachers. The research was approached as a basic qualitative design and the data collection instruments included a task for teacher education, the discussion of that task and a subsequent inquiry. The results revealed a knowledge on KoT about the representation of periodic numbers and a knowledge in the scope of KPM when using a mathematical method to justify the transformation of a periodic number to a fraction. In the discussion appeared a resistance to accept the equality $0{,}\overline{9} = 1$. The prospective teachers based their initial discussion on their beliefs rather than on mathematical arguments, which evolved in later evaluative moments.

Keywords. Prospective teachers, Periodic Numbers, Task for teacher education, Beliefs.

INTRODUCCIÓN

El profesor y su conocimiento ha resultado ser una de las mayores influencias en el aprendizaje de los estudiantes (e.g., Nye et al., 2004). Esta influencia ha llevado a enfocar la investigación en el conocimiento requerido por los profesores y de la importancia de su formación. Diversos autores señalan que los números racionales son problemáticos y complejos, tanto para estudiantes como para profesores (e.g., Streefland, 1991). Uno de las causas es el enfoque mecanicista con que se abordan las fracciones (y decimales), centrándose en la aplicación de reglas sin sentido y debido a la subestimación de la dificultad de este tema (Streefland, 1991). Así, se requiere implementar estrategias desde la formación inicial docente en que se incluya un punto de vista comprensivo de esa temática. Una forma de implementar procesos formativos que movilicen el conocimiento del profesor en formación es el diseño de tareas para la formación (Ribeiro, 2020) que permitan visualizar las falencias en el conocimiento matemático para así poder atenderlas. En este trabajo nos centramos en determinar ese conocimiento a partir de una tarea para

Galleguillos, J., & Ribeiro, M. (2021). El conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas sobre números periódicos. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 74–81). Congresseme.

la formación con foco en los números decimales periódicos (y semiperiódicos) desde la perspectiva del MTSK (Carrillo et al., 2018). Así, nos planteamos la pregunta ¿Cuál es el conocimiento especializado que muestra un grupo de profesores de matemáticas en formación inicial que se enfrentan a una tarea para la formación sobre números periódicos y qué fenómeno aparece en ese desarrollo?

REFERENTES TEÓRICOS

Números decimales periódicos

En la formación de profesores en Chile, los estándares orientadores para carreras de educación media (MINEDUC, 2012), en el eje de sistemas numéricos y álgebra, señalan que el futuro profesor o profesora debe estar capacitado para conducir el aprendizaje en cada uno de los sistemas numéricos: N, Z, Q, R y C. Uno de sus indicadores de evaluación indica que el profesor debe operar con números enteros y racionales y comparar números racionales. Para cumplir este indicador planteamos tareas para la formación del fututo profesor apuntando al desarrollo del conocimiento sobre sistemas numéricos y álgebra, incluyendo actividades con números racionales, en particular números decimales infinitos periódicos y semiperiódicos y sus distintas representaciones.

Un asunto que puede causar confusión dentro de los números decimales periódicos es el de las dos diferentes representaciones del número $0,\overline{9}$ y 1, que corresponde a la igualdad $0,\overline{9} = 1$. Rittaud y Vivier (2013) reportaron las dificultades de estudiantes universitarios para establecer que $0,\overline{9} = 1$, ya que la mayoría de ellos respondieron que esos números eran diferentes. El estudio realizado con estudiantes franceses explica que esos estudiantes debían conocer esa igualdad desde el décimo grado de escolaridad (por los estándares de esa época en Francia) y, además, esa igualdad había sido enseñada durante el primer semestre universitario. Esto muestra las dificultades de los estudiantes para asumir la veracidad de esa igualdad. Beltrán (2013) estudió las dificultades de estudiantes con los números periódicos, encontrando que los estudiantes trabajan con números periódicos como si fueran decimales finitos y explican que $0,\overline{9} = 1$ usando el redondeo.

En este estudio, nos planteamos comprender y fortalecer ese conocimiento matemático de futuros profesores por medio de una tarea para la formación basada en el modelo MTSK.

El conocimiento especializado del profesor de matemática (MTSK)

En las últimas décadas la formación de profesores ha tomado un importante giro focalizándose en la necesidad de que la formación de profesores no solo tenga un foco en un mayor conocimiento de la disciplina que se enseña (Davis & Simmt, 2006). Los investigadores están de acuerdo que la formación del profesor de matemáticas no corresponde a la misma de otras profesiones, sino que es especializada (e.g., Carrillo et al., 2018). El *Mathematics Specialized Teachers' Knowledge* (MTSK) (Carrillo et al., 2018) es un modelo sobre el conocimiento del profesor que considera el conocimiento del profesor de matemáticas en tres dominios: *Mathematics Knowledge* (MK); *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) y creencias de y sobre la matemática y su enseñanza (Figura 1). En este trabajo nos enfocamos en analizar el *Mathematical Knowle*dge (MK) y *Beliefs* (Creencias).

El *Mathematical Knowledge* (MK) corresponde al conocimiento que posee el profesor de matemáticas como una disciplina científica dentro de un contexto educacional (Carrillo et al., 2018). MK se divide en tres subdominos: *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge of Structure of mathematics* (KSM) y *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM).

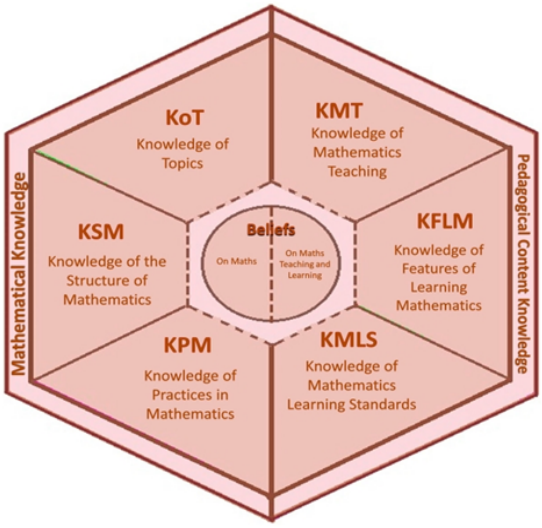


Figura 1. Modelo MTSK

El *Knowledge of Topics* (KoT) describe qué y de qué manera el profesor conoce los tópicos que enseña, lo que implica un conocimiento profundo del conocimiento matemático y de su significado. KoT comprende categorías de (1) procedimientos, (2) definiciones, propiedades y fundamentos, (3) representaciones y (4) Fenomenología y aplicaciones. El *Knowledge of Structure of mathematics* (KSM) corresponde al conocimiento del profesor sobre las conexiones entre elementos matemáticos. Este conocimiento considera las conexiones interconceptuales y el papel de los ítems matemáticos en la construcción de otros ítems. Está relacionado con un aumento en la complejidad o con simplificación. Comprende categorías en relación a conexiones. El *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM) corresponde a cualquier actividad matemática llevada a cabo sistemáticamente, lo que es la base de la creación matemática. Este conocimiento incluye saber sobre demostración, justificación, definición, hacer definiciones e inducciones, dar ejemplos y comprender el rol de los contraejemplos.

El MTSK incluye las creencias (*Beliefs*) sobre la matemática y sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Las creencias están ubicadas en el centro de la figura indicando que existe una reciprocidad entre las creencias y los dominios del conocimiento (Carrillo et al., 2018) y que ellos se encuentran entrelazados (Ribeiro et al., 2019). El modelo MTSK considera las creencias como sistémicas, que forman parte de un sistema más amplio que da forma al conocimiento profesional del profesor.

MÉTODOS

El estudio fue abordado como una *investigación cualitativa básica* (Merriam & Tisdell, 2015), en la que seguimos un proceso descriptivo e interpretativo. Los participantes del estudio fueron 8 futuros profesores de matemática (FP) que fueron parte de una asignatura de didáctica de la matemática de una universidad chilena y que estaban siendo formados para ejercer en la enseñanza media (del 7mo al 12vo de escolaridad). Por la situación del Covid-19, la asignatura fue dictada a distancia con encuentros síncronos y actividades asíncronas usando una plataforma digital.

Los instrumentos de recolección de informaciones fueron videos de clases y su transcripción, las producciones escritas de la tarea para la formación y una tarea posterior. Las identidades de los participantes del estudio han sido resguardadas y las videograbaciones de clases fueron autorizadas por los participantes. La tarea para la formación se compone de dos partes (Figura 2 y Figura 3).

Parte I

Para recordar, desarrolle los siguientes ejercicios

A. Convertir de número decimal a fracción:
   1) $0,\overline{24}=$
   2) $0,21\overline{4}=$
   3) $0,3\overline{57}=$
   4) $6,1\overline{82}=$
   5) $3,2\overline{8}=$

B. ¿Para qué nivel de escolaridad corresponde este tipo de ejercicios?

C. ¿Cómo se explica en el texto escolar del currículo nacional?

D. ¿Cómo explicaría usted a sus estudiantes el procedimiento para resolver $0,\overline{16}$?

Figura 2. Tarea para la formación – Parte I

Parte II

Observe las siguientes respuestas del estudiante Carlos ante el ejercicio:
Escribe un número racional en el recuadro que se pueda encontrar entre cada par de números:

a) $\frac{3}{250}$ $\boxed{\frac{14}{10}}$ $0,04|$

b) $-4,1$ $\boxed{-4,010}$ $-4,09$

c) $7,99$ $\boxed{8,\overline{9}}$ 9

A. De acuerdo con las respuestas de Carlos, dadas en el recuadro, indique cuáles son las dificultades que este estudiante tiene al enfrentarse a estos ejercicios.

B. Carlos piensa que sus resoluciones son todas correctas. Entregue un feedback constructivo dirigido a Carlos, en caso de algún error.

Figura 3. Tarea para la formación – Parte II

La tarea para la formación - Parte I (Figura 2) contiene una actividad sobre los conocimientos de (A) transformar números decimales periódicos y semiperiódicos a fracción, (B) el nivel de escolaridad de esos ejercicios, (C) cómo se explica este procedimiento en el texto escolar y (D) cómo explicarían a sus estudiantes el procedimiento para resolver $0,1\overline{6}$.

La segunda parte (Figura 3) se focaliza en el conocimiento involucrado en analizar las producciones de un estudiante de secundaria (Carlos), al que se le pidió llenar el recuadro con un número racional que se encuentre entre los dos números que están uno a la izquierda y otro a la derecha del recuadro.

Antes de resolver la tarea, se discutieron de modo síncrono los puntos críticos de la actividad (¿qué pregunta de la tarea no saben responder o no están seguros de cómo abordarla? y ¿qué dudas les surgen de las preguntas?, entre otras) y, después de unos tres días, los profesores en formación debían responder la tarea por escrito de modo individual.

En el análisis de las informaciones seguimos un proceso inductivo para llenar las categorías a partir de los datos, agrupando ese conocimiento en los subdominios del conocimiento matemático (MK) del MTSK y en las Creencias (*Beliefs*). Cada conocimiento que emergió de los datos lleva un código compuesto por la sigla del subdominio del conocimiento, una letra representativa de la categoría y un número secuencial por el orden en que aparecen en el análisis y no por priorización de uno en detrimento de otro. Por ejemplo, KoT-p1, es un conocimiento del subdominio KoT y de la categoría procedimientos. Asociado al KPM emerge un conocimiento que aun no es parte de una categorización y por eso consideramos una etiqueta "justificación matemática" y asociamos la sigla "j" para diferenciar de la nomenclatura de categoría. Presentamos en primer lugar el análisis de la Parte I y, después, lo que se refiere al conocimiento asociado a la Parte II de la tarea.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

En la Parte I de la tarea (Figura 2) los FPs indicaron que sabían cómo efectuar las transformaciones de un número periódico a fracción, pero se sentían preocupados por no saber el porqué de ese algoritmo. Entonces, la profesora del curso (primera autora) explicó un procedimiento matemático para transformar un decimal periódico a fracción ejemplificando con un caso particular, con el número $0{,}\overline{5}$ (Método 1).

Método 1. Método para transformar un número periódico a fracción a partir de una ecuación.

Sea $\quad x = 0,\overline{5}$

Multiplicando por 10 $\quad 10x = 5,\overline{5}$

Restando:

$$\begin{array}{r} 10x = 5,\overline{5} \\ -(x = 0,\overline{5}) \\ \hline \end{array}$$

$$10x - x = 5,\overline{5} - 0,\overline{5}$$
$$9x = 5$$
$$x = \frac{5}{9}$$

De esta forma, se visibiliza en este caso particular el procedimiento de transformación del número decimal periódico $0{,}\overline{5}$ a fracción. Los FPs debían responder a la tarea al caso del número $0,\overline{16}$, que requiere alguna especificidad.

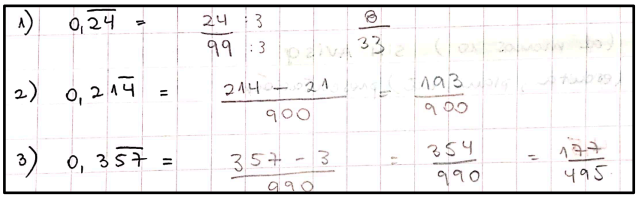


Figura 4. Recorte de respuesta pregunta (a), Parte I

Los FPs respondieron a la primera pregunta de la tarea sin dificultades. En la respuesta de la pregunta 1 (Figura 4) los FPs revelan conocer el procedimiento para transformar un número periódico a fracción, lo que corresponde al conocimiento de los tópicos (KoT) y de la categoría procedimientos (**KoT-p1: Conocer el método para transformar un número periódico a fracción aplicando el algoritmo usual)**. A partir de la pregunta 2 (Figura 4) se muestra que los FPs conocen el método para transformar un número semiperiódico a fracción **(KoT-p2: Conocer el método para transformar un número semiperiódico a fracción aplicando el algoritmo usual)**.

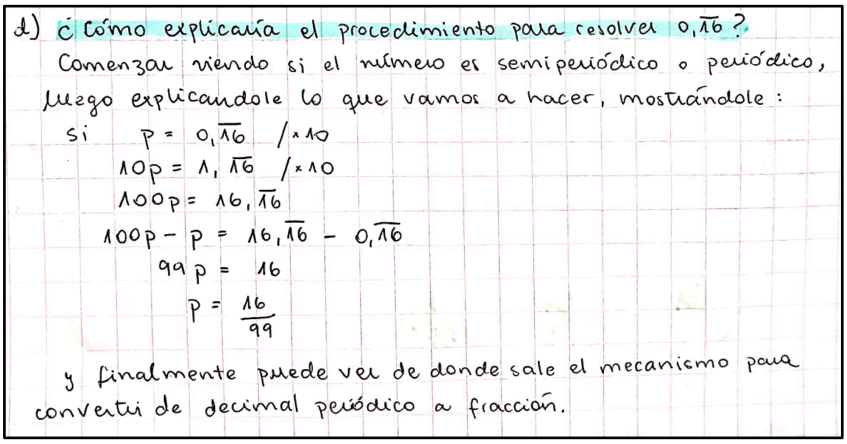

d) ¿Cómo explicaría el procedimiento para resolver $0,\overline{16}$?
Comenzar viendo si el número es semiperiódico o periódico, luego explicándole lo que vamos a hacer, mostrándole:
si $p = 0,\overline{16}$ $/\times 10$
$10p = 1,\overline{16}$ $/\times 10$
$100p = 16,\overline{16}$
$100p - p = 16,\overline{16} - 0,\overline{16}$
$99p = 16$
$p = \frac{16}{99}$
y finalmente puede ver de donde sale el mecanismo para converti de decimal periódico a fracción.

Figura 5. Respuesta pregunta (d), Parte I

Siguiendo con nuestro interés en determinar el conocimiento matemático de los FPs, saltamos a la pregunta (d): ¿Cómo explicarías el procedimiento para resolver $0,\overline{16}$?. A partir de la resolución de un FP (Figura 5) observamos que se aplicó el procedimiento de transformación a fracción usando operaciones sobre números periódicos en una ecuación – método 1 (**KoT-p3: Conocer un procedimiento para transformar un número periódico a fracción realizando operaciones en una ecuación – utilizando el método 1**).

Ejemplo: Transforma $1,4\overline{5}$ a fracción:

En este caso debemos dejar el periodo como decimal por ende se debe multiplicar por 100 para que quede la cifra como valor entero y 5 como decimal infinito.

x=$1,4\overline{5}$
x=$1,4\overline{5}/* 100$
100x=$145,\overline{5}$ (ecuación 1)
Por otro lado, debemos eliminar la parte decimal por ende se debe restar $0,\overline{5}$ y ¿cómo lo podemos obtener?

Al x debemos multiplicarlo por 10 de forma que solo la parte periódica quede como decimal, luego el valor que nos da podemos restar con la ecuación 1.

x=$1,4\overline{5}$
x=$1,4\overline{5}/* 10$
10x=$14,\overline{5}$ (ecuación 2)
Entonces, Ecuación 1 menos ecuación 2.
100x=$145,\overline{5}$
- (10x= $14,\overline{5}$)
100x-10x=$145,\overline{5} - 14,\overline{5}$
90x=145-14
90x=131
x=131/90
por lo tanto $1,4\overline{5} = \frac{145-14}{90} = \frac{131}{90}$

Figura 6. Ejemplo de transformación de un número semiperiódico a fracción

Para esa misma pregunta (d) otro FP (Figura 6) entrega un ejemplo de transformación a fracción con un número semiperiódico en un caso más complejo, para lo cual trabaja matemáticamente para transformar $1,4\overline{5}$ a fracción. La producción de este FP muestra el uso de un ejemplo y un trabajo matemático en que usa el método 1 (basado en un número periódico) para justificar matemáticamente el caso de un número semiperiódico. Ambos asuntos implican que se movilizó un conocimiento asociado al KPM. Del análisis emerge la etiqueta justificación matemática ("j") que no es aún una categoría ya que requiere de discusiones más amplias (**KPM-"j1": Conocer cómo justificar matemáticamente la**

transformación de un número semiperiódico a fracción a partir de un caso más simple). Notamos que inicialmente los FPs desconocían cómo justificar el algoritmo de transformación de números periódicos a fracción.

En la discusión de la Parte II de la tarea (Figura 3), los FPs identificaron correctamente los errores del estudiante a las preguntas (a) y (b), sin embargo, no identificaron el error en el caso (c), indicando en la discusión que ellos creen que $8,\overline{9} < 9$ es correcto. Aunque los FPs poseen un conocimiento del procedimiento de transformar un número periódico a fracción **(KoT-p1)**, el registro de representación en decimal parece sustentar la creencia que $0,\overline{9}$ y 1 son cantidades distintas **(Belief-1: Creencia que distintos registros de representación no pueden asociarse a la misma cantidad ($0,\overline{9} < 1$)).**

Los FPs en ese momento conocían el algoritmo y el método 1 y realizaron en conjunto esos procedimientos, sin embargo, aún así, ellos manifestaron que creían que $0,\overline{9}$ es menor que 1, lo que evidencia una *resistencia* para aceptar esa igualdad matemática. Su discusión se basó en sus creencias más que en argumentos matemáticos. La *resistencia* que apareció en la discusión corresponde a una manifestación que hace visible una creencia (Ribeiro & Carrillo, 2011) y puede ser explicada porque existen dos representaciones numéricas de los números $0,\overline{9}$ y 1 para un mismo valor. En una tarea posterior se consultó a los FPs sobre la veracidad de $0{,}7\overline{9} < 8/10$. Una FP respondió:

FP: La respuesta está incorrecta, $0{,}7\overline{9}$ no es menor a 8/10, es igual, ya que se comete un error muy común y que no siempre se toca, y es pensar que $0,\overline{9}$ no es igual a 1. Yo personalmente no lo podía entender ya que, para mí, $0,\overline{9}$ es casi 1, no llega a 1, pero al hacer mis propios cálculos me contradigo. $0,\overline{9}$ en fracción es 9/9=1. (…) luego de una pelea en mi cabeza entendí que las matemáticas son perfectas, aunque uno no lo entienda. $0{,}7\overline{9}$=0,8=8/10.

En ese texto se visualiza una resolución de la resistencia en que la FP pasó por conocer una justificación matemática, discutir ampliamente sobre ello y volver a enfrentarse más tarde a una situación similar, asumiendo finalmente que "la matemática es perfecta". Los conocimientos y creencias que emergieron de los datos de este trabajo se resumen en la Tabla 1.

Tabla 1. Conocimiento matemático y creencias desplegado

	Categorías	Conocimiento desplegado	
KoT	Procedimientos	KoT-p1:	Conocer el método para transformar un número periódico a fracción aplicando el algoritmo usual.
		KoT-p2:	Conocer el método para transformar un número semiperiódico a fracción aplicando el algoritmo usual.
		KoT-p3:	Conocer cómo transformar un número periódico a fracción realizando operaciones en una ecuación - utilizando el Método 1.
KPM	Justificación matemática	KPM-j1:	Conocer cómo justificar matemáticamente la transformación de un número semiperiódico a fracción a partir de un caso más simple.
Beliefs	---	Belief-1:	Creencia que distintos registros de representación no pueden asociarse a la misma cantidad ($0,\overline{9} < 1$).

CONCLUSIONES

En este trabajo, también por el foco de la tarea para la formación (e.g., Ribeiro, 2020), se encontraron conocimientos matemáticos asociados al KoT y al KPM. Se visualiza la importancia de que la formación de profesores incluya la discusión que permita entender el porqué de los algoritmos para convertir decimales periódicos a fracción. Además, apareció una *resistencia* de los futuros profesores para aceptar la igualdad $0,\overline{9} = 1$. Esa resistencia fue resuelta por medio del conocimiento de la justificación matemática, por la discusión conjunta y, finalmente, por la aceptación de la veracidad de la matemática. Los argumentos de los profesores en formación variaron durante la experiencia desde argumentos basados en sus creencias a argumentos matemáticos. Así, las creencias acerca de las matemáticas junto con las carencias en el conocimiento del porqué de un algoritmo pueden llevar a la resistencia en aceptar una verdad matemática, similarmente como fue encontrado por Di Martino et al. (2016) en algoritmos de sustracción.

Referencias

Beltrán, Y. (2013). *Competencias en los números decimales periódicos* [Tesis de máster]. Universitat de Valencia.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20(3)*, 236-253.

Davis, B., & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-Teaching: An Ongoing Investigation of the Mathematics that Teachers (Need to) Know. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(3), 293-319. https://doi.org/10.1007/s10649-006-2372-4

Di Martino, P., Mellone, M., Minichini, C., & Ribeiro, M. (2016). *Prospective teachers' interpretative knowledge: Giving sense to substraction algorithms* (M. Zehetmeier, M. Ribeiro, M. Roesken-Winter, & B. Potari, Eds.; pp. 66-75). ERME.

Merriam, S. B., & Tisdell, E. J. (2015). *Qualitative research: A guide to design and implementation* (Fourth edition). John Wiley & Sons.

MINEDUC. (2012). *Estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media*. LOM Ediciones.

Nye, B., Konstantopoulos, S., & Hedges, L. V. (2004). How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 237-257.

Ribeiro, M. (2020). Discutindo o conhecimento especializado do formador de professores de e que ensinam matemática—Um exemplo focando tarefas para a formação. En A. Traldi, D. S. Tinti, & R. M. Ribeiro (Eds.), *Formação de professores que ensinam matemática: Processos, desafios e articulações com a educação básica* (SBEM-SP, pp. 241-261).

Ribeiro, M., & Carrillo, J. (2011). The role of beliefs and Knowledge in practice. En B. Roesken & M. Casper (Eds.), *Current state of research on mathematics beliefs* (Professional School of Education, pp. 192-201). Ruhr-Universität Bochum.

Ribeiro, M., Martignone, F., Aslan-Tutak, F., Montes, M., & Kuntze, S. (2019). *Introduction to the papers of TWG20: Mathematics teacher knowledge, belief, and identity*. Eleventh Congress of the European Society for Research in Matematics Education, Utrecht, Netherland.

Rittaud, B., & Vivier, L. (2013). Different Praxeologies for rational numbers in decimal system—The 0,999... Case. En B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of VIII Congress of the European Society for Research in Matematics Education (CERME 8)* (pp. 363-372). Middle East Technical University.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*. Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-011-3168-1

ENSINO DE SIMETRIA POR MEIO DA LITERATURA INFANTIL

Teaching Symmetry Through Children's Literature

Jesus, P. dos S. de [a]; Cassimiro, S. R. da S.[b]; Alencar, E. S. de [c]

[a] UEMS – Dourados; [b] UEMS – Dourados; [c] UFGD

Temática: 1 – MTSK na formação docente.

Resumo. Esta pesquisa tem como objetivo identificar os conhecimentos dos professores quanto ao uso da literatura infantil para o ensino da simetria. Discutimos o conhecimento especializado do professor, a partir do modelo teórico *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK), em um contexto de formação continuada. Os sujeitos de nossa pesquisa foram professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Apresentamos propostas de atividades a partir de três obras da literatura infantil. Nesta comunicação apresentamos a sequência desenvolvida em uma das obras selecionadas. Buscou-se possibilitar uma interlocução entre as histórias infantis e o conteúdo de simetria. A partir dos dados analisados, constatamos que as contribuições da literatura infantil para o entendimento dos conceitos relacionados ao ensino da Simetria possibilitou conhecer os conhecimentos dos professores em formação.

Palavras-chave: Educação matemática, Formação de professores, Literatura infantil, MTSK.

Abstract. This research aims to identify the knowledge of teachers regarding the use of children's literature for teaching symmetry. We discuss the specialized knowledge of the teacher, from the theoretical model Mathematics Teachers Specialized Knowledge (MTSK), in a context of continuing education. The subjects of our research were teachers from the early years of elementary school. We present proposals for activities based on three works of children's literature. In this communication, we present the sequence developed in one of the selected works. We sought to enable a dialogue between children's stories and symmetry content. From the analyzed data, we found that the contributions of children's literature to the understanding of concepts related to the teaching of Symmetry made it possible to know the knowledge of teachers in training.

Keywords: Math education, Teacher training, Children's literature, MTSK.

INTRODUÇÃO

Ao considerar que a literatura é essencial na vida de qualquer pessoa, em todas as idades, e que temos contato com diferentes histórias por diversos meios, pensamos que ela pode ser utilizada para o ensino e aprendizagem do conteúdo de simetria. As histórias infantis podem contribuir para a apresentação de determinados conceitos matemáticos às crianças possibilitando que o processo de ensino e aprendizagem se torne mais prazeroso e compreensível (Smole et al., 2007).

Escolhemos o conteúdo de Simetria pelo fato de ser ainda uma temática pouco explorada. Pavanello (1989) já alertava que, apesar da área de geometria estar sendo abordada em sala de aula, ainda não era apresentada adequadamente, em virtude das abordagens superficiais ou mesmo inexistente, isso porque os professores não se sentiam preparados para o trabalho com os conteúdos da área de geometria. Em publicações mais atuais, observamos que apesar da área dos conteúdos de geometria estar sendo mais explorada em sala de aula, ainda há uma escassez de investigações deste conteúdo nos anos iniciais do Ensino Fundamental (EF).

Jesus, P. dos S. de, Cassimiro, S. R. da S., & Alencar, E. S. de (2021). Ensino de simetria por meio da literatura infantil. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 82–89). Congresseme.

De modo geral, em nossas buscas sobre ensino aprendizagem de simetria nos anos iniciais do EF no portal de periódicos da Capes e Google Acadêmico, encontramos somente 10 pesquisas na área, com a leitura dos resumos, verificamos que somente 4 destes trabalhos Salles et al. (2012) , Santos & Teles (2012), Rocha et al. (2013), Lopes & Silva (2015) contribuiriam com esta investigação.

Salles et al (2012) abordam o tema da simetria e a dificuldade do aluno em aprender a matemática, além de defenderem a importância de os conceitos relacionados à geometria estarem consistentes na memória do aluno. Santos & Teles (2012) identificaram como é abordado o conteúdo de simetria e analisaram atividades que articulam simetria e artes visuais apresentados nos livros didáticos de Matemática distribuídos para os anos iniciais do EF aprovados pelo PNLD (Programa Nacional do Livro e do Material Didático) de 2010 com circulação até 2012. As autoras enfatizam a importância de se trabalhar a simetria ao longo dos anos iniciais do EF, promovendo situações que estimulem o aluno a pensar sobre conceitos matemáticos.

Os estudos de Rocha et al. (2013) e de Lopes & Silva (2015) apresentam reflexões e resultados obtidos a partir de propostas de experiências de ensino (sequência didática), ambas as pesquisas são desenvolvidas com alunos do 3º ano do EF. Os autores das duas pesquisas apontam que a simetria ainda é um conteúdo pouco abordado nas ações didáticas desenvolvidas em sala de aula, mesmo que seja citada como um dos conteúdos obrigatórios para desenvolver nos anos iniciais do EF nos documentos oficiais.

Diante dessa breve revisão sobre o ensino de simetria nos anos iniciais do EF, notamos a pouca abordagem da Simetria nas formações e por consequência nas ações de ensino e aprendizagem, e assim justificamos a realização da investigação que aqui apresentamos.

Mostramos nessa comunicação parte dos dados de uma dissertação de mestrado desenvolvida no projeto de pesquisa “Criação de histórias de Literatura Infantil para o ensino de Matemática” que foi financiado pelo Instituto Serrapilheira. Salientamos que o projeto possui parecer favorável do comitê ética sob o número 2.756.607 e com número de protocolo número 90142518.0.0000.5160.

Temos como objetivo identificar os conhecimentos dos professores quanto ao uso da literatura infantil para o ensino da simetria. Partindo deste princípio, procuramos responder a seguinte questão: Quais são os conhecimentos revelados pelos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental quanto ao uso da literatura infantil para a compreensão de conceitos relacionados ao ensino da simetria?

Na próxima seção, apresentaremos o referencial teórico com o modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (*Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* – MTSK) baseado nos estudos de Carrillo-Yañez et al. (2018).

MATHEMATICS TEACHER’S SPECIALISED KNOWLEDGE –MTSK

Como referencial teórico utilizado para a análise as ações formativas desenvolvidas nos fundamentaremos nos estudos Carrillo-Yañez et al. (2018), que utilizam o modelo do Conhecimento Especializado em Professores de Matemática – MTSK (Figura1). Observamos que este modelo apresenta o conhecimento do professor em todos os seus domínios e subdomínios, inclui ainda as crenças e os domínios afetivos que influenciam o trabalho do professor de matemática.

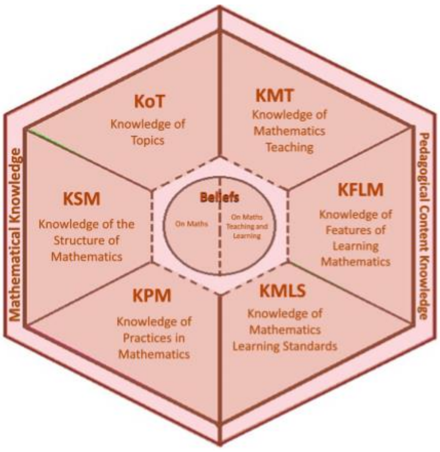


Figura 1. Modelo MTSK, Carrillo-Yañez et al. (2018, p. 241).

Carrillo-Yañez et al. (2018) um dos artigos sobre o modelo do conhecimento especializado do professor apresentaram dois grandes domínios: O Conhecimento Matemático (MK), que refere-se ao conhecimento do professor sobre as conexões, regras e características da matemática, é composto pelos subdomínios: Conhecimento dos Tópicos (KOT), Conhecimento da estrutura Matemática (KSM) e o Conhecimento da Prática Matemática (KPM).

O segundo grande domínio é o Conhecimento didático do conteúdo (PCK), que é composto por: conhecimento das características da Matemática de Aprendizagem (KFLM), Conhecimento do ensino de Matemática (KMT) e o Conhecimento de parâmetros de aprendizagem da Matemática (KMLS). Refere-se aos meios e recursos utilizados para o ensino e aprendizagem de Matemática, levando em consideração o conhecimento do currículo, a análise das estratégias dos estudantes para a resolução das situações de problemas matemáticos.

Os seis subdomínios descrevem como entender o conhecimento específico de um professor de Matemática e servem como "categorias" de análise em investigações.

CAMINHOS METODOLÓGICOS

A metodologia desenvolvida no projeto "Criação de histórias de Literatura Infantil para o ensino de Matemática" foi o *Design Experiments.* Na perspectiva de Cobb et al. (2003) deverá consistir na concepção de uma forma peculiar de abordagem ou exploração de conceitos que envolvem o conhecimento matemático. Essa metodologia possui "sistemas interativos em uma coleção de atividades ou uma lista de fatores separados que influenciam aprendizagem" (Cobb et al., 2003, p.11).

As etapas desenvolvidas no projeto foram: I) Aplicação de questionário, II) Estudo sobre a Literatura infantil e a Matemática e apresentação de uma sequência didática aos professores; III) Criação de histórias infantis coletivamente para o desenvolvimento de conceitos matemáticos; IV) Discussão e análise das criações coletivas para reescritas e adequações ; V) Criação das ilustrações e suas análises; VI) Diagramação para e-book animado e para os livros convencionais.

Cabe salientar que a pesquisa de mestrado apresentada nesta comunicação foi desenvolvida na segunda etapa do *Design Experiment* formativo. Esta formação foi desenvolvida em período de Pandemia e por este motivo a formação foi realizada utilizando a plataforma moodle, com duração de três semanas consecutivas com um grupo de professores da rede pública dos anos iniciais do EF em uma cidade do interior do Mato Grosso do Sul. Nessa plataforma foram disponibilizadas as atividades, vídeos, interações e foi solicitada uma tarefa aos professores cursistas.

Por meio da exploração de histórias infantis, procuramos construir e discutir sequências didáticas que levem a compreender o conteúdo de simetria. Para o desenvolvimento da sequência didática, selecionamos três livros que são disponibilizados às escolas públicas do Brasil, por meio do programa PNBE (Programa Nacional da Biblioteca Escolar): Chapeuzinho Amarelo; O gato Massamê e aquilo que ele vê; e Trudi e Kiki. Os livros foram explorados como intuito de desenvolver atividades e construir uma sequência didática formativa.

Visando cumprir o objetivo da pesquisa, foi necessário estabelecer alguns eixos de análise que abarcaram o contexto da história, o conteúdo matemático e as ilustrações. Os eixos foram: I) O contexto da história, com o intuito de investigar qual o assunto tratado na história e a presença de possíveis sugestões de atitudes para o leitor e quais; II) O conteúdo matemático, com o objetivo de verificar qual o conceito matemático presente no texto, se a Simetria aparece de forma mais implícita ou de forma mais explícita.

Aqui nesta comunicação, apresentamos somente a sequência de atividades propostas a partir da obra O gato Massamê e aquilo que ele vê:

Tarefa 1: Reconhecimento de figuras simétricas e assimétricas nas ilustrações do livro. Nesta tarefa o professor formador deve fazer uma abordagem sobre os conceitos de simetria e assimetria. Na sequência, os professores em formação devem identificar imagens simétricas e assimétricas presentes no livro. Para a tarefa ter uma dinâmica mais organizada, o professor formador pode dividir a turma em grupos, assim estará também estimulando o trabalho em equipe. A seguir, apresentamos a descrição de algumas cenas em que o conceito de simetria pode ser identificado pelos alunos:

Cena 1: As páginas 4 e 5 do livro compõem a ilustração do gato Massamê em um tamanho grande, seu corpo ocupa parte da página 3 também. Em sua calda tem um gato menor, usando roupa, chapéu e botas. Nesta cena é possível identificar a simetria no rosto inteiro do gato Massamê. Ao traçarmos uma linha vertical imaginária no meio de sua face, fica evidente que os dois lados são idênticos. Também é possível observar a simetria no chapéu e na roupa do gato menor.

Cena 2: Nas páginas 10 e 11 nos deparamos com diferentes objetos que o gato Massamê perseguiu em sua busca pela flor/borboleta que ele tanto queria encontrar. Entre as figuras que identificamos a simetria, destaca-se a pipa, os laços presos na linha da pipa, as borboletas e o focinho do gato.

Cena 3: Na página 14, o gato Massamê está dormindo no colo da menina Luísa. Nesta cena, destaca-se mais uma vez o rosto do gato, em que é possível apontar o conceito de simetria.

Cena 4: Nas páginas 22 e 23, é retratado o momento de felicidade do gato Massamê, da gata Fada Missimi e seus filhotes. Nesta cena é possível identificar a simetria no rosto de alguns gatos e nos desenhos de corações espalhados pelas páginas.

Para o reconhecimento do que é simetria e assimetria por meio das ilustrações, é aconselhável que o professor oriente quais figuras correspondem realmente a esses conceitos. O conceito de simetria é baseado na ideia de transformações de figuras, objetos ou parte de objetos de tal modo que a estrutura dessa figura seja preservada e/ou inalterada. Essas transformações são: Translação (a imagem é deslocada, movimentada observando-se uma distância, sentido e direção); Rotação (a imagem é girada em relação a um ponto -centro de simetria- e sob um determinado ângulo); Reflexão (a imagem é refletida em relação a uma reta - eixo de simetria- vertical ou horizontal). Na transformação de Reflexão temos a simetria bilateral ou real (divide o elemento dois lados iguais/um único eixo de simetria) e simetria radial (vários lados iguais).

Na sequência, propusemos uma tarefa para o professor refletir sobre o eixo de simetria: utilizando tinta ou cola colorida para desenhar as figuras identificadas pelos alunos. O primeiro passo da tarefa é dobrar uma folha sulfite ao meio, desenhar de um lado a metade da figura escolhida. Ainda com a tinta ou a cola molhada, cada aluno deverá dobrar a folha e, posteriormente, abri-la para ver o seu desenho completado do outro lado que estava em branco. Neste momento é possível explorar o eixo de simetria e a própria simetria da figura.

Tarefa 2: Confecção de pipas. Nesta tarefa é construir uma pipa, baseada na ilustração em que o gato Massamê persegue uma pipa acreditando ser sua amada flor. A tarefa permite que o professor possa explorar o conceito de simetria, relacioná-lo ao livro e à realidade do aluno, em uma tarefa prática e criativa; além de despertar ou reforçar a noção dos componentes geométricos presentes na pipa. A pipa e a decoração dela devem ser simétricas em relação à reta vertical que passa pelo centro da pipa. Para a realização da atividade, os seguintes materiais são necessários: 2 varetas (palito de churrasco, bambu ou palha de coqueiro); Fita adesiva colorida; Tesoura sem ponta; Papel de seda; Papel crepom ou seda (para a rabiola); Linha nº 10.

Primeiro, é necessário cortar o bambu para fazer as varetas. Se possível, é melhor que cada aluno, ou o professor, traga as varetas prontas de casa, já cortadas, para que não corra riscos de se machucar durante a aula. Confira o passo a passo para a confecção da pipa: I) Recorte o papel de seda em formato de quadrado, com aproximadamente 30 cm; II) Faça a amarração das varetas. Comece com a vareta de cima: envolva com a linha em diagonal de um lado, depois de outro, formando um X. Mova a vareta "base" algumas vezes: se a vareta presa a ela não balançar, é porque está firme. Dê um nó; III) Amarre a linha para puxar a pipa a partir do nó; IV) Coloque a armação sobre o papel de seda que escolheu para o fundo, risque uma pequena sobra (1 cm, aproximadamente) em torno e recorte; V) Dobre a borda do papel e cole sobre a armação, fazendo piques com a tesoura nos pontos em que as varetas estão amarradas; VI) Por último, faça uma rabiola bem colorida, enfeite com o papel crepom ou papel de seda e depois amarre na pipa (na parte de baixo da vareta reta).

Esta tarefa possibilita relacionar a simetria a outros conteúdos da matemática, como, por exemplo, medidas de comprimento. A expectativa é que a tarefa proporcione oportunidades de medir, dobrar, recortar, além de desafiar o aluno a verbalizar suas observações em relação à forma, ao tamanho e à distância de cada ponto das figuras em relação ao eixo de simetria.

Tarefa 3: Desenho do personagem principal em papel quadriculado. Nesta atividade, ao apresentá-la aos professores em formação, a intenção é contextualizar o conceito de simetria de reflexão. Para a realização da atividade, deve ser entregue um papel quadriculado para cada aluno, em que apenas a metade da imagem de personagens e objetos presentes na história esteja desenhada, como, por exemplo, o gato Massamê, a menina Luísa, borboletas, flores, laços. Os alunos terão que completá-las, seguindo o conceito de simetria. O professor formador deve seguir observando o desenvolvimento da tarefa sempre reforçando os conceitos matemáticos relacionados ao conteúdo de simetria.

Após apresentar e desenvolver as atividades descritas ao longo da formação continuada, propomos aos professores cursistas a elaboração de um plano/tarefa que vise o ensino e aprendizagem do conteúdo de simetria aos anos iniciais do Ensino Fundamental, tendo como base a utilização de um livro infantil de livre escolha. Orientamos que no plano deveria constar: o resumo da história do livro e as orientações sobre o desenvolvimento da(s) atividade(s). Concluímos o curso com o planejamento de uma tarefa e, por meio dela tivemos os dados obtidos para a análise dessa pesquisa, no qual apresentaremos o planejamento desenvolvido por uma das professoras em formação.

ANÁLISE DO PLANEJAMENTO DESENVOLVIDO PELA PROFESSORA

Apresentamos nossas análises sobre o planejamento apresentado por uma professora cursista. O trabalho dessa professora foi selecionado tendo em vista que entre o grupo de professoras que autorizou a investigação, seu planejamento demonstrou reflexões que pudessem nos auxiliar para a resposta de nossa questão de pesquisa. A partir das descrições, iniciamos a análise observando que conhecimentos a professora revelou possuir acerca do conceito de simetria. Para isso, apresentaremos trechos das tarefas desenvolvidas pela Professora.

A Professora apresentou um planejamento para o 1° ano dos anos iniciais do EF. O livro infantil escolhido pela participante foi *As aventuras de Guto*, de Aldrin Cleyde de Cunha, Ana Paula Pachega, Daiane Marcelino Cabral, Delma Rita Gomes, Edvonete Souza de Alencar, Janaina da Silva Lourenção, Juscier Mamoré, Miguel Ribeiro e Paula Diana Moraga. A Professora especificou em seu planejamento a unidade temática, os objetos de conhecimento, as habilidades e as competências específicas de matemática para o Ensino Fundamental a serem desenvolvidas nas tarefas.

Diante das informações destacadas no planejamento da Professora, podemos destacar o subdomínio KMLS presente na organização do plano. O KMLS diz respeito ao conhecimento de parâmetros de aprendizagem da matemática, que se refere a especificações curriculares envolvendo o que está previsto em cada etapa da educação escolar em termos de conteúdos e competências. A Professora apresenta o subdomínio ao apontar o que está estipulado ao aluno aprender no sequenciamento de conteúdo de cada ano e quais razões que o fundamentam, segundo a BNCC (2017).

O conteúdo de simetria é citado especificamente no 4º ano do Ensino Fundamental como objeto de conhecimento na BNCC, mas a Professora introduziu o conceito de simetria na tarefa de uma turma de 1º ano do Ensino Fundamental. Este fato nos leva a inferir que a professora, além do conhecimento KMLS, ao mencionar as referências curriculares, revela também estabelecer a relação deste conteúdo com conteúdos prévios que podem ser desenvolvidos no 1º ano escolar. Este caso manifesta o conhecimento matemático da professora, que observou essas relações presentes em diferentes anos escolares, e tal identificação está presente no subdomínio KMLS.

Na descrição da metodologia, a Professora apresenta as seguintes ações: *Hoje vamos trabalhar com a simetria nas figuras geométricas; Primeiro vou ler o livro "As aventuras de Guto"; Depois, vou entregar um papel com a metade do desenho das figuras geométricas para que os alunos completem o desenho seguindo o conceito de simetria; Logo após, iremos discutir e reforçar os conceitos matemáticos relacionados à geometria e à simetria.*

Também é citado um exemplo da tarefa prática que se pretende realizar no planejamento, no qual o aluno precisa completar as figuras geométricas de forma simétrica. Depois, são especificados os recursos utilizados – *"livro; material impresso;*

lápis; borracha e lápis de cor" – e a avaliação: "*será contínua e processual. As crianças serão observadas, se conseguem seguir os comandos, se conseguem ter concentração e se realizam o que a tarefa propõe"*.

Na sequência da tarefa podemos identificar o subdomínio KMT, que é o conhecimento do ensino de matemática que diz respeito a materiais, recursos, modos de apresentar um conteúdo e respectivas características que permitam ao professor optar por uma estratégia para ensinar, demonstra aquilo que o professor faz, como faz, por que faz de determinada forma. A Professora não especifica os detalhes do procedimento da tarefa, mas é possível definir que, após a leitura do livro, será proposta uma tarefa prática com reflexões relacionadas ao conteúdo de simetria. Percebemos, ainda, o cuidado que a Professora teve ao realizar seu planejamento – tendo em vista as características próprias da idade escolar e as possíveis dificuldades que os alunos teriam, ela opta por figuras planas e eixos simétricos, com apoio de tarefa impressa, uma preocupação que se refere ao subdomínio KFLM.

A Professora faz um planejamento tendo como característica a reflexão sobre uma das características da simetria (utilizar eixos simétricos para identificar se existem figuras iguais). Como também sobre o seu sentido, levando o aluno a se apropriar do que é uma figura simétrica. Nestes aspectos identificamos o subdomínio KOT, que se refere ao conhecimento do professor no âmbito de cada um dos tópicos a serem ensinados, incluindo conteúdos matemáticos e seus diferentes aspectos. Ao elaborar atividades que apresentam como apoio o eixo simétrico, ela mostrou em seu planejamento o conhecimento KOT.

Com referência ao KOT, também observamos que, na tarefa, houve um equívoco quanto ao planejamento da figura na apresentação de um triângulo, pois ele não utiliza o eixo simétrico, já que falta uma parte do triângulo, o que pode ocasionar dificuldades no processo de assimilação do conteúdo e atrapalhar na identificação do eixo em figuras, por parte do aluno.

Ainda nessas primeiras informações do planejamento da Professora, conseguimos identificar também o subdomínio KSM, que se refere ao conhecimento do professor associado à estrutura da matemática. Este conhecimento permite fazer relações entre diferentes conceitos matemáticos, como um sistema de elementos integrados. Considerando que a simetria faz parte da unidade temática da geometria, a professora optou por trabalhar com as figuras planas (objeto de conhecimento citado na BNCC para o 1º ano do Ensino Fundamental) e, a partir disso, incluir o conceito de simetria na tarefa. Com isso, a professora traz a possibilidade de criar discussões relacionadas a diferentes conceitos matemáticos na mesma tarefa. E como já citado anteriormente, a Professora consegue identificar aspectos do conteúdo essenciais para o 1º ano escolar, que servirão de base para conteúdos estudados em anos posteriores, trazendo associações e conexões entre o conteúdo de figuras geométricas planas e o conteúdo de simetria, o que também caracteriza o subdomínio KSM.

Identificamos, ainda, que o subdomínio KPM, em nosso entendimento, não aparece no planejamento da Professora. Um possível questionamento que a docente poderia ter incluído é: Por que é importante sabermos o conteúdo de simetria? Uma sugestão seria discutir com os estudantes sua intenção e objetivo com a realização da tarefa logo após a contação da história, trazendo uma justificativa matemática.

Com o planejamento desenvolvido por uma professora em formação conseguimos identificar alguns conhecimentos e a lacuna do conhecimento curricular a serem exploradas nas etapas seguintes da formação. Podemos inferir as possibilidades que uma formação utilizando a literatura infantil permite para a reflexão das ações de ensino. O planejamento aqui selecionado foi somente uma amostra das produções realizadas pelo grupo de professores e tal assertiva baseia-se na professora em formação selecionada e não em relação aos dados gerais do grupo.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Procuramos identificar os conhecimentos dos professores quanto ao uso da literatura infantil para o ensino da simetria. A partir do que foi apresentado ao longo da pesquisa, percebemos que as contribuições da literatura infantil para o entendimento dos conceitos relacionados ao ensino de simetria possibilitaram um aprofundamento da reflexão sobre as conexões possíveis nas aulas de matemática, neste caso, com uma concepção referencial, o MTSK.

A ação de planejamento analisada apresentaram características referentes aos subdomínios do conhecimento do professor, tanto do domínio MK (*Mathematical Knowledge*) que está relacionado ao conhecimento matemático do professor com um nível maior de aprofundamento do conteúdo, quanto o PCK (*Pedagogical Content Knowledge*) que envolve aspectos do conhecimento didático do professor, relativos ao ensino, que contribuem para a aprendizagem.

De modo geral, percebemos que ao utilizarmos nas ações formativas o recurso da literatura infantil para as reflexões de um conteúdo matemático, estamos promovendo mais do que o encantamento docente para o ensino, mas também promovendo momentos de reflexão sobre o conteúdo e de como ensina-lo.

Referências

Brasil. Ministério da Educação (2017). *Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base.* Brasília: Ministério da Educação.

Carrillo-Yañez, J.; Climent, N.; Montes, M.; Contreras, L. C.; Flores-Medrano, E.; Escudero-Ávila, D.; Vasco, D.; Rojas, N.; Flores, P.; Aguilar-Gonzáles, A.; Ribeiro, M.; & Muñoz-Catalán, M. C (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, London, *20*(3), 1-18.

Cobb, P.; Confrey, J.; Disessa, A. A.; Lehrer, R.; & Schauble, L (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13. http://doi.org/10.3102/0013189X032001009

Lopes, D. C. V.; & Silva, R. S. da (2015). Uma experiência de ensino-aprendizagem sobre simetria nos anos iniciais através do uso de materiais concretos e digitais. *Cadernos de Aplicação,* Porto Alegre, *28*, 111-118.

Rocha, A. M. da; Aguiar, A.; Leão, E.; & Nunes, J. M.V (2013). Construindo aulas de simetria com auxílio de situações adidáticas. *VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática*, Canoas: ULBRA.

Salles, E. B. de; Roos, L. T. W.; Lucion, P.; & Züge, V (2012). Arte e matemática: O ensino de simetria é magia. *IV Jornada Nacional de Educação Matemática; XVIII Jornada Regional de Educação Matemática*, Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo – UPF.

Santos, L. F. dos; & Teles, R. A. de M (2012). Pintar, dobrar, recortar e desenhar: O ensino da simetria e artes visuais em livros didáticos de matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental. *Bolema*, Rio Claro, *26*(42), 291-310.

Smole, K. C. S.; Rocha, G. H. R.; Cândido, P. T.; & Stancanelli, R (2007). *Era uma vez na matemática: Uma conexão com a literatura infantil* (3 ed). São Paulo: IME – USP.

APROXIMACIÓN AL APRENDIZAJE DE LOS FUTUROS MAESTROS DE MATEMÁTICAS: UNA MIRADA EXTERNA E INTERNA AL MTSK

Approach to Pre-service Primary Teachers' learning: An external and internal view at MTSK

Vergara, L. [a], Climent, N. [a]; Codes, M. [a]

[a] Universidad de Huelva

Temática: 1 – MTSK en la formación docente.

Resumen. El objetivo de esta investigación es acercarnos a las posturas sostenidas en la investigación sobre el aprendizaje de los estudiantes para maestro (EPM). Para ello, ahondamos en investigaciones ajenas al contexto del MTSK a través de una Revisión Sistemática Cualitativa y una consulta sobre documentos de la red MTSK. Los resultados respaldan la idea del aprendizaje desde un corte constructivista, una necesidad de aprendizaje de contenidos matemáticos, pero también contenido didáctico de las matemáticas. Se destaca como medios principales del aprendizaje de los EPM la reflexión mediante vídeos, tareas formativas y actividades que emulen o se aproximen a la práctica docente. Finalmente, se constata la ausencia de modelos explícitos sobre cómo se aprende en la formación inicial de maestros.

Palabras clave. Aprendizaje, Futuros maestros, Revisión sistemática, MTSK.

Abstract. The objective of this research is to approach the latent positions on Pre-service Primary Teacher´ learning in Mathematics (EPM). To do this, we delve into research outside the context of the MTSK (model of specialized knowledge of the mathematics teacher) through a Qualitative Systematic Review and a query in official documents belonging to the MTSK network. The results support the idea of learning from a constructivist perspective, a need to learn mathematical content, but also to learn to teach mathematics. Reflection through videos, training tasks and activities that emulate or approximate teaching practice stand out as the main means of learning EPM. Finally, the absence of explicit models on how to learn in initial teacher training is noted.

Keywords. Learning, Pre-service Teachers, Systematic Review, MTSK.

INTRODUCCIÓN

En el contexto de una investigación sobre el diseño de tareas formativas para estudiantes para maestro (EPM), nos cuestionamos qué modelo sobre cómo aprenden los EPM conocimiento matemático especializado puede sustentar nuestra propuesta. Más allá de responder a qué aprenden los EPM con las tareas, esperamos responder a cómo construyen su conocimiento matemático especializado. Tras una primera revisión bibliográfica que no satisfizo nuestra demanda, nos empleamos en poner a prueba nuestra hipótesis sobre la ausencia de modelos propios sobre el aprendizaje de los EPM.

Reconocemos la complejidad de indagar en esta cuestión, dado que no existe un consenso sobre qué y cómo se construye conocimiento en la formación inicial del profesor para la enseñanza de la matemática, aunque sí hay una inclinación por compartir cuál es el proceso de formación o producto esperado (Carrillo, 2014, Climent et al. 2016). Si bien es cierto existe un compromiso por crear programas de formación que promuevan tanto conocimiento didáctico del contenido matemático como disciplinar. Son cada vez más los programas de formación de maestros que en sus dinámicas de clases dan prioridad a

Vergara, L., Climent, N., & Codes, M. (2021). Aproximación al aprendizaje de los futuros maestros de matemáticas: una mirada externa e interna al MTSK. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 90–97). Congresseme.

experiencias que emulen o aproximen al EPM a su futura práctica (Akyeampong et al., 2013, Albarracín et al., 2015).

En ese sentido, la pregunta que mueve este trabajo es *¿qué modelos de aprendizaje se asumen en la investigación sobre la formación inicial del maestro?* Para responder a este interrogante nos planteamos hacer una revisión de literatura sobre aprendizaje del futuro profesor de matemáticas en su formación inicial.

MÉTODO

La revisión sistemática cualitativa es uno de los métodos que escogimos para este trabajo. Entendemos la revisión desde la perspectiva de Riesenberg y Justice (2014), quienes la definen como un camino facilitador para la búsqueda de la objetividad en las afirmaciones de los escritos académicos. Las revisiones han cobrado relevancia hasta tal punto que se han situado como el reemplazo a las opiniones de expertos o críticos en un área, pues estas últimas tienen un carácter muy subjetivo.

> Las revisiones sistemáticas utilizan una metodología explícita y rigurosa para identificar todos los artículos relevantes, para abordar de manera crítica cada artículo y para sintetizar la evidencia. El seguimiento de este riguroso proceso permite minimizar los sesgos e incrementar la fiabilidad y la precisión de las conclusiones (Riesenberg y Justice, 2014, p. 61).

Siguiendo a Riesenberg y Justice (2014), consideramos la revisión desde un enfoque cualitativo, pues pretendemos presentar la información de manera descriptiva, alejándonos de métodos estadísticos, que son más propios de revisiones sistemáticas cuantitativas a través del meta-análisis. En ese sentido, efectuamos una revisión sistemática rápida (Tapia-Benavente et al., 2021) que pretende lograr una categorización sencilla de la información e intenta identificar qué modelos implícitos sobre el aprendizaje de los EPM se encuentran en algunos trabajos sobre la formación de maestros. Además, se ejecuta en un intervalo de tiempo inferior a 5 semanas y con fuentes limitadas.

Previamente a la búsqueda de la información fue necesario marcar una pregunta de investigación y una hipótesis, pues son el punto de partida para escoger las palabras claves, las bases de datos, la forma y la escritura de la búsqueda. Planteamos como hipótesis que sería complejo encontrar información directa que nos dijera *cómo* aprenden los EPM o cuáles son los modelos o teorías que podemos encontrar en la investigación sobre el aprendizaje de los futuros maestros de primaria en Matemáticas. Esta hipótesis se apoya en nuestra experiencia docente-investigadora en la que evidenciamos una inclinación por compartir *qué* contenidos o cuestiones deben concretarse en la formación, sin hacerse explícito cómo se supone que los EPM se apropian de esos contenidos. Reconocemos que existe una corriente de trabajos que intenta aproximarse, aunque pone sus esfuerzos en mostrar la efectividad o el impacto de estrategias en la formación de los futuros docentes más que en describir *cómo* estos aprenden (p.e. Ivars, Fernández y Llinares, 2020). No obstante, esperamos que, aunque no expliciten las teorías de aprendizaje, permitan entrever ciertas posturas que se vinculan con las teorías de aprendizaje usadas normalmente en entornos escolares como el constructivismo (p.e. Cáceres, Chamoso y Azcárate, 2010).

Las bases y fuentes empleadas para la búsqueda se determinaron siguiendo tres finalidades: i) obtener información de bases de datos de alto impacto, como Web of Science, Scopus o Eric Proquest, ii) acercarnos a fuentes frecuentadas por investigadores o formadores del área, como Dialnet y Revistas en la editorial Springer, y iii) emplear fuentes de rápida accesibilidad, como 1findr.

Para realizar la revisión de una manera sistemática hemos optado por emular el diagrama PRISMA (Preferred Reporting Items for Systematic reviews and Meta-Analyses), asumiéndolo bajo la perspectiva de Urrútia y Bonfill (2010), quienes nos brindan un esquema práctico para todos aquellos que se están iniciando en este tipo de metodologías (Figura 1).

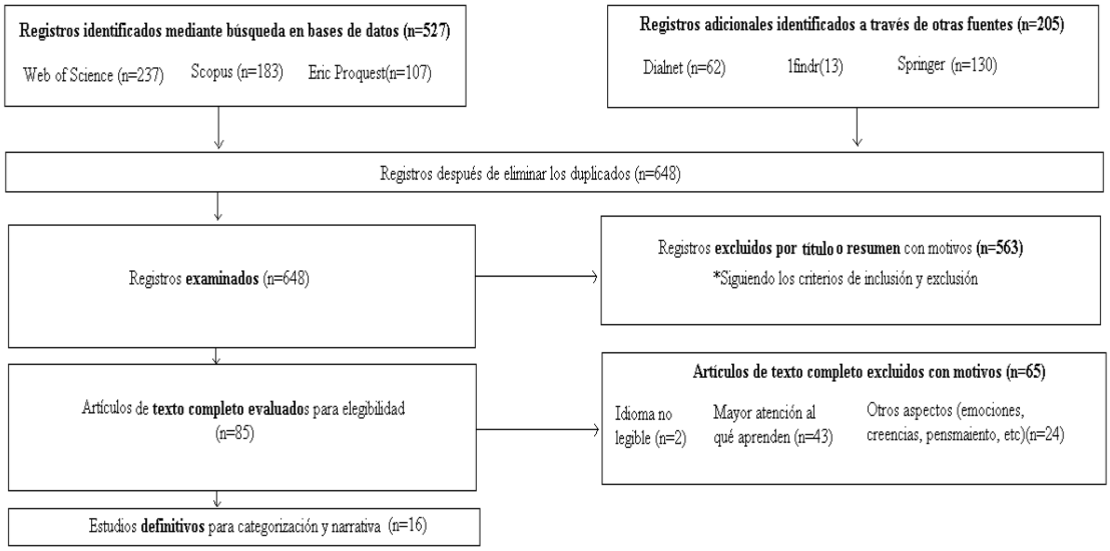


Figura 1. Diagrama de flujo PRISMA. Elaboración propia.

La estrategia de búsqueda se guio por el uso de palabras claves como Estudiante para Maestro, Matemática, Aprendizaje, Primaria, Constructivism, Learn, Pre-service Teacher, How Do Learn, Primary, Student Teacher y Teacher's Knowledge.

Para la creación de las estrategias de búsqueda se tuvo presente el uso de algunos operadores Booleanos (AND y OR), el truncamiento (*) dada la recomendación de Riesenberg y Justice (2014, p.63) y la estructura de búsqueda que sugiere cada base de datos. Por ejemplo, Scopus tiene unos recomendaciones de búsquedas establecidos (ver How do I search for a document? - Scopus: Access and use Support Center (elsevier.com)). Finalmente, surgieron once sintaxis de búsqueda que se pueden consultar en https://bit.ly/3i9neC7. En la tabla 1 presentamos una muestra de sintaxis que generó una cantidad considerable de información.

Tabla 1. Ejemplo de Sintaxis de búsqueda en una base de datos.

Base	Sintaxis	Hallazgos
ERIC proquest	pre-service teac* AND primary AND lear* AND mathemat* (Refinado por Revistas científicas y años de publicación: 2010-2020)	K=107

Los criterios empleados para decidir la inclusión o no de los estudios en esta revisión se muestran en la tabla 2.

En una segunda etapa, nos hemos acercado a indagar las posturas sobre el aprendizaje del futuro maestro de primaria en los estudios que se enmarcan dentro del modelo MTSK, pero esta vez de manera informal, sin llevar a cabo una revisión exhaustiva. Pretendemos con ello matizar el modo en que se postula la construcción del conocimiento del EPM desde la perspectiva del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Realizamos la exploración sobre fuentes de información oficiales de la red colaborativa que trabaja y difunde el modelo. Las exploraciones se enfocan exclusivamente en trabajos que relacionen al MTSK y la formación inicial de maestros de primaria, para mantener una equiparación con los criterios de la revisión sistemática llevada a cabo. Las actas de los congresos del modelo MTSK fueron las principales fuentes de consulta, considerando que en ellos se concretan una buena diversidad de investigaciones bajo este modelo.

Tabla 2. Criterios para seleccionar los documentos.

Criterios de inclusión	Criterios de exclusión
▪ El campo de acción es la educación matemática. ▪ Hace mención a la construcción de conocimiento o procesos de aprendizaje. ▪ Hace referencia a la formación para maestros de primaria. ▪ El intervalo temporal comprendido es desde 2010 hasta la actualidad. ▪ Idioma de manuscrito: Español o Inglés.	▪ Incluye elementos totalmente ajenos al interés de la investigación. ▪ El estudio no es un facilitador para aproximarse al objetivo. ▪ Posea un enfoque remarcado en "qué" aprenden los futuros maestros de primaria. ▪ No se tiene acceso a las bases o documentos según el convenio de acceso de nuestra Universidad.

A continuación, mostramos los resultados de estas dos exploraciones, la sistemática realizada con artículos ajenos al modelo MTSK y la informal con artículos producidos desde la perspectiva del modelo.

RESULTADOS

La revisión sistemática nos ha arrojado un total de dieciséis documentos (ver en este link https://bit.ly/3wIvj5Z) en los cuales no encontramos un modelo explícito de aprendizaje de los EPM, que era nuestro objetivo principal. Por un lado, la ambición de este objetivo puede requerir que nos planteemos otros métodos para acercaros a su logro. Por otro lado, parece que en la formación inicial de los EPM se asumen los modelos generales de aprendizaje de la matemática y no se evidencia un lente común que permita mirar cómo construye conocimiento el EPM. No obstante, de los 16 documentos logramos aproximarnos a algunas posturas implícitas sobre el aprendizaje del EPM. En la tabla 3 se sintetizan las tres categorías resultantes del análisis de los documentos.

En la primera categoría, *Aprender a enseñar (sobre la práctica del profesor),* agrupamos aquellas investigaciones que en su discurso colocan como foco el aprendizaje del EPM a partir de la práctica. En ellas se abordan cuestiones relativas a la labor de la enseñanza de las matemáticas en las que se plantean la necesidad de desarrollar actividades que emulen situaciones de aula y susciten desarrollar habilidades de mirada profesional. Con otras palabras, aquellos textos que implican la construcción de un conocimiento teórico-práctico sobre la enseñanza de las matemáticas. De esta categoría podemos resaltar que hubo una convergencia en el uso del vídeo como herramienta para alcanzar el aprendizaje de la práctica de los EPM. Esto nos invita a reflexionar sobre los beneficios de este medio, pero también a plantearnos qué otros medios pueden ser también útiles para reflexionar sobre la práctica del profesor como, por ejemplo, los portafolios de aprendizaje.

La segunda categoría, *Aprender a enseñar (aprendizaje del alumnado)*, recoge los textos que ponen en realce la necesidad de que el EPM aprenda sobre al aprendizaje del alumnado, es decir, textos que promueven en el EPM la habilidad de anticiparse sobre el aprendizaje, pensamiento y respuestas de su alumnado. Se evidencian tres caminos para lograrlo: actividades donde el EPM asuma el papel de alumno, análisis de manifestaciones reales de niños por medio de grabaciones y la familiarización con las trayectorias hipotéticas de aprendizaje.

La tercera categoría, *Aprender matemáticas*, reúne los textos que dan respuesta a cómo y qué conocimiento disciplinar alcanza el EPM. Aquí se refuerza la idea de que un maestro debe tener conocimiento sobre los contenidos que enseñará, que el EPM debe establecer conexiones entre contenidos, ser capaz de explicar su pensamiento matemático, desarrollar diferentes formas de razonamiento y poseer la capacidad de autoaprender un contenido.

Tabla 3. Categorías resultantes tras analizar los documentos.

Categoría	Subcategoría	Autores
Aprender a Enseñar (sobre la práctica del profesor)	Acercarse a la práctica mediante el uso de los vídeos, estudio de las lecciones o visión profesional	Beswick y Muir (2013); Hourigan y Leavy (2019); Sherin y Dyer (2017); Todorova, Sunder, Steffensky y Möller (2017).
	Reflexión, mediante el uso del portafolios, de su práctica en el diseño de tareas escolares	Cáceres, Chamoso y Azcarate (2010).
Aprender a Enseñar (aprendizaje del alumnado)	Aprender mediante actividades que emulan el rol de resolutor (alumno) para analizar características del aprendizaje matemático de alumnos de Primaria	Albarracin, Chico y Guinjoan. (2015), Akyeampong, Lussier, Pryor y Westbrook (2013)
	Aprender sobre las características del aprendizaje mediante actividades formativas que usan vídeos	Climent et al. (2016).
	Aprender sobre el aprendizaje de los alumnos a través de Trayectorias	Godino, Rivas, Burgos, y Wilhelmi (2019); Ivars, Fernández y Llinares (2020)
Aprender Matemáticas	Temas de matemáticas escolares	Al Zahrani y Jones (2013); Sánchez-Matamoros (2018).
	Razonar deductiva e inductivamente	Arslan, Gocmencelebi y Tapan (2009).
	Establecer conexiones matemáticas haciendo uso de tareas formativas	Caviedes-Barrera, de Gamboa-Rojas y Badillo-Jiménez (2019).
	Aprender a visibilizar el pensamiento sobre un contenido	Conrady, K. (2015).
	Aprender matemáticas mediante la autorregulación	Hidalgo-Moncada, Díez y Vanegas (2020).

Tras un análisis de las palabras con las que se hace referencia al aprendizaje (oportunidades de aprendizaje, construcción del conocimiento, reflexión, metacognición, etc.) y de los medios resaltados en los documentos para promover el aprendizaje de los EPM, se evidencia una corriente constructivista del conocimiento, pues no se considera el aprendizaje del EPM desde una perspectiva conductista. Por el contrario, se evidencia la necesidad de que el EPM construya su propio conocimiento a través de situaciones que lo acerquen a su futura práctica, siendo incluso necesario que emule el papel del alumnado de etapa escolar. Por otro lado, la mayoría de los trabajos concuerdan en la necesidad de que el EPM posea conocimientos del contenido y didáctico del contenido, siendo Shulman (1987) la fuente más citada y consensuada.

En el análisis de los trabajos desarrollados desde el modelo MTSK (ver trabajos en este link https://bit.ly/3B8ZeHG) hemos discernido dos categorías. En una de ellas, coincidiendo con la tercera del análisis sistemático, hemos categorizado los trabajos que ponen atención en el aprendizaje de los EPM sobre los contenidos escolares, *Aprender matemáticas*. La otra categoría, *Aprender a enseñar matemáticas*, agrupa aquellos trabajos que abordan el aprendizaje del EPM tanto desde un enfoque de la gestión del maestro como del aprendizaje de su alumnado. La naturaleza del modelo impulsa investigaciones en las que se evidencia la necesidad de una formación del maestro en conocimiento didáctico del contenido sin desligar los focos de la práctica docente y del aprendizaje del alumnado.

El carácter integrador del modelo MTSK se refleja en las actividades formativas propuestas en las investigaciones en las que se pretende movilizar la conexión de los dominios y subdominios del modelo. Esto nos lleva a que, si comparamos las tablas 3 y 4, se puede alegar que las dos primeras categorías de la tabla 3 están inmersas o son equiparables a la primera categoría de la tabla 4.

En cuanto a las herramientas para promover el aprendizaje de los EPM empleadas en los trabajos del modelo MTSK, también hemos encontrado el papel protagonista de los vídeos y tareas formativas como medios principales para el aprendizaje de los EPM.

Tabla 4. Categorías resultantes tras analizar los documentos de la red MTSK.

Categoría	**Subcategoría**	**Autores**
Aprender a Enseñar matemáticas	Construcción de conocimiento sobre la enseñanza del contenido (estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) a través de la planificación	Reyes, Sosa y Carrillo (2017)
	Construcción de conocimiento especializado (MK y PCK) a partir de tareas formativas	Barrera, Liñan, Muñoz y Contreras (2020), Valenzuela y Ramos (2020)
	Construcción de conocimiento especializado (MK y PCK) mediante el uso de vídeos	Climent y Montes (2020)
Aprender Matemáticas	Temas de matemáticas escolares a través de actividades de formación	Barrera, Liñan y Pérez (2017), González, Gavilán, Toscano, Martín y Fernández (2017)
	Reflexión sobre las debilidades y fortalezas del propio conocimiento matemático	Montes et al. (2015).

La revisión sistemática y la consulta de documentos pertenecientes a la red MTSK sobre cómo aprenden en la formación inicial los estudiantes para maestro no nos aproximó a responder la pregunta que guiaba nuestra investigación. Como se observa en los párrafos anteriores, estas exploraciones nos acercaron a ratificar los conocimientos esperados de un EPM, los recursos frecuentes en su formación y algunas inclinaciones en las formas de enseñanza. Esto último, corresponde a lo planteado en nuestra hipótesis que nos advertía sobre la complejidad de encontrar modelos explícitos sobre cómo se aprende en la formación inicial de maestros.

Tras los resultados obtenidos nos planteamos mejoras en las formas de búsqueda de la revisión sistemática, por ejemplo, la inclusión de términos como Profesor en Formación y Prospective Teacher, emplear fuentes de búsqueda con mayor vinculación a la educación matemática y complementar con un meta-análisis. Consideramos oportuno hacer una revisión profunda sobre las posturas acerca del aprendizaje de los EPM en las investigaciones propias de la red MTSK que se encuentran en otros espacios de divulgación. Es relevante que se tenga conocimiento de los modelos de aprendizaje que den cuenta de cómo aprenden estudiantes para maestro, para que el modelo MTSK no se limite a responder a qué aprenden.

Referencias

Akyeampong, K., Lussier, K., Pryor, J., y Westbrook, J. (2013). Improving teaching and learning of basic maths and reading in Africa: Does teacher preparation count? *International Journal of Educational Development, 33*(3), 272-282. 10.1016/j.ijedudev.2012.09.006

Al Zahrani, Y., y Jones, K. (2013). Pre-service primary mathematics teachers' opportunities to learn about school mathematics topics. *Research in Mathematics Education, 15*(2), 191-192. 10.1080/14794802.2013.797751

Albarracin, L., Chico, J., y Guinjoan, M. (2015). Learning to teach mathematics from own experience. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 196*, 113-119. 10.1016/j.sbspro.2015.07.020

Arslan, C., Gocmencelebi, S. I., y Tapan, M. S. (2009). Learning and reasoning styles of pre service teachers': inductive or deductive reasoning on science and mathematics related to their learning style. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 1*(1), 2460-2465. 10.1016/j.sbspro.2009.01.432

Barrera, V., Liñán, M. M., y Pérez, B (2017). El Conocimiento Especializado de los Estudiantes para Maestro en la Resolución de Problemas de magnitudes proporcionales. Una propuesta didáctica. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Coord.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK* (pp.81-85). Universidad de Huelva, España.

Barrera, V., Liñán, M. M., Muñoz, M. C., y Contreras, L. C. (2020). El uso del MTSK en el diseño de tareas formativas para estudiantes para profesor de educación primaria. En J. Carrillo, M. Codes y L.C. Contreras (Coord.), *IV Congreso Iberoamericano sobre el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas MTSK* (pp.110-118). Universidad de Huelva, España.

Beswick, K., y Muir, T. (2013). Making Connections: Lessons on the use of video in pre-service teacher education. *Mathematics Teacher Education and Development, 15*(2), 1-22. https://search.proquest.com/scholarly-journals/making-connections-lessons-on-use-video-pre/docview/1651845108/se-2?accountid=14549

Cáceres, M. J., Chamoso, J. M. y Azcarate, P. (2010). Analysis of the revisions that pre-service teachers of mathematics make of their own project included in their learning portfolio. *Teaching and Teacher Education, 26*(5), 1186-1195. 10.1016/j.tate.2010.01.003

Carrillo, J. (2014). El conocimiento de los estudiantes para maestro (TEDS-M España) desde la perspectiva de su especialización. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 115-123). SEIEM.

Caviedes-Barrera, S., de Gamboa-Rojas, G., y Badillo-Jiménez, E. (2019). Mathematical connections established by pre-service teachers when solving measurement and comparison tasks of area. *Praxis-Colombia, 15*(1), 69-87. 10.21676/23897856.2984

Climent , N., Montes , M. Á, Contreras , L. C., Carrillo , J., Liñán , M. M., Muñoz , M. C., Barrera, V. J., y Leon, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las matemáticas a través del análisis de vídeo. AIEM -*Avances de Investigación en Educación Matemática, 9*, 85-103. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5794712.pdf

Climent, N. y Montes, M. (2020). Diseño de tareas para la formación de profesores de matemáticas a partir de MTSK. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Coord.), *IV Congreso Iberoamericano sobre el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas MTSK,* (pp.60-69). Universidad de Huelva, España.

Conrady, K. (2015). Modeling Metacognition: Making Thinking Visible in a Content Course for Teachers. *Redimat, 4*(2), 132-160. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5114012.pdf

Hidalgo-Moncada, D., Díez Palomar, F. J., y Vanegas, Y. M. (2020). Formación de maestros de educación primaria en el contexto de confinamiento: la importancia del aprendizaje autorregulado en las matemáticas. *Magister: Revista Miscelánea de Investigación, 32*(1), 40-48. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/7627127.pdf

Ivars, P., Fernández , C., y Llinares , S. (2020). Uso de una trayectoria hipotética de aprendizaje para proponer actividades de instrucción. *Enseñanza de las Ciencias, 38*(3), 105-124. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7639638&orden=0&info=link

Montes, M. A., Contreras, L. C., Liñán, Mª M., Muñoz-Catalán, Mª C., Climent, N., y Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación, 367*(enero-marzo), 36-62.

Reyes, A. M., Sosa, L., y Carrillo, J. (2017). El conocimiento especializado de un profesor en formación inicial de primaria. Tareas para la enseñanza del significado razón. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Coord.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK,* (pp.131-135). Universidad de Huelva, España.

Riesenberg, L. A., y Justice, E. M. (2014). *Revisión sistemática de la bibliografía* (parte 1). Nursing (Ed. española), 31(6), 61-64. DOI: 10.1016/j.nursi.2014.12.019

Tapia-Benavente, L., Vergara-Merino, L., Garegnani, L. I., Ortiz-Muñoz, L., Loézar Hernández, C. y Vargas-Peirano, M. (2021). Revisiones rápidas: definiciones y usos. *Medwave*, *21*(01).

Urrútia, G., y Bonfill, X. (2010). Declaración PRISMA: una propuesta para mejorar la publicación de revisiones sistemáticas y metaanálisis. *Medicina clínica, 135*(11), 507-511.

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO QUE SE ESTUDIA EN EL DISEÑO DE UNA CLASE DE GEOMETRÍA

Pedagogical Content Knowledge evidenced in the design of a geometry class

Villella, J.[a]; Fioriti, G.[b]; Ferragina, R.[c]; Güerci, V.[d]; Lupinacci, L.[e]; Bifano, F.[f]; Almirón, A.[g]

[a; b; c; d; e; f; g] Centro de Estudios en Didácticas Específicas-Laboratorio de Investigación en Ciencias Humanas, Universidad Nacional de San Martín, Argentina.

Temática: 1 – MTSK en la formación docente.

Resumen. El conocimiento didáctico matemático es nodal para organizar la enseñanza, diseñar tareas de aprendizaje, utilizar diferentes métodos y recursos, entender los factores que condicionan la enseñanza y el aprendizaje. En este trabajo lo analizamos junto con un docente que prepara una clase de geometría para estudiantes de escuela secundaria. Usamos el modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) para connotar los hallazgos de una investigación colaborativa. Concluimos que MTSK permite caracterizar la enseñanza como una actividad situada, interpelar su sentido, desnaturalizar secuencias de aprendizaje, cuestionar producciones estudiantiles, comprender fenómenos didácticos en el aula.

Palabras clave. Prácticas de enseñanza, Geometría, PCK, MTSK.

Abstract. Pedagogical Content Knowledge is nodal for organizing teaching, designing learning tasks, using different methods and resources, understanding the factors that condition teaching and learning. In this work we analyzed it together with a teacher who prepares a geometry class for high school students. We use the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge model (MTSK) to connote the findings of a collaborative research. We conclude that MTSK allows us to characterize teaching as a situated activity, to question its meaning, to distort learning sequences, to question student productions, to understand didactic phenomena in the classroom.

Keywords. Teaching Practice, Geometry, PCK, MTSK.

INTRODUCCIÓN

El conocimiento didáctico matemático docente resulta nodal para organizar la enseñanza, diseñar tareas de aprendizaje, utilizar diferentes métodos y recursos, entender los factores que condicionan la enseñanza y el aprendizaje. Diversas investigaciones asocian el desarrollo profesional a la coherencia entre concepciones y práctica del aula (Kaiser y Li, 2011) y al conocimiento profesional (Bell, Wilson, Higgins y McCoach, 2010). En este estudio nos centramos en el aspecto cognitivo, para profundizar en la reflexión sobre la práctica. Asumimos que los saberes matemáticos permiten a las y los docentes planificar, gestionar y reflexionar sobre la enseñanza. Compartimos los resultados de una investigación referenciada en el MTSK (Carrillo et al, 2018) y la investigación colaborativa (Bednarz, 2004), sobre un profesor de matemática de escuela secundaria, cuando diseña una clase de geometría.

MARCO TEÓRICO

De acuerdo con Carrillo y colaboradores (2018), el carácter especializado del conocimiento del profesor se fundamenta a través de la integración y las relaciones entre conocimientos de los subdominios que conforman el MTSK. Como afirman Scheiner et

Villella, J., Fioriti, G., Ferragina, R., Güerci, V., Lupinacci, L., Bifano, F., & Almirón, A. (2021). Conocimiento didáctico del contenido que se estudia en el diseño de una clase de geometría. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 98–105). Congresseme.

al. (2017), esta especialización permite considerar la génesis y el desarrollo de las ideas matemáticas desde una perspectiva histórica y cognitiva, con relación a las y los estudiantes con los cuales serán trabajadas. Las creencias sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje permean el conocimiento docente y ubican este dominio en el centro del modelo MTSK junto con otros dos dominios con los que analizar el diseño de clase de un profesor: el Conocimiento Matemático (MK: Mathematical Knowledge) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK: Pedagogical Content Knowledge).

En este trabajo, nos apoyamos en el PCK para analizar distintas estrategias de enseñanza del contenido, de la potencialidad de estas estrategias y de los recursos que se pueden utilizar para lograr aprendizaje matemático (Tabla 1).

Tabla 1. PCK (subdominio y categorías) usado en esta investigación. Fuente propia.

Dominio	Subdominio	Categoría
Conocimiento didáctico del contenido (PCK)	Conocimiento de la enseñanza de la geometría (KMT)	Teorías de enseñanza de la geometría Recursos de enseñanza Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
	Conocimiento de las características del aprendizaje de la geometría (KFLM)	Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de la geometría Interacción estudiante- geometría plana Intereses y expectativas del aprendizaje de la geometría
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de la geometría (KMLS)	Contenidos a enseñar: circunferencia y círculo Nivel de desarrollo esperado Secuenciación de los temas

Buscamos evidencias del conocimiento didáctico del contenido en el diseño de una actividad de geometría para estudiar circunferencia y círculo, realizada por un docente. En concordancia con Flores (2015) entendemos por evidencia a un elemento que nos permite afirmar la presencia de conocimiento (profundo o superficial) en el docente y por indicio a la sospecha de existencia de conocimiento, identificada por alguna acción docente. Consideramos la modelización del espacio de forma analógica y geométrica, para establecer conexiones entre el mundo sensible y un modelo del mismo, con diferentes niveles de formalización (Villella, et al., 2018). Esta modelización puede hacerse en diferentes ambientes para el aprendizaje que invitan a las y los estudiantes a involucrarse en la exploración y la explicación (Skovsmose, 1999). Elegimos enmarcar nuestra búsqueda en el paradigma de la investigación colaborativa (Bednarz, 2004) para producir conocimiento relevante sobre la práctica profesional, recuperar la voz docente y las actividades para la clase, como una legítima forma de encontrarle sentido a la experiencia de enseñar.

METODOLOGÍA

Este trabajo corresponde a una investigación de corte cualitativo e interpretativo por medio de un estudio de caso, donde se busca comprender el conocimiento didáctico del contenido en un profesor, cuando diseña una clase de geometría para estudiantes de 12-13 años (Stake, 2007). Lo relatado, se corresponde con sesiones de trabajo en videoconferencias, mantenidas durante el 2020, entre el grupo investigador (en adelante GI) y Javier (por su seudónimo).

Epistemológicamente, la construcción del conocimiento didáctico docente, se fundamenta en la reflexión sobre las situaciones de enseñanza: el investigador “dialoga” con el docente desde el interior del contexto en que éste opera, para entender e interpretar cómo fundamenta e implementa sus decisiones. Así, comenzamos nuestra investigación con una entrevista a Javier (profesor de matemática egresado de un Instituto de Formación

Docente con plan de 4 años) que trabaja desde 2018 en esta institución (su primera y única escuela de trabajo). Esta entrevista, fue un espacio recíproco de argumentación generado a partir de discusiones sobre cómo, cada uno (GI-Javier), otorga significados a la enseñanza y dota de sentido a la co-construcción de un conocimiento. Durante las interacciones, Javier analizó las dimensiones de su experiencia y cuestionó sus conocimientos, al cruzarlos con los que le aportó el GI desde la óptica del MTSK.

RESULTADOS

Compartimos los primeros resultados de la investigación. Nos basamos en extractos de algunas de las sesiones de trabajo entre el GI y Javier.

En la **sesión 1**, le pedimos a Javier que elabore un esquema que muestre las conexiones y relaciones entre los elementos que usa para planificar sus clases. Nos basamos en la idea de recurso en sentido amplio (Adler, 2010): repertorio de elementos usados para organizar, pensar, planificar y gestionar la clase, vinculado con el conjunto de conocimientos, saberes, creencias y prácticas que Javier posee respecto de la enseñanza. Su esquema de recursos (Gueudet y Trouche, 2012) mostró distintos tipos que se fusionan en el uso de los tecnológicos. Javier referenció la actividad en el contexto de trabajo de sus estudiantes: indicio de cuál puede ser su organización de la clase, qué estrategias despliega y qué tipo de tareas propone.

GI: ¿Cuál es el contenido sobre el que vas a trabajar?

J: Superficie de figuras circulares

GI: ¿Por qué ese tema?

J: Está en el Diseño curricular, lo puse en la planificación. Por lo que le escuché al profe de uno de una de las actividades extracurriculares, se va a usar en proyectos de electricidad. Están analizando tipos y dimensiones de los cables…

En la **sesión 2,** trabajamos sobre el conocimiento del contenido. Javier aportó un material que sus estudiantes le compartieron (Figura 1).

Nos cuesta imaginar un mundo sin cables eléctricos. Los primeros fenómenos de naturaleza eléctrica fueron observados por el filósofo griego Tales de Mileto (600 a.c.) y recién en el año 1780, Alejandro Volta descubrió que para generar electricidad se requerían de metales conductores. Los primeros "cables" eran gruesas placas de cobre. El tiempo y la practicidad, hicieron reducir el tamaño y llegar a los cables que hoy conocemos. La foto muestra algunos de los cables actuales. Todos, deben contener conductos con tres cables para conectar ambos polos y la descarga a tierra.

Figura 1. Material aportado por Javier al encuentro.

Lo leímos y dialogamos sobre su contenido, el conocimiento que él tiene respecto del mismo y cómo se le ocurría relacionar este texto con lo propuesto a enseñar:

GI: ¿Lo que dice el texto en la última oración, es verdadero? ¿Es así?

J: Sí. Yo lo estudié en la escuela secundaria. Soy egresado de una escuela que me formó como técnico electrónico. (Riéndose) ¡Algo de eso tengo que saber!

GI: ¿Qué te imaginás como primera actividad, para hacer el puente entre lo que dice esta hoja de las y los estudiantes y lo que vas a enseñar?

J: (Después de pensar un rato) Yo les propondría que analicen una figura que sirva como modelo de cable que se describe en el texto.

GI: Una figura: ¿hecha por vos, de algún libro, de la web?

J: No, hecha por mí, usando GeoGebra.

GI: ¿Por qué?

J: Que la haga yo me deja tranquilo, que lo que aparece es lo que quiero trabajar. Eso me da seguridad. Hacerla con GeoGebra, porque es más fácil.

GI: ¿Y cuál sería esa figura?

J: (abrió su Notebook y en pocos minutos mostró la imagen de la Figura 2)

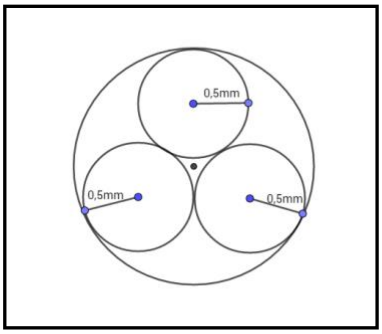


Figura 2. Imagen de la pantalla de la Notebook de Javier.

Javier evidencia conocimiento sobre: el GeoGebra como recurso, la modelización geométrica a través de la tecnología, el uso de figuras de análisis (KMT) y puede anticipar cómo los estudiantes accionarán contra el medio ofrecido que responde a sus intereses (KFLM) previendo una secuencia temática acorde con el nivel deseado de dominio del contenido geométrico seleccionado (KMLS). La pantalla da cuenta del MK y el uso de recursos tecnológicos (optamos por no trabajar en ellos en las sesiones siguientes)

En la **sesión 3** trabajamos sobre la figura y debatimos acerca de posibles actividades para el aula, con la intención de hacer emerger evidencias de KMT y KFLM.

GI: ¿Qué actividad se te ocurre proponer usando esa figura como recurso?

J: Puedo preguntarles ¿Qué parte del conducto está ocupada por los cables?

GI: ¿Así, sin más?

J: No entiendo.

GI: ¿Hay alguna presentación por parte tuya, una contextualización de la actividad?

J: Ah, claro. Primero les cuento que me llegó la hoja con los cables, después que se me ocurrió que debían usarlos para algo y entonces les planteo el problema.

GI: ¿Por qué pensás que lo que estás planteando es un problema?

J: Porque tienen que hacer cálculos, aplicar lo que saben de otros años…

GI: ¿Y si no se acuerdan de cómo hacerlo?

J: Los puedo orientar.

GI: ¿Cómo?

J: Con sugerencias.

GI: (riéndose) y como decían nuestras abuelas con las lentejas: si quieren las usan y si quieren…

J: (a carcajadas) las dejan, claro.

GI: Pero si las dejan: ¿para qué las pensaste?

J: Yo les doy un abanico de posibilidades… Después que cada cual diseñe su propio camino.

GI: ¿No sería más práctico, dárselas sólo a las o los que te las piden?

J: Prefiero que las tengan todos en la hoja de trabajo, y decidan ellos.

GI: ¿Y cuáles serían esas sugerencias?

J: (después de un rato de mirar su pantalla y jugar con el mouse haciendo que el cursor se deslice por sobre la figura). Les diría que reproduzcan el dibujo en la pantalla de GeoGebra, usen las herramientas y muevan las partes hasta encontrar la respuesta. ¡Ah!, en la hoja de trabajo les pondría: presten atención a las pistas que da el dibujo. Miren que la longitud del radio de los cables y el punto que marca la circunferencia que delimita al conducto son importantes. Además, deberán escribir cómo hallaron la respuesta y explicar por qué creen que esa, la mejor respuesta.

Javier se movió entre el ejercicio y la investigación, interesado en dotar a la actividad de cierta estructura cognitiva. En su secuencia didáctica prevé recuperar contenidos aprendidos por sus estudiantes a través de una guía de sugerencias (en algunos casos explícitas y dirigidas a la figura de análisis) organizando estas intervenciones en vistas a su guion de clase. Muestra indicios de organizar la clase en grupos de trabajo buscando homogeneizar, a través de ciertas técnicas por él aportadas, la participación estudiantil (KMT; KFLM). Se mostró más en su faceta de resolutor que de docente: explicita su forma de resolver el problema más que anticipar soluciones posibles de las y los estudiantes (KMLS). Para recuperar este foco de análisis, propusimos la **sesión 4.** En ella nos centramos en el análisis de supuestas respuestas de las y los estudiantes. Propusimos un análisis a priori de la situación de enseñanza para estudiar posibles decisiones respecto de la gestión de la clase. Así emergió la práctica matemática de Javier, sus formas de resolución para transponerlas al universo de sus alumnos (KoT, KSM, KPM).

GI: ¿Cuál puede ser una posible respuesta que te den a tu propuesta?

J: Me parece que lo que van a hacer, es abrir GeoGebra que les gusta y ponerse a probar.

GI: ¿Suponés que van a aportar contenidos previos?, ¿Pueden consultar carpetas, libros o la web?

J: Pueden usar lo que quieran. Aunque no lo digan con los términos geométricos exactos, puede que intenten copiar la figura usando circunferencia dado su centro y su radio, que conocen de otras clases.

GI: Pero lo que esperás, es el uso de una propiedad. ¡Tu vara es muy alta!

J: Bueno (dudando). También pueden tantear, pueden dibujar usando otras herramientas…pero me queda a mí el uso del zoom, del protocolo y del desplazamiento para mostrarles que quizás eligieron caminos erróneos.

GI: ¿Mostrarles?

J: Bueno, una forma de decir.

GI: De decir, ¿qué?

J: De demostrarles, sería.

GI: ¿Demostrarles?...

Javier intercambia sus formas de resolución con las que supone ejecutarán sus estudiantes, poniendo en ellos dominio de contenidos de los cuales, no puede asegurar su existencia. La duda acerca de aplicar una propiedad o hacer tanteo, muestra cierto desconocimiento acerca de si la actividad propuesta es un ejercicio o un problema. Javier parece identificar mostración con demostración; prueba con ejemplificación. En la **sesión 5** en la que analizamos la sintaxis de los comandos como variable a tener en cuenta. Javier comenzó a dialogar con la herramienta en búsqueda de una posible solución al problema y propusimos analizar si a demanda del recurso, se mantenía la actividad o se proponía un ejercicio basado en la geometría. Reflexionar sobre ello fue el objetivo de la **sesión 6** en la que trabajamos otras posibles respuestas estudiantiles aportadas por el GI.

GI: Quizás, algunos equipos, usando circunferencia por tres puntos, puedan presentar esta pantalla (Figura 3).

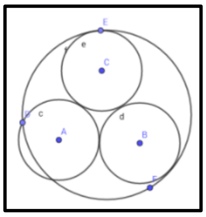


Figura 3. Imagen de la pantalla de la Notebook del GI.

J: ¡Pero les quedó horrible la copia!...

GI: ¿Qué sucedería en el aula si esta es una respuesta?

J: Me imagino un diálogo con toda la clase, en la que yo pregunte ¿cómo hacemos las tres circunferencias y la que las contiene para que queden como en el cable? (dudando) No sé, quizás preguntaría, frente a la evidencia: ¿cómo se dibuja la circunferencia que delimita al conducto?

GI: ¿Qué te pueden responder? ¿Qué esperarías como posible respuesta correcta?

J: (trabajando en su máquina con el archivo compartido por GI). Yo propondría usar esa pantalla para analizar con el grupo completo, qué pasa si estudiamos el centro de la circunferencia.

GI: ¿Sin que a ellas o a ellos se les ocurriera?

J: Es una decisión que tomo yo para mostrarles un posible primer paso de nuestro análisis.

GI: Ah, ¿y cómo se sigue?

J: (usando el mouse, trabajando sobre las herramientas del programa, relatando en simultáneo) Podemos hallar el centro como intersección de las rectas que pasan por el punto medio del segmento que une a los centros de las circunferencias interiores y pasa por el centro que no pertenece a ese segmento. Es decir, estamos tomando en cuenta la existencia de un triángulo ABC al que le trazamos las medianas de sus lados (nos muestra ostensivamente su pantalla)

GI: Interesante, pero: ¿al alcance de las y los estudiantes? ¿Es una oportunidad para el aprendizaje de lo que estás planeando? …

Interpelamos a Javier desde su lugar de confort: el dominio del contenido geométrico e informático (MK) para hacerlo analizar su propuesta de tarea. Las intervenciones dan cuenta de un PCK en construcción Las tareas parecen elegirse respetando algunas de sus propiedades, sin analizar en completo su potencialidad matemático- didáctica. Obviar en la selección, las posibles respuestas estudiantiles, implica omitir en el diseño la reflexión sobre el KMLS que en cierta forma modela el escenario para focalizar en el KFLM que se quiere lograr con el análisis del KMT.

CONCLUSIONES Y PROSPECTIVAS

Este trabajo nos permitió analizar lo que un profesor conoce sobre las posibilidades de enseñanza de la geometría, condicionadas por la naturaleza del contenido elegido (KMT). El análisis didáctico de las actividades diseñadas para el aula, nos permitió trabajar sobre el conocimiento de las propiedades del contenido matemático seleccionado como objeto de aprendizaje, interpelar su sentido, desnaturalizar secuencias de aprendizaje, cuestionar cogno-afectivamente las producciones matemáticas de las y los estudiantes, mejorar la comprensión de los fenómenos didácticos que se dan en el aula, generar conocimiento especializado. Nos adentramos en el conocimiento sobre las características de aprendizajes derivados de las posibles interacciones de las y los estudiantes con ese contenido elegido (KFLM). Reflexionamos acerca de qué cree el profesor deberían aprender sus estudiantes, con qué nivel de detalle desarrollar cada contenido, cómo relacionar lo nuevo a aprender con lo ya aprendido (KMLS). A través del análisis de las tareas, pudimos caracterizar cómo un profesor facilita la comprensión matemática cuando selecciona el ejemplo apropiado y proporciona una tarea desafiante determinada por el conocimiento especializado que posea (KMT). En un ambiente centrado en la reflexión sobre estrategias de enseñanza que permitan obtener información del pensamiento de los estudiantes, logramos caracterizar la práctica docente como una actividad que genera conocimiento profesional en forma paralela a su existencia, como una acción compleja y conjunta donde se intercambian sentidos e intencionalidades de enseñanza y sentidos y posibilidades de aprendizaje (PCK). Los diálogos, nos muestran cómo MTSK permite disgregar el conocimiento con propósitos analíticos, y caracterizar la enseñanza como una actividad situada, en la que la puesta en acto de conocimientos, procesos y habilidades docentes, le otorga visos de una actuación profesional. El registro de lo actuado, la discusión de lo anotado, el intercambio de puntos de vista sobre los pasos dados, pone en evidencia la necesidad de conocer en profundidad los temas de geometría que se están usando y las decisiones didácticas que focalizan en el análisis del rol de estudiantes como productores de conocimientos matemáticos en los distintos niveles de enseñanza: elementos con los que continuaremos indagando sobre el PCK de Javier a través de otro tipo de dispositivos.

Reconocimientos

Este trabajo es parte del proyecto PICT-2019-03051 radicado en el LICH-UNSAM-CONICET. Los autores son miembros de la red iberoamericana MTSK.

Referencias

Adler, J. (2010). La conceptualisation des ressources. Apports pour la formation des professeurs de mathématiques. En G. Gueudet y L. Trouche (dir.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques,* 23-39. Rennes: Presses Universitaires de Rennes.

Bednarz, N. (2004). Collaborative Research and Professional Development of Teachers in Mathematics. En M. Niss, E. Emberg (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Mathematics Education*, 4-11 july 2004. Copenhagen, Denmark.

Bell, C., Wilson, S., Higgins, T. y McCoach, D. (2010). Measuring the Effects of Professional Development on Teacher Knowledge: The Case of Developing Mathematical Ideas. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(5), 479-512.

Carrillo J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. (2018). *The mathematics teacher's Specialised knowledge (MTSK) model. Research in Mathematics Education*. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la concepción de elementos del modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas MTSK* (Tesis doctoral, Universidad de Huelva). http://hdl.handle.net/10272/11503

Gueudet, G. y Trouche, L. (2012). Teachers' work with resources: Documentational geneses and professional geneses. En G. Gueudet, B. Pepin y L. Trouche (eds.), *From text to "lived" resources. Mathematics curriculum materials and teacher's development*, 23-42. Dordrecht: Springer.

Kaiser, G. y Li, Y. (2011). Reflections and future prospects. En Y. Li y G. Kaiser (Eds.), *Expertise in mathematics instruction. An international perspective,* 343–353. New York: Springer.

Scheiner, T., Montes, M.A., Godino, J.D., Carrillo, J., y Pino-Fan, L. (2017). What makes mathematics teacher knowledge Specialised? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education, 37*, 270. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

Skovsmose, Ole (1999) *Hacia una filosofía de la Educación Matemática Crítica.* Bogotá: Una empresa docente.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Morata.

Villella, J; Fioriti, G; Ferragina, R; Lupinacci, L; Bifano, F; Almirón, A. (2018). A professional development experience in Geometry for High School teachers: introducing teachers to Geometry workspaces. En Herbst, P; Cheah, U; Jones, K; Richard, P. (eds), *International Perspectives on the teaching and learning of Geometry in secondary schools,* 197-214. Cham: Springer.

MTSK COMO CONTEÚDO EM UM CURSO DE PEDAGOGIA: UM ESTUDO ENVOLVENDO PERCEPÇÕES DE ESTUDANTES SOBRE A MATEMÁTICA E OS CONHECIMENTOS DOCENTES

MTSK as content in a Pedagogy course: a study involving student's perceptions about Mathematics and teaching's knowledge.

Zero, B. M. [a]

[a]Fundação Hermínio Ometto

Temática: 1 – MTSK na formação docente

Resumo. Este trabalho (um estudo de caso) teve por objetivo socializar e discutir ideias apresentadas por estudantes de um curso de Pedagogia a respeito de suas percepções sobre a Matemática, bem como pretendeu identificar alguma(s) mudança(s) nos(as) alunos(as) após um breve estudo feito na disciplina a respeito do referencial que envolve o modelo de conhecimentos – MSTK. Trata-se de uma investigação qualitativa em que os dados foram coletados por dois instrumentos de avaliação, sendo o primeiro um questionário realizado na primeira aula da disciplina e o segundo a partir de outro questionário aplicado ao final da disciplina em que uma das questões referia-se ao modelo do MTSK. Foi possível perceber que a aversão à Matemática inicialmente apresentada pelos(as) estudantes tem sido re-significada após o breve contato com o MTSK.

Palavras-chave. Pedagogia, matofobia, prática de ensino, MTSK.

Abstract. This work (a case study) aimed to socialize and discuss ideas presented by students of a Pedagogy course about their perceptions about Mathematics, as well as to identify some change(s) in the students after a brief study done in the discipline about the reference that involves the knowledge model - MSTK. This is a qualitative research in which the data were collected by two evaluation instruments, the first being a questionnaire given in the first class of the course and the second from another questionnaire applied at the end of the course in which one of the questions referred to the MTSK model. It was possible to see that the aversion to mathematics initially presented by the students has been re-signified after the brief contact with the MTSK

Keywords. Pedagogy, fear of math, teaching practice, MTSK.

MOTIVAÇÕES DA PESQUISADORA PARA A ELABORAÇÃO DESTE ESTUDO

No primeiro semestre de 2021, ao assumir um novo papel em minha atuação docente - como professora formadora de um curso de licenciatura em Pedagogia, especialmente em três disciplinas voltadas ao ensino de Matemática - compreendi que três grandes desafios se mostravam latentes: 1. A necessidade de identificação da existência de matofobia (Papert, 1988) entre os(as) estudantes; 2. A importância da retomada dos conteúdos matemáticos que devem ter sido estudados na escolarização desses futuros professores e 3. O levantamento de estratégias para levá-los(as) a mobilizar esses conteúdos em suas futuras práticas de ensino.

Pensar no momento de ingresso dos licenciandos, na permanência dos veteranos e no relacionamento a ser estabelecido com eles, foi um ponto de reflexão levantado no planejamento de cada disciplina. O entendimento de que haveria grupos de alunos em diferentes momentos de sua formação inicial levou-me à retomada de um dos elementos abordados por Shulman (2015) em sua base: o conhecimento dos alunos. No caso desta investigação, o foco se encontra no trabalho realizado em uma disciplina em que o

Zero, B. M. (2021). MTSK como conteúdo em um curso de pedagogia: um estudo envolvendo percepções de estudantes sobre a matemática e os conhecimentos docentes. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 106–113). Congresseme.

modelo de conhecimentos denominado MTSK foi abordado como um dos conteúdos durante as aulas.

Durante meu percurso de mestrado (Zero, 2020), a investigação principal pautou-se no referencial de Shulman (2015), especialmente na base que este propõe acerca de conhecimentos voltados para o ensino e a relação entre essa base e as narrativas de professores formadores de cursos de licenciatura em Matemática. É importante destacar a relevância desta base e sua representação no campo de estudos voltados à formação docente, pois por meio dela – inserida nas publicações feitas na década de 1980-, outros investigadores propuseram novas pesquisas e conceitos teóricos em áreas específicas do conhecimento: no caso da Matemática, há contribuições dos trabalhos de Ball, Thames e Phelps (2008) com o Conhecimento Matemático para o Ensino e de Carillo, Climent, Contreras e Muñoz-Catalán (2013) como o Conhecimento especializado do professor que ensina Matemática (MTSK).

Professores que ensinam matemática (Fiorentini, Passos & Lima, 2016) atuam e inserem-se em diferentes etapas de ensino da educação básica brasileira, bem como possuem diferentes tipos de formação inicial acadêmica: há licenciados em Matemática e em Pedagogia, por exemplo. No caso deste último curso, as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Curso de Graduação em Pedagogia (Resolução CNE/CP n. 1, 2006) em seu artigo 5º, estabelecem que "O egresso do curso de Pedagogia deverá estar apto a [...]" e em seu inciso VI "ensinar Língua Portuguesa, Matemática, Ciências, História, Geografia, Artes, Educação Física, de forma interdisciplinar e adequada às diferentes fases do desenvolvimento humano". Verifica-se que a polivalência profissional esperada dos(as) futuros(as) demandará um aprofundamento nos conteúdos das disciplinas que deverão lecionar, bem como na aprendizagem de formas de articular e integrar tais conteúdos ao desenvolvimento dos alunos, visto que os(as) pedagogos(as) são habilitados(as) a lecionar em fases pontuais do desenvolvimento (infância) nas quais se encontram as crianças (na Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental).

Compreender a bagagem de vivências escolares que os(as) licenciandos(as) em Pedagogia trazem, o que pensam a respeito das disciplinas, mapear seus conhecimentos prévios, suas percepções e necessidades, torna-se uma responsabilidade dos cursos e, neste caso, nos voltamos para a Matemática, visando saber o que pensavam a respeito dela – com base em suas experiências escolares – para dar prosseguimento a uma disciplina que atendesse às necessidades formativas dos futuros(as) professores.

Portanto, esse trabalho se constitui num estudo de caso (Ponte, 2006) em que os dados foram coletados a partir das vivências e produções de uma turma de um curso de licenciatura em Pedagogia. Como procedimentos metodológicos foram utilizados dois instrumentos – uma nuvem de palavras e respostas de um questionário avaliativo. Tais dados foram analisados por meio da proposta de Bardin (2016) e serão explicitados nas próximas seções.

Percepções dos(as) licenciandos sobre a Matemática advindas de sua escolarização.

Sabe-se que de acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei n. 9394, 1996) especificamente no parágrafo 44, um dos requisitos para a inserção do estudante no Ensino Superior é o término dos estudos no Ensino Médio, ou seja, é necessário que tal aluno comprove sua conclusão na Educação Básica.

Dessa forma, a escolha de um estudante pela docência vem implicada de memórias, experiências e perspectivas a respeito das disciplinas e conteúdos com os quais lidou no papel de aluno por vários anos. Sua passagem pela licenciatura – formação inicial – além de promover sua preparação para assumir outra perspectiva a respeito da sala de aula (pensando no papel que desempenhará como docente), deve levá-lo a entender que o ensino (atividade que desempenhará no futuro) não é uma reprodução do que os seus professores fizeram (Cooney, 1994, como citado em Ribeiro, Policastro, Marmoré & Di Bernardo, 2018, p. 153).

Para identificação das percepções que os alunos (licenciandos(as) em Pedagogia) traziam acerca da Matemática em sua escolarização, no início de umas das disciplinas algumas questões foram propostas por meio do software Mentimeter, sendo que duas delas serão aqui apresentadas. A primeira pergunta: “Você tem medo da Matemática?” foi respondida por 30 alunos, indicando que 73,3% deles (22 alunos) afirmaram que sim e apenas 26,7% deles responderam não ter aversão a esta disciplina. A outra tarefa, apresentada no mesmo dia, solicitava aos(as) licenciandos(as) que indicassem quatro palavras a respeito das representações matemáticas que trouxeram de sua escolarização. A consolidação dos dados foi apresentada pelo software Mentimeter em uma nuvem de palavras. Para Vasconcellos-Silva e Araujo-Jorge (2019, p. 42)

> Nuvens de palavras (NP) são recursos gráficos que representam frequências de palavras utilizadas em um texto. Por meio de algoritmos é possível construir imagens formadas por dezenas de palavras cujas dimensões indicam sua frequência ou relevância temática em meio a centenas ou milhares de postagens.

Este recurso tem um bom potencial de análise, embora um cuidado necessário da parte do(a) pesquisador(a) seja identificar os mesmos termos que podem ser encontrados em diferentes lugares da imagem, devido a pequenas alterações na escrita da palavra. É possível verificar, por exemplo que, conforme Figura 1 a palavra “difícil” é encontrada duas vezes na nuvem: uma em verde, em um tamanho significativo e sem acento (“dificil”) e na cor roxa, em tamanho inferior, com acento (“difícil”).

Figura 1. Nuvem feita no software Mentimeter com as respostas dos(as) alunos(as) sobre as representações matemáticas advindas de sua escolarização.

A análise dos dados da nuvem foi orientada pelos pressupostos de Bardin (2016) e dessa forma foram estabelecidas duas grandes categorias: 1. Conteúdos, recursos e procedimentos matemáticos e 2. Comportamentos e características perante a Matemática. Na primeira categoria foram identificadas as seguintes palavras: ábaco, adição, Álgebra, Bháskara, cálculos, conjuntos, contas, diagrama, divisão, equação/equação de segundo grau, exercícios, formas, fração, função, Geometria, gráficos, lógica, material dourado, multiplicação, números, obstáculo, porcentagem, problema, raciocínio/raciocínio lógico, regra de três, regra de dois (termo que revela uma interpretação equivocada da regra de três), soma, subtração e tabuada.

Com relação à nuvem, aparecem de forma mais destacada os termos "medo", "dificuldade", "divisão" "difícil", "adição", "equação" e "lógica.", sendo interessante denotar que os(as) alunos(as) – também futuros professores - associavam a Matemática principalmente a sentimentos/situações aversivos como medo e dificuldade, quanto à Aritmética e suas operações (adição e divisão).

No caso da segunda categoria (Comportamentos e características perante a Matemática), houve a necessidade de se estabelecer outras três subcategorias, visto que havia comportamentos e características aversivos, não aversivos (positivos) e alguns que poderiam ser interpretados das duas maneiras, dependendo do sentido que o sujeito poderia atribuir. Além da análise preliminar da nuvem de palavras (Figura 1) em que a dimensão dos termos leva à percepção de sua frequência (quanto maior é o tamanho da palavra, mais recorrente é a sua expressão pelos participantes) outras considerações podem ser feitas pelos dados do quadro da Figura 2.

Termos que indicam comportamentos e/ou características aversivos perante a Matemática	Aflição; anseio/ansiedade; complicada; confusão/confuso; desconforto; desgosto; difícil/dificuldade; discalculia (transtorno de aprendizagem); enlouquece; estressante; falta interpretação; incerteza; insegurança; massante; medo; nada fácil; opressão; ranço; receio; tensão; vergonha.
Termos que indicam comportamentos e/ou características não aversivas perante a Matemática	Confiança; conseguir; interesse na aprendizagem; legal; satisfação.
Termos que indicam comportamento ou características que podem ou não ser aversivos perante a Matemática	Complexidade/complexo; concentração; desafiadora/desafio; dúvida; esforço; pensar demais.

Figura 2. Quadro com subcategorias de termos apresentados pelos(as) estudantes na nuvem de palavras.

No que se refere à Figura 2, a quantidade de termos que indicam comportamentos aversivos se sobressai à quantidade de termos não aversivos ou que podem ou não ser caracterizados desta maneira. Trata-se de aspectos que não podem ser negligenciados pelos cursos de formação inicial, pois se não forem trabalhados e re-significados nesses espaços, impactarão a aprendizagem dos(as) estudantes da educação básica.

Encontramos então no modelo do MTSK uma alternativa que pode levar os(as) futuros(as) pedagogos(as), pedagogos(as) e formadores de pedagogos(as) – em disciplinas que lidam com o ensino de Matemática – a compreenderem as especificidades dessa disciplina (KSM), as articulações que podem ser feitas entre seus tópicos (KOT), formas de aprendê-la e exercitá-la (KPM), bem como a desenvolver maneiras de estender tais aprendizagens docentes para as salas de aula que também estarão em sua responsabilidade (KMT, KFLM, KMLS).

MTSK COMO CONTEÚDO EM UMA DISCIPLINA MATEMÁTICA DE UM CURSO DE PEDAGOGIA.

A partir de minha experiência com o referencial de Shulman (2015) durante a pesquisa de mestrado (Zero, 2020), bem como em leituras, disciplinas da pós-graduação e participações em eventos que tocavam na temática do modelo do MTSK, a prática que pretendia desenvolver com estudantes da licenciatura em Pedagogia foi, desde o momento do planejamento, intencional e visava trabalhar não apenas conteúdos matemáticos com os(as) licenciandos(as), mas sim proporcionar reflexões sobre a natureza desses conhecimentos, indicar possibilidades de estratégias de ensino, apresentação de recursos e maneiras de articulá-los em outras disciplinas (interdisciplinaridade) e, principalmente, levá-los a pensar na relevância da Matemática para a vida e realidade dos futuros(as) alunos(as) que terão.

As temáticas e conteúdos trabalhados nas aulas foram: Base Nacional Comum Curricular; Resolução de problemas, História da Matemática; Modelagem; MTSK; Etnomatemática; introdução à Aritmética – adição e seus sentidos – e introdução à Estatística – a escolha deste último tópico foi pensada visando a sensibilizar os(as) alunos(as) para a compreensão de que a Matemática vai além das quatro operações básicas (Aritmética). É importante dizer que se trata da primeira disciplina envolvendo o ensino de Matemática que esse grupo de estudantes teve no curso e, de acordo com a grade vigente, ainda haverá outras disciplinas para aprofundamento de conteúdos. Em diversos momentos, após a retomada de algum tópico específico (exemplo: Adição), tais alunos foram orientados a, coletivamente, elaborarem uma estratégia de ensino (como uma tarefa ou problema) para abordar o tema com diferentes grupos de alunos tanto da Educação Infantil, quanto dos anos iniciais do Ensino Fundamental, em suas diversas modalidades – como a EJA (Educação de Jovens e Adultos), visto que pedagogos(as) são habilitados para lecionar em diversos espaços.

Acerca do MTSK, a docente propôs a leitura do texto de Mazzi (2015) visto que este material abordava a questão do modelo teórico nos anos iniciais do Ensino Fundamental, trazendo também certa contextualização sobre os cursos de Pedagogia. Nas últimas aulas, como um instrumento avaliativo, foi proposto aos(as) estudantes que respondessem a um questionário composto por quatro perguntas, sendo a primeira a respeito da Etnomatemática, a segunda sobre o planejamento de tarefas matemáticas motivadoras, a terceira sobre o modelo do MTSK e a última sobre cálculo mental. No caso dessa investigação, nos concentraremos na terceira questão: “No modelo do MTSK, qual e/ou quais dos conhecimentos lhe chamou mais a atenção? Por quê?”. Participaram desse procedimento 21 respondentes. Percebe-se que tal pergunta permitia que o sujeito indicasse um ou mais elementos presentes no modelo (MTSK). Nas respostas foram identificados os seguintes dados: KoT (Conhecimento matemático dos tópicos) – indicado por 3 alunos; KsM (Conhecimento da estrutura Matemática) – indicado por 4 estudantes; KPM (Conhecimento da Prática Matemática) – indicado por 11 estudantes; KFLM (Conhecimento das características de aprendizagem) – indicado por 1 estudante; 2 estudantes fizeram reflexões a respeito da pergunta e não selecionaram um conhecimento do modelo e 1 estudante selecionou o "Conhecimento Pedagógico do Conteúdo", embora este seja um dos domínios e não um elemento específico desse referencial em si. Os elementos KMLS e KMT não foram apontados por nenhum participante.

Dentre os dados se destaca a escolha de 52,4% dos estudantes pelo elemento "Conhecimento da prática" (KPM), o que nos leva a articular tal fato com as inferências advindas da nuvem de palavras: como o medo da Matemática era uma recorrência, a escolha de uma alternativa que visasse demonstrar a natureza dessa disciplina, fez sentido para a maioria. É possível também que a nomenclatura deste conhecimento específico (Conhecimento da prática) possa ter sido interpretada e associada por muitos deles como formas práticas de se fazer e aplicar conhecimentos matemáticos em diversos contextos. O quadro disposto na Figura 3 composto por exemplos das respostas de participantes também traz reflexões sobre a necessidade de aprofundamento nos conteúdos matemáticos (excerto 1), a relação que pode/deve ser feita entre seus temas (excerto 2), a compreensão da relevância da natureza da Matemática e de seus procedimentos (excerto 3) e a preocupação com a aprendizagem (excerto 4), ultrapassando a ideia de constrangimento pelo erro (sendo o exemplo apresentado pelo sujeito do excerto 4 um indício de que situações aversivas na aprendizagem matemática talvez possam ter ocorrido no decorrer da escolaridade dos estudantes).

Excerto 1	**Exemplo de resposta para Kot:** O conhecimento que mais me chamou atenção no modelo MTSK foi o Conhecimento Matemático dos Tópicos, pois nunca tinha parado para pensar na necessidade do educador se aprofundar em conteúdos matemáticos. Muito se pensa em estratégias de ensino e metodologias, o que são de grande relevância, contudo não se pode desconsiderar o domínio do professor do conteúdo que irá ensinar. A Matemática, como uma ciência complexa, necessita de competência do profissional que irá aplicá-la em sala de aula. Esse modelo me fez olhar para esse outro lado do ensino-aprendizagem da Matemática
Excerto 2	**Exemplo de resposta para KsM:** O elemento que mais me chamou a atenção foi o Conhecimento da Estrutura da Matemática (KSM), porque ele fala sobre a importância do professor conhecer as relações entre as diversas estruturas matemáticas, sendo a conexão entre conteúdos de diferentes níveis escolares, o que aprendemos ser muito importante, porque dá ao professor abertura para trabalhar o mesmo tema, como a porcentagem ou estatísticas, em diversas séries escolares, mas se atentando às limitações ou no modo em que ele deve apresentar a matéria para maior compreensão dos estudantes.
Excerto 3	**Exemplos de resposta para KPM:** O Conhecimento da prática matemática, pois conhecer e saber os métodos para fazer matemática é tão importante quanto saber o resultado.
Excerto 4	**Exemplo de resposta para KFLM:** [...] Além de avaliar como o aluno está se saindo em sala de aula, ele ajuda o professor a encontrar o erro e se tornar um profissional melhor, para que não seja constrangedor para o aluno quando responder errado, mas que a maior preocupação seja a aprendizagem.

Figura 3. Exemplos de respostas apresentadas pelos(as) estudantes sobre os conhecimentos do modelo MTSK.

Reconhecemos que ainda será necessário proporcionar outras leituras e práticas de ensino pautadas neste referencial (MTSK) em prol da modificação da perspectiva aversiva que muitos licenciandos revelam perante a Matemática, mas os primeiros dados aqui levantados, advindos de momentos de aulas remotas e relações travadas virtualmente, já indicam o início da desconstrução de uma percepção matemática que é ensinada linearmente, sem o estabelecimento de sentidos e significados compreensíveis, gerada pelo medo advindo das experiências escolares que muitos estudantes do Ensino Superior em cursos de licenciatura (como Pedagogia) tiveram.

CONSIDERAÇÕES

Este trabalho que teve por objetivo socializar e discutir ideias apresentadas por estudantes de um curso de Pedagogia a respeito de suas percepções sobre a Matemática, atendeu ao seu propósito, visto que também identificou mudanças na perspectiva dos(as) alunos(as) após o breve contato que tiveram com o referencial que envolve o modelo de conhecimentos – MSTK. É possível compreender também que os dados do presente texto talvez representem um caminho para novas pesquisas em crenças de futuros(as) pedagogos(as)/ou pedagogos(as) de acordo com a categoria "beliefs" do referencial estudado, pois o que fora aqui levantado abre margem para investigações ainda mais específicas com a adoção de outros procedimentos e instrumentos (exemplos: grupo focal, entrevistas e cursos) que levem não apenas à identificação do que pensam e sentem os(as) alunos(as) sobre a Matemática – embora este aspecto seja fundamental – mas também a propostas práticas que transformem a aversão em uma percepção mais saudável e positiva com essa disciplina.

Embora se possa levantar o argumento de que a aversão de futuros(as) pedagogos(as) à Matemática seja frequente e facilmente encontrada na literatura, percebemos que se trata de uma questão não superada, visto que os dados apresentados foram levantados ainda neste ano (2021) e indicam que investigações e propostas práticas precisam ser contínuas no campo da formação de professores que ensinam matemática para os anos iniciais, sendo o MTSK uma alternativa teórica que pode mobilizar experiências interessantes e não aversivas em licenciandos(as), pedagogos(as) e estudantes da Educação Básica.

Referências

Ball, D. L.; Thames, M. H.; Phelps, G. (2008) Content Knowledge for Teaching: What make it special? *Journal of Teacher Education*, *59* (5), 389-407

Bardin, L. (2016). *Análise de conteúdo.* (Trad. Reto, L.A. & Pinheiro, P.). São Paulo: Edições 70.

Carrillo, J; Climent, N; Contreras, L. C; Muñoz-Catalán, M.C. (2013) Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. *Congress Of European Research I Mathematics Education – Cerme*, 8., 2013, Manavgat, Antalya, Turquia. Conference proceedings Manavgat-Side, Antalya – Turkey, 1-10, Recuperado de: http://cerme8.metu.edu/wgpapers/WG17/Wg17_Climent.pdf

Fiorentini, D., Passos, C. L. B., & Lima, R. C. R. (Org.). (2016). *Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina Matemática:* período 2001 – 2012. Campinas, SP: Faculdade de Educação, Unicamp. Recuperado de: https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/pagina_basica/58/e-book-mapeamento-pesquisa-pem.pdf.

Lei n. 9394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Recuperado de: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm

Mazzi, L. (2015). Conhecimento especializado do Professor de Matemática: um olhar para os anos iniciais do Ensino Fundamental. *Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática – EBRAPEM*, Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil, 19. Recuperado de https://www.ufjf.br/ebrapem2015/files/2015/10/gd01_lucas_mazzi-A1.pdf

Papert, S. (1988). *Logo: computadores e educação*. São Paulo: Brasiliense S.A.

Ponte, J. P. (2006) - Estudos de Caso em Educação Matemática. *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, ano 19, n. 25, p. 105-132, 2006.

Resolução CNE/CP n. 1, de 15 de maio de 2006. Institui diretrizes curriculares nacionais para o curso de graduação em pedagogia, licenciatura. Recuperado de: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01_06.pdf

Ribeiro, M; Policastro, M.; Marmoré, J. & Di Bernardo, R. (2018). Conhecimento especializado do professor que ensina Matemática para atribuir sentido à divisão e ao algoritmo. *Educação Matemática em Revista-RS, 1* (19), 152-167.

Shulman, L. (2015, junho) Conhecimento e ensino: fundamentos para a nova Reforma. *Cadernos Cenpec | Nova série, 4(*2), 196-229. Recuperado de: http://cadernos.cenpec.org.br/cadernos/index.php/cadernos/article/view/293. doi: http://dx.doi.org/10.18676/cadernoscenpec.v4i2.293

Vasconcellos-Silva, P; Araujo-Jorge, T. (2019). Análise de conteúdo por meio de nuvem de palavras de postagens em comunidades virtuais: novas perspectivas e resultados preliminares. Atas – *Investigação Qualitativa em Saúde/Investigación Cualitativa em Salud., 2*, 41-48. Recuperado de: https://proceedings.ciaiq.org/index.php/CIAIQ2019/article/view/2002/1938

Zero, B. M. (2020). Base de conhecimento para o ensino nas licenciaturas em Matemática: uma análise das concepções dos professores formadores sobre suas práticas pedagógicas (Dissertação de mestrado). Centro de Ciências Agrárias, Universidade Federal de São Carlos, Araras, SP, Brasil. Recuperado de: https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/12707/ZERO_Beatriz_2020.pdf?sequence=4&isAllowed=y

DISEÑO DE TAREAS FORMATIVAS PARA CARACTERIZAR EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO Y DIDÁCTICO DE ÁREA Y VOLUMEN DEL DOCENTE DE MATEMÁTICA DEL NIVEL PRIMARIO

Design of task formative to characterize the mathematical and didactic knowledge of area and volume of the primary level mathematics teacher

Beteta-Salas, M. [a]; Quintana-Sánchez, D. [b]; Mejía-Alemán, L. [c]

[a] Universidad de Lima; [b, c] Universidad Nacional de Piura

Temática: 1 - MTSK en la formación docente

Resumen. En la actualidad se percibe una preocupación por mejorar las estrategias de enseñanza del docente de matemática, ello implica movilizar competencias profesionales y especializadas que le permitan desarrollar su práctica. Mathematics Teacher's Specialised Knowledge MTSK es un modelo que permite describir aquellos elementos, tanto matemático, como didáctico que el profesor despliega en su enseñanza. El propósito de la investigación es diseñar tareas formativas desde un enfoque cualitativo con uso de la metodológica top-down y bottom-up. Las tareas formativas se diseñaron en base al conocimiento matemático, para ello se establecieron indicadores en cada una de sus categorías que permiten observar la movilización de conocimientos matemáticos en la enseñanza de área y volumen en el nivel de primaria.

Palabras clave. Formación de Profesores de Matemáticas, Tareas, MTSK, área de polígonos.

Abstract. Currently, there is a concern for improving the teaching strategies of mathematics teachers, which implies mobilizing professional and specialized competencies that allow them to develop their practice. Mathematics Teacher's Specialised Knowledge MTSK is a model that allows describing those elements, both mathematical and didactic that the teacher deploys in his teaching. The purpose of the research is to design formative tasks from a qualitative approach using top-down and bottom-up methodology. The formative tasks were designed based on the domain of mathematical knowledge, for this purpose indicators were established in each of its categories that allow observing the mobilization of mathematical knowledge in the teaching of area and volume at the elementary school level.

Keywords. Mathematics Teacher Education, Tasks, MTSK, area of polygons.

INTRODUCCIÓN

Mejorar las estrategias de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en la educación básica es de suma preocupación en la comunidad de matemática educativa, atender a esta necesidad es posible desde la formación del profesorado, trabajando en el desarrollo de sus competencias como docente de matemática que implican un sólido bagaje de contenido matemático, como también el manejo de estrategias didácticas que sean adecuadas para el logro del aprendizaje y enseñanza de la matemática, al respecto trabajos recientes (Carrillo, Climent, Contreras y Montes, 2020) atienden tanto a la formación inicial y continua de docente desde una reflexión en las prácticas tanto del conocimiento matemático como del didáctico. Montes (2021) señala que es importante brindar a los maestros mecanismos estructurados para que se

Beteta-Salas, M., Quintana-Sánchez, D., & Mejía-Alemán, L. (2021). Diseño de tareas formativas para caracterizar el conocimiento matemático y didáctico de área y volumen del docente de matemática del nivel Primario. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 114–120). Congresseme.

promueva el conocimiento matemático y didáctico, profundizando así en la reflexión sobre su práctica. Es así como la presente investigación tiene como propósito el diseño de tareas formativas que promuevan el conocimiento especializado del contenido en el área de la geometría. A través de estas tareas se pretende que el docente formación profundice en los saberes de área y volumen, para luego con una sólida base de conocimientos gestione el proceso de enseñanza aprendizaje. Respecto al conocimiento docente de matemática Mochón y Morales (2010) señalan que el conocimiento especializado del contenido es clave para el desarrollo del conocimiento del contenido y la enseñanza, y del contenido. La investigación presenta una tarea formativa diseñada a partir de los indicadores extraídos de las categorías del dominio contenido matemático.

MARCO TEÓRICO

El docente de matemática, además ser un maestro de profesión, debe tener conocimientos en su materia no menos rigurosos a los que tienen otros profesionales formados en matemática (Aguilar, Muñoz, Carrillo & Rodríguez, 2018). El conocimiento especializado en la enseñanza de las matemáticas han sido objetos relevantes de estudios en el campo de la Matemática Educativa. Así pues, Shulman (2005) resalta la importancia del conocimiento sobre el contenido para la enseñanza matemática y lo diferencia del conocimiento de otros profesionales, lo que ha inspirado a un grupo de investigadores para crear un modelo donde se representa el conocimiento matemático que los profesores utilizan en el aula para producir aprendizaje (Hill, Ball & Schilling, 2008), llamado MTSK. Tal como lo señala Montes, Contreras y Carrillo (2013) este modelo, “está basado en la idea de que la especialización del conocimiento de profesor de matemáticas deriva de su profesión, es decir, el conocimiento que posee será especializado en tanto le sea necesario para desarrollar su labor como profesor de matemáticas” (p. 404). El MTSK está divido en dos dominios: Conocimiento del Contenido Matemático (MK) y Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). Así mismo, este modelo se compone de seis subdominios, tres referidos al primer dominio; Conocimiento de los temas (KoT), Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM) y Conocimiento de la práctica matemática (KPM); y los restantes al segundo dominio; Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), Conocimiento de los estándares de aprendizaje (KMLS) (Montes et al., 2013). En la figura 1 se muestra el modelo a través de un hexágono en cuyo centro se encuentran la creencias y percepciones respecto a la matemática y sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

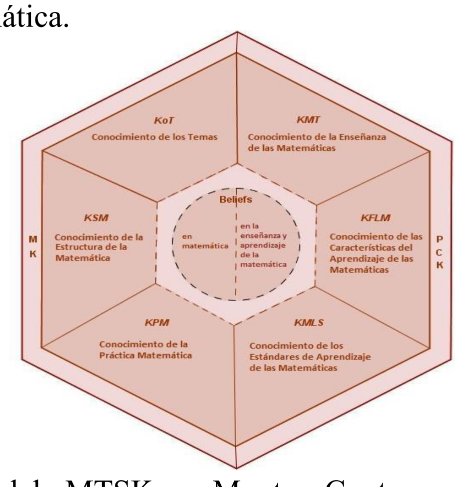


Figura 1. Modelo MTSK por Montes, Contreras y Carrillo (2013)

Las tareas formativas son clave para la enseñanza aprendizaje de las matemáticas en la formación docente, ya que desarrollan habilidades y competencias en la enseñanza de la matemática (Grevholm, Millman y Clarke, 2009), en la presente investigación se diseñan tareas formativas con el propósito de mover conocimientos especializados del contenido de la geometría que implican área y volumen, estas tareas formativas promueven en los futuros docentes uso de estrategias de resolución y análisis así como el desarrollo de procesos de simbolización, lenguaje matemático y elaboración de gráficos que permitan su sustentación, estas tareas implican hacer uso de un conjunto conocimientos matemáticos que en el modelo MTSK se encuentran en la dimensión del conocimiento matemático como se puede observar en la tabla 1.

Tabla 1. Indicadores por categoría de acuerdo con Subdominio MTSK

Sub Dimensión	Categoría
Conocimiento Matemático (MK)	Definiciones Registros de Representación Procedimientos Fenomenología
Conocimiento de la estructura matemática (KSM)	Conexiones de complejización Conexiones de Simplificación Conexiones auxiliares Conexiones Transversales.
Conocimiento de la práctica matemática (KPM)	Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución problemas matemáticos. Prácticas particulares del quehacer matemático.

METODOLOGÍA

El diseño metodológico desde el enfoque cualitativo que se utilizó es el método top down y bottom-up de la teoría a los datos (Niss, 2006), empezamos con el top down, generando una caracterización teórica del MTSK, tomando en cuenta las distinciones en a los procesos de construcción de los subdominios del conocimiento matemático y didáctico, así como su manifestación. Posteriormente, recurrimos a una aproximación bottom-up, en la cual se reinterpreta la definición de los subdominios, en este proceso se complementa la caracterización teórica para tener una visión más particular de las formas de conocer el contenido que un profesor de matemáticas puede tener y las cuales, en conjunto, le permitirán actuar como un especialista de la educación matemática. Establecidas las categorías se elaboraron los indicadores que permitan caracterizar el conocimiento matemático en la enseñanza de área y volumen, triangulando distintos momentos de la investigación para así obtener un análisis lo más completo posible. Los pasos seguidos fueron los siguientes: Se inicio con una sensibilización teórica respecto a los dominios y categorías del MTSK, para luego elaborar los indicadores para cada una de las categorías de los subdominios del MK, diseñar de las tareas formativas que permitirán caracterizar el conocimiento matemático del docente, analizar y reformular desde la reflexión del diseño de la tarea.

Indicadores del MK

A partir de las 11 categorías del MK se establecieron los indicadores para cada uno de los 3 subdominios. A continuación, se presentan los indicadores utilizados en la tarea formativa diseñada.

Tabla 2. Indicadores por categoría del Conocimiento Matemático MK

Sub-Dimensión	Categoría	Indicador
KOT	Definiciones	• Conocimiento del área como medida de superficie. • Conocimiento del área como recubrimiento. Empleando el cuadrado unitario (de medida 1) o unidad cuadrada para hallar el área de otras regiones. Esta definición implica selección arbitraria de la unidad de área.
	Registros de Representación	• Conocimiento del Registro gráfico para resolver problemas asociados a las figuras de regiones poligonales, áreas sombreadas y / o por recubrimiento.
	Procedimientos	• Conocimiento del procedimiento para calcular área de regiones empleando la superposición de figuras o recubrimiento. • Conocimiento del procedimiento para calcular áreas de regiones poligonales a partir de su descomposición en figuras más simples. • Conocimiento de que el proceso de medida de áreas es el mismo que el de cualquier otra medida, en la que se elige una unidad de medida y se expresa el área de una región como un múltiplo (o submúltiplo) de la unidad de medida. • Conocimiento del procedimiento para calcular área por estimación a través de la percepción de las cantidades de magnitud a estimar.
KSM	Conexiones de complejización	• Conocimiento de área de figuras no regulares, aproximándose a ellas a través de la suma de áreas de figuras regulares como el rectángulo. • Conocimiento de la partición de un intervalo en subintervalo cada vez más finos. La medida de cada intervalo nuevo es la base de un rectángulo y por lo tanto la suma de las áreas varía si la partición se hace más fina.
	Conexiones de Simplificación	• Conocimiento sobre figura abierta y figura cerrada en el plano como base para la formación del concepto de polígono.
KPM	Prácticas particulares del quehacer matemático.	• Conocimiento de argumentaciones explicativas como medio para explicar el significado del área a partir de casos individuales. • Conocimiento de argumentaciones empírico-inductivas centradas en el cumplimiento de una afirmación para validar una propiedad. • Conocimiento de esquemas de tipo Prueba deductiva informal con el soporte de analogías, uso de elementos gráficos.

Diseño de la tarea

Para el diseño de la tarea se contempló permita se logren observar la mayoría de los indicadores del MK, una vez diseñada la tarea se cotejo los indicadores que se lograrían observar en el desarrollo de esta. La tarea formativa involucró el cálculo de área de una región poligonal haciendo uso del geoplano. A continuación, presentamos la tarea

Tarea 1

Con uso del geoplano construye una figura abierta y una cerrada.

Con el uso del geoplano construye un rectángulo de largo 4 unidades y de ancho 3 unidades ¿Cuál es el área del rectángulo? Muestre el procedimiento para obtener dicha área. o Particionar el rectángulo en 2 rectángulos iguales. Calcular el área de cada uno de estos rectángulos y luego sume dichas áreas. ¿Qué relación existe entre el área del rectángulo y la suma de área de los 2 rectángulos? o Particionar el rectángulo en 4 rectángulos iguales. Calcular el área de cada uno de estos rectángulos y luego sume dichas áreas. ¿Qué relación existe entre el área del rectángulo y la suma de área de los 4 rectángulos?

Sobre la idea de partición, calcule el área de un rectángulo de largo 5 unidades y de ancho 7 unidades. Mostrar el procedimiento que utilizado.

Las tareas tienen como intención conducir a los alumnos desde el conocimiento de área un polígono como recubrimiento de un espacio limitado del plano a comprender el área del polígono sobre la idea de la partición de un intervalo en subintervalo cada vez más finos, como muestran las figuras 1, 2 y 3.

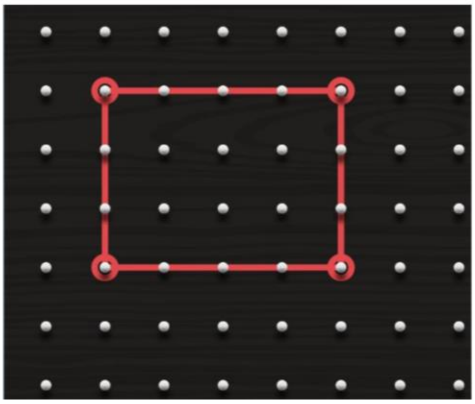


Figura 2. Construcción de Rectángulo

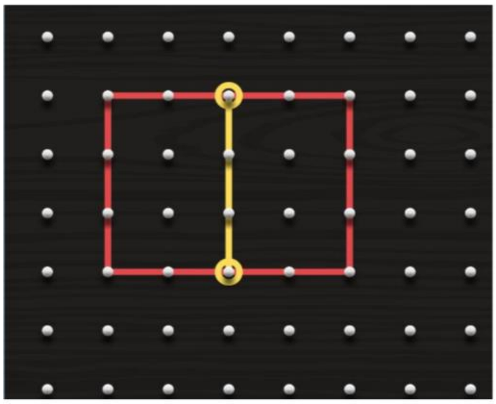


Figura 3. Construcción de rectángulo particionado en dos partes iguales

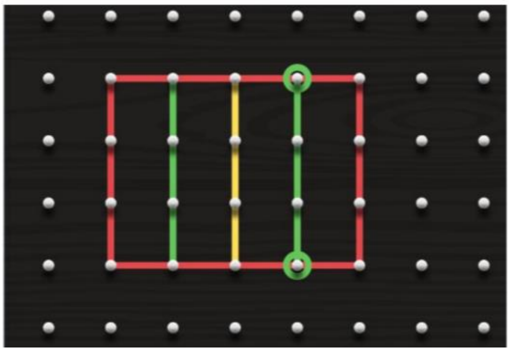


Figura 4. Construcción de rectángulo particionado en dos partes iguales

Tarea 2

Con uso del geoplano construye la figura que se muestra

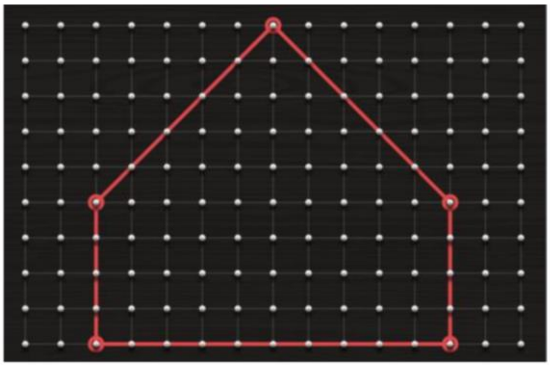


Figura 5. Construcción solicitada en la tarea 2

Sobre la idea de partición, calcule el área de la figura.

La intención de esta tarea es que se utilice el conocimiento del área sobre la idea de la partición, la posible solución en la estrategia la observamos en la figura 6.

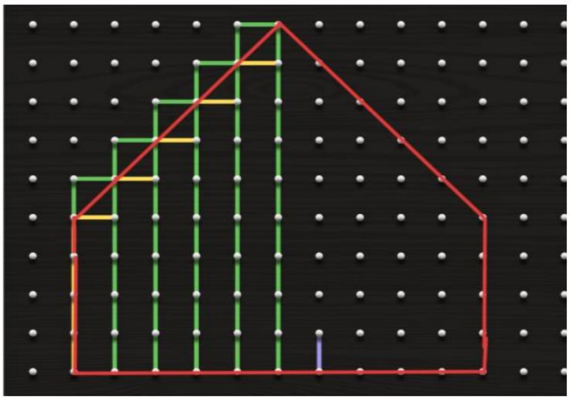


Figura 6. Estrategia de cálculo de área sobre la idea de partición.

Como podemos apreciar en la figura 4, en base a la idea de la participación se puede lograr el área por exceso o por defecto, de manera que se reflexione sobre el recubrimiento y la estrategia empleando la idea de partición. Esta reflexión conducirá además a proponer otras posibles estrategias como calcular el área dividiendo la figura en otros polígonos y sumar sus áreas para lograr el área total.

CONCLUSIONES

Las tareas formativas diseñadas a partir de situaciones problemáticas complejas permiten la observación de evidencia de movilización de diversos conocimientos, en este caso con el diseño de las tareas 1 y 2 fundamentadas en el modelo MTSK, se pretende lograr una profundización respecto al área de polígonos, que se puede evidenciar en los niveles de complejidad que se siguen en la instrucción de las tareas. El diseño de estas tareas logró incorporar a indicadores de las tres subdimensiones del conocimiento matemático, todavía nos queda por diseñar otras tareas que incorporen a los otros indicadores para así lograr complementar la investigación y presentar una propuesta de tareas formativas, que los maestros formadores puedan utilizar para el logro del conocimiento especializado del docente de matemática de primaria, todo ello acompañado de la reflexión de los docentes referida a las diversas estrategias que se pueden emplear para el cálculo de área y volumen.

Referencias

Aguilar-González, A., Muñoz-Catalán, M. C., Carrillo-Yáñez, J. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas? *PNA*, 13(1), 41-61.

Carrillo, J., y Contreras, L. C. (2017). *Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva*. Huelva: CGSE.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2020). Using Professional Development Contexts to Structure Prospective Teacher Education. En S. Llinares y O. Chapman (Eds.), International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2 (pp. 393-419). Londres: Brill.

Grevholm, B., Millman, R., & Clarke, B. (2009). Function, Form, and Focus: The role of Tasks in Elementary Mathematics Teacher Education. In B. Clarke, B. Grevholm, R. Millman (Eds.),Tasks in Primary Mathematics Education: Purpose, Use and Exemplars (pp. 1–5). New York: Springer

Mochón, S. y Morales, M. (2010). En qué consiste el “conocimiento matemático para la enseñanza” de un profesor y cómo fomentar su desarrollo: un estudio en la escuela primaria. *Educación Matemática* 22(1), 87-113.

Montes, M. A., Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 403-410). SEIEM

Montes, M., Pascual, M. I. y Climent, N. (2021). Una aproximación a la formación especializada en matemáticas de maestros egresados. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 24(1), 83-104. https://doi.org/10.12802/relime.21.2414

Niss, M. (2006). The concept and role of theory in mathematics education. En C. Bergsten, B. Grevholm, H. Måsøval, y F. Rønning (Eds.), *Relating Practice and Research in Mathematics Education. Proceedings of Normal* 05, 97-110. http://cutt.ly/cth7BHd

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* 1(1), 39-63

RELACIONES ENTRE SUBDOMINIOS DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN LA LOCALIZACIÓN EN EL PLANO CARTESIANO

Relationships between subdomains of mathematics teacher specialised knowledge in localisation in cartesian plane

Pacheco-Muñoz, E. [a]; Juárez-Ruíz, E. [b]; Flores-Medrano, E. [c]

[a; b; c] Maestría en Educación Matemáticas Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Temática: 1–MTSK en la formación docente

Resumen. El objetivo de esta investigación es establecer y analizar las relaciones entre subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemática en la localización de puntos en el plano cartesiano. Como marco de referencia se tomó en cuenta el Mathematics Teacher's Specialised Knowledge, el cual se ha utilizado como una herramienta de análisis para caracterizar el conocimiento del profesor de matemáticas. La metodología fue de tipo cualitativa, con un diseño de estudio de caso instrumental. En los resultados se evidenciaron las relaciones de algunas categorías de los subdominios conocimiento didáctico del contenido, con el conocimiento de los temas y estructuras de las matemáticas. Estas relaciones entre los subdominios son potencialmente útiles para el diseño de cursos para profesores en formación inicial y continua.

Palabras clave. Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas, Localización en el plano cartesiano, Modelo MTSK.

Abstract. The aim of this research is to establish and analyse the relationships between subdomains of the mathematics teacher's specialised knowledge in locating points in the Cartesian plane. The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge, which has been used as an analytical tool to characterise the mathematics teacher's knowledge, was taken as a frame of reference. The methodology was qualitative, with an instrumental case study design. The results showed the relationships between some categories of the subdomains didactic content knowledge and knowledge of the topics and structures of mathematics. These relationships between the subdomains are potentially useful for the design of courses for teachers in initial and in-service training.

Keywords. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK), Localisation in the Cartesian plane, Model MTSK.

INTRODUCCIÓN

Con el trascurrir de los tiempos, ubicarse o localizarse en un lugar determinado ha sido una de las necesidades básicas inmersas en las diferentes comunidades o culturas del mundo, tanto en aspectos relacionados con la supervivencia, como el desarrollo y crecimiento de la población (construir una casa, desplazarse de un lugar a otro y orientarse en diferentes lugares, entre otras).Bishop (2005) plantea que localizar se relaciona con saber desplazarse, conocer el área del propio hogar, viajar sin perderse y relacionar objetos entre sí. Asimismo, según Bishop (1999), "la actividad de localizar en función de contenidos como las descripciones de recorridos, localización en el entorno, arriba-abajo, izquierda-derecha, delante-atrás, distancias, líneas, ángulo como rotación, lugares geométricos en el plano" (p. 489).

Pacheco-Muñoz, E., Juárez-Ruíz, E., & Flores-Medrano, E. (2021). Relaciones entre subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la localización en el plano cartesiano. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 121–128). Congresseme.

Dada la complejidad, pertinencia y trasversalidad que tiene el plano cartesiano, ya sea como sistema de referencia que favorece la ubicación y localización espacial, o como una herramienta que permite la comprensión de otros contenidos matemáticos, aún se siguen presentado dificultades, tanto para localizar puntos en el plano, como para identificar los elementos que componen el plano cartesiano (Aravena y Morales, 2018).

Además, algunas investigaciones (Acuña, 2001; Saiz, 2003) plantean que hay comportamientos de los sujetos en el cotidiano, que muestran dificultades para orientarse en un ambiente nuevo y para utilizar o elaborar planos y mapas. Además, se evidencian los problemas que tienen estudiantes de secundaria para establecer el orden de las coordenadas de los puntos en el plano cartesiano pues, en lugar de utilizar el plano para trabajar en un espacio orientado de dos dimensiones, limitan su uso solo a la descripción de parejas de números negativos o positivos.

Por otro lado, considerando el rol del profesor y de su conocimiento en el proceso enseñanza y aprendizaje Hernández et al. (2015) indican que el nivel de dificultad que el docente en formación asume hacia los problemas relacionados con el uso del plano cartesiano, al momento de desarrollar sus estrategias de enseñanza, está relacionado significativamente con el proceso de aprendizaje, es decir, con las propias dificultades que el niño muestre, tanto en sus procesos de construcción del conocimiento, como en sus espacios de desenvolvimiento. En efecto, el concepto de localización ha venido presentado dificultades para la comprensión en el proceso de enseñanza y aprendizaje y, por otro lado, la falta de estudios enfocados en la práctica del profesor en el tema a nivel de la enseñanza de primaria. Por tanto, el reto del presente estudio es caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la localización en el plano cartesiano en el nivel de básica primaria.

En este sentido, en el afán de estudiar a profundidad el conocimiento del profesor de matemáticas, se han creado diferentes perspectivas, un ejemplo lo plantea el Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIDM), de la universidad de Huelva, después de un alto bagaje de investigación pudieron plasmar lo que hoy se conoce como el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Mathematics Teacher Specialized Knowledge – MTSK) (Carrillo et al., 2013), el cual se ha utilizado como una herramienta de análisis para caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas teniendo en cuenta tres dominios como es el conocimiento matemático, el conocimiento didáctico del contenido y las creencias

En este estudio, el conocimiento del profesor se trata desde la perspectiva del modelo MTSK, en donde se busca establecer y analizar las relaciones existentes entre el conocimiento didáctico del contenido (PCK), el conocimiento de los temas (KoT) y el conocimiento de la estructura de las matemáticas (KMT) evidentes desde una planeación de clase y una entrevista semiestructurada con un profesor en el nivel de la enseñanza primaria de México.

MARCO TEÓRICO

Hablar del conocimiento del profesor es traer al contexto la influencia que ejerce tanto en el proceso de enseñanza como en el aprendizaje de las matemáticas, puesto que consta de un conocimiento heterogéneo útil y necesario. En este sentido, Zakaryan et al. (2018) afirman que "el conocimiento del profesor es reconocido como un factor relevante de su desempeño profesional y para promover el aprendizaje de la matemática de sus alumnos" (p. 105). Cabe resaltar que el conocimiento del profesor, tanto didáctico como matemático, ha sido foco de estudio en los últimos tiempos, puesto que el interés se centra en caracterizar e identificar el qué, cómo y cuándo se hacen pertinentes en la enseñanza de la matemática.

Entre los diferentes modelos existentes en la literatura científica y el foco de estudio que se centran en caracterizar el conocimiento del profesor de matemáticas, en el presente estudio el interés se basa en el modelo MTSK (ver Figura 1).

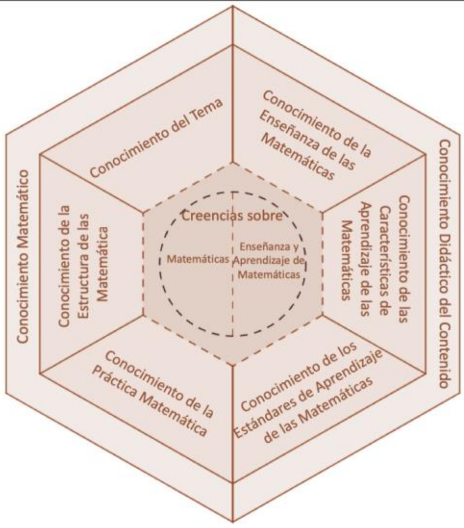


Figura 1. Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Fuente: traducción de Carrillo-Yañez et al., 2018)

El modelo MTSK, según Carrillo-Yañez et al. (2018), está conformado por tres dominios como lo son; *El conocimiento matemático*, que hace referencia al conocimiento disciplinar y científico que debe manejar el profesor y está conformado por tres subdominios: el conocimiento de los temas (KoT), el conocimiento de la estructura de las Matemáticas (KSM) y el conocimiento de la práctica matemática (KPM). *El conocimiento didáctico del contenido*, se refiere al conocimiento de cómo se enseñanza y de qué manera aprende el estudiante y tiene tres subdominios: el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y el conocimiento de los estándares de aprendizajes de matemáticas (KMLS); y por último *las creencias,* que son las diferentes concepciones que posee el profesor en relación con el conocimiento matemático y científico basado en su experiencia. Cabe resaltar que la presente comunicación se pretende establecer y analizar la relación entre el conocimiento didáctico del contenido, el conocimiento de los temas y la estructura de las matemáticas.

Conocimiento de los temas (KoT)

Este subdominio hace referencia al conocimiento matemático como disciplina. Flores et al. (2013) mencionan que el KoT contempla los contenidos que el profesor debe manejar, conocer y desarrollar al momento de enseñar, teniendo en cuenta deficiones, propiedades, reglas y procedimientos al momento de plantear algún tema en particular. Asimismo, incluye las diferentes aplicaciones que se le pueden dar al tema, hasta diferentes registros o formas de representación. Por ejemplo: saber localizar puntos, figuras geométricas u objetos en el plano cartesiano.

Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas

En este subdominio, el profesor de matemática debe saber y tener en cuenta las distintas relaciones y conexiones que tiene el tema a desarrollar (localización en el plano cartesiano), partiendo de temas tanto anteriores como posteriores, hasta llegar a un nivel avanzado, es decir, viendo al plano como un sistema de referencia o una herramienta analítica necesaria para la comprensión de otros temas matemáticos (funciones, lecturas de gráficos etc.) Un ejemplo, de estas conexiones sería el conocimiento del profesor en relación con: punto, distancia, sentido, posición, coordenada, ubicación de un punto en el mapa, como también el uso del plano cartesiano para interpretaciones geométricas, y la utilización de sistemas de referencia terrestres (latitud y longitud).

Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT)

Hace referencia al conocimiento que posee el profesor, al cómo enseñar, al cómo llevar ese aprendizaje al aula de clase. Este subdominio cuenta con las siguientes categorías teniendo en cuenta a Carrillo et al. (2018): *Teorías de la Enseñanza de las Matemáticas,* haciendo referencia en general al conocimiento teórico (tanto personal como institucional) específico de la enseñanza de las matemáticas que se puede aplicar al diseño de oportunidades de aprendizaje. *Recursos Didácticos (Físicos y Digitales)* se refiere al conocimiento de recursos y materiales didácticos, incluidos libros de texto, manipulables, recursos tecnológicos, pizarras interactivas. Además, este conocimiento abarca la evaluación crítica de cómo pueden mejorar la enseñanza de un tema en particular, y las limitaciones que conlleva. *Estrategias, Técnicas, tareas y Ejemplos,* aquí se evidencian las formas o estrategias al momento de representar contenidos específicos (ya sea a través de metáforas, situaciones o explicaciones).

Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)

En este subdominio, se evidencia el conocimiento del profesor con relación al cómo aprenden los estudiantes un tema en particular, la forma cómo el estudiante interactúa con el objeto matemático y las interpretaciones que el profesor le puede dar a estas. De igual manera, en este subdominio, se presentan categorías plasmadas por Carrillo et al. (2018). *Teorías del Aprendizaje Matemático:* Refleja la necesidad de que el docente sea consciente de cómo los estudiantes piensan y construyen conocimiento al abordar actividades y tareas matemáticas. *Fortalezas y Debilidades en el Aprendizaje de las Matemáticas*, esta categoría, el conocimiento del profesor de matemática incluye la conciencia de dónde los estudiantes tienen dificultades y fortalezas, tanto en general como con respecto a un contenido específico. *Maneras en que los Alumnos Interactúan con el Contenido Matemático*, aquí se evidencian las estrategias convencionales o no convencionales que utilizan para hacer matemáticas, así como la terminología utilizada para hablar de contenidos específicos. *Aspectos Emocionales del Aprendizaje de las Matemáticas*, incluye cosas cotidianas que despiertan la motivación, los intereses y expectativas del estudiante con relación a las matemáticas (ambos en general y en términos de áreas específicas).

Conocimiento de los Estándares de Aprendizajes de Matemáticas (KMLS)

Es el conocimiento que tiene el profesor en relación con los aprendizajes que los estudiantes deben alcanzar y desarrollar en un nivel educativo específico o determinado. Aquí debe conocer el currículo oficial con que trabaja su institución teniendo en cuenta su lugar de origen. Un ejemplo de aprendizaje esperado lo plantea la Secretaria de Educación Pública SEP (2017), de México: “Resuelve situaciones que impliquen la ubicación de puntos en el plano cartesiano" (p. 175), el cual se relacionada con el eje temático; Forma espacio y medida.

En este subdominio también se establecieron categorías teniendo en cuenta a Carrillo et al. (2018): *Resultados de aprendizaje esperados*, aquí se evidencia, el conocimiento del docente de todo lo que el estudiante debe o puede lograr en un nivel particular, en combinación con lo que el estudiante ha estudiado previamente y las especificaciones para los niveles posteriores. *Nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental*, incluye el conocimiento de los contenidos matemáticos que se van a enseñar en cualquier nivel en particular. *Secuencia de temas*, hace referencia a la exigencia de los alumnos en cuanto a los conocimientos y habilidades requeridos para una determinada tarea, lleva al docente a ubicar los temas tanto de forma retrospectiva, en cuanto a los conocimientos adquiridos previamente, como de forma prospectiva, de acuerdo con los conocimientos que deberán adquirir para abordarlos posteriormente.

MÉTODO

La presente investigación es de tipo cualitativa, con un estudio de caso instrumental según Stake (2007), el cual plantea el estudio de caso como un instrumento para conseguir algo, en donde se pueden dar ciertas conclusiones y generalizaciones. Es decir, el foco de interés se centra en la relación entre los subdominios del MTSK. El informante es una profesora de 6° de educación básica primaria de México (alumnos de 11 a 14 años) que cuenta con 25 años de experiencia y titulada como profesora de Matemáticas y magister en Educación Matemática.

Para la obtención de los datos se le pidió el diseño de una planeación de clase teniendo en cuenta la localización en el plano cartesiano. Cabe resaltar, que el formato de planeación que se utilizó fue propio y se tuvo en cuenta el contexto y partiendo de lo planteado por la SEP. En un segundo momento, se realizó una entrevista semiestructurada basada en evidencias, indicios u oportunidades del conocimiento especializado del profesor de matemática que no se reflejaron en el diseño de la planeación. Moriel-Junior y Carrillo-Yañez (2014) plantean que investigar haciendo preguntas específicamente diseñadas para cada enlace del subdominio del MTSK, permite ampliar la comprensión del fenómeno investigado y brinda confianza en el conocimiento identificado. Cabe mencionar que se utilizó la plataforma Meet, debido al confinamiento por la pandemia generada por Covid-19 y, además, fueron grabadas y transcritas mediante los signos VAL.ES.CO según Briz et al.(2002) los cuales lo muestran como un sistema de transcripción que en su mayoría proceden de los recursos ortográficos que la lengua posee (como son los signos de exclamación e interrogación, mayúsculas, paréntesis, corchetes, guiones, etc.), si bien también utilizamos elementos de carácter fonético (como las barras para indicar pausas, o las flechas para los tonemas) y vinculados a la tipografía (como el empleo de la cursiva para el estilo directo).

RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

Las técnicas e instrumentos descritos en el apartado anterior permitieron la recolección de información como resultados de la presente investigación. Cabe resaltar, que en este apartado se presentarán las descripciones de dichos resultados y posteriormente sus respectivos análisis. Los reportes de los resultados de esta investigación se basaron en los momentos de la clase teniendo en cuenta el diseño de planeación "Localización en el plano cartesiano", proporcionada por la profesora.

Primer Momento: Inicio y motivación de la clase

La profesora se enfoca en identificar las dificultades y fortalezas que tienen los estudiantes al momento de localizar punto u objeto en el plano cartesiano basando se en antecedentes de clases o tareas anteriores. Aquí se evidencia la relación entre algunas categorías del conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) con el conocimiento de los temas (KoT) como se muestra en la Tabla 2 y lo expresa la profesora en el siguiente apartado:

> **ME:** "Cuando// en la planeación/ se refiere a localizar puntos en el plano/ pero en las actividades anteriores/ no están viendo puntos en un plano/ sino puntos en una cuadricula/ entonces pasar de una cuadricula a un plano/ pues si es un gran/ salto/ porque ya estamos hablando de coordenadas numéricas/ a la mejor//en la cuadricula// podían diferenciar// por ejemplo una letra/ de un numero/ y talvez/ para ellos podrían ser/ la misma representación/ por ejemplo (a, 2) que como (2, a)/ pero el plano ya no // entonces si se necesita ver/ que tan reafirmado tienen la idea de localizar puntos ↑en una cuadricula/ para que esto le pueda ayudar/ a identificar el orden en el que se van a colocar/ los puntos de un cuadrante// y también el punto a partir del cual van a empezar a contar para ubicarse y si es un salto grande" M. Martínez, (comunicación personal, 29 de abril de 2021).

Tabla 1

Relación de las categorías de los subdominios KFLM, con el KoT

Subdominios	KFLM	KoT
Categorías	Fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas	Procedimientos
Indicador	Conoce las dificultades de pasar de una cuadrícula a localizar puntos en el plano cartesiano	Conoce cómo, y por qué realizar ciertos pasos para pasar localizar puntos tanto en una cuadricula como el plano cartesiano

Segundo Momento de la clase: Desarrollo y Estructuración

En este momento del diseño de la planeación de clase, la profesora tiene presente cómo se da la localización en el plano cartesiano en los diferentes niveles de la educación y sirve como antecedentes para los grados posteriores o avanzados. Asimismo, tiene presente los aprendizajes esperados por parte de los estudiantes, es decir tiene claro lo que debe y puede alcanzar el estudiante en cada nivel utilizando la localización de punto en la cuadrícula como un medio o salto para adentrase a utilizar coordenadas de puntos en el plano. Aquí se observan algunas categorías del conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas con el conocimiento de la estructura de las matemáticas como se muestra en la Tabla 2 y lo expresa en el siguiente apartado:

> **ME:** Yo estoy trabajando desde secundaria/ se supone que debemos saber/ tanto lo que el docente de primaria y de preescolar/ tiene que enseñar/ no nada más porque yo estoy en secundaria/ solo debo saber lo de secundaria/ necesito un antecedente de qué hay atrás para que yo pueda enseñarlo/ cómo corresponde/ entonces esa actividad utilizando la cuadricula o (batalla naval) a mi ahorita me/ me permitió/ adentrarme / por decir al enfoque/ a los propósitos /a los aprendizajes de primaria/ eso me ayuda. Aquí por ejemplo/ en secundaria/ cuando estoy viendo el tema localizar puntos yo ya tengo el antecedente de cómo se dio en primaria/ para que ahorita pueda abordarlo/ en secundaria y pueda darle una continuidad/ en cuanto a los alumnos/ el aprendizaje/ tienen que darle una continuidad/ pero/ siempre avanzando/ y entonces tengo que buscar la manera de que/ al avanzar haya sido/ no se si la palabra correcta sea ilustrativo/ de tal manera que lo comprendan" M. Martínez (comunicación personal, 29 de abril de 2021).

Tabla 2.

Revelación entre las categorías del Subdominio KMLS con el KSM

Subdominios	**KMLS**	**KSM**
Categorías	Resultados esperados	Conexiones Auxiliares
Indicador	Conoce los aprendizajes esperados en el nivel de primaria en la localización en el plano cartesiano	Conoce la conexión de la cuadricula como elemento auxiliar para la localización de puntos em el plano cartesiano.

Tercer Momento de la clase: Cierre

En este momento de la planeación de la clase, la profesora en su enseñanza toma en cuenta los aspectos emocionales e interés de los estudiantes con fin de situar al estudiante en un aprendizaje contextualizado. Asimismo, tiene presente terminologías como "cuadra, vuelta" que utiliza el estudiante para localizar lugares en su comunidad y esto lo ayuda a orientarse en un determinado lugar. Además, emplea actividades o conceptos anteriores que le ayudan como puente para el aprendizaje y apropiación de localizar puntos en el plano cartesiano. Aquí, se relacionan algunas categorías del conocimiento de las características de las matemáticas, con el conocimiento de temas y el conocimiento de la estructura de las matemáticas, como se muestra en el Tabla 3 y como lo expresa la profesora:

> **ME:** "Ok///por ejemplo/ el localizar lugares/ o tener un croquis o saber la trayectoria o la ubicación de por decir el/ de dónde camina o de donde/ toma el camión no se/ de la escuela a su casa// después empezar a localizar/ como en el libro dice puntos en una cuadrícula// y después tratar de llegar a localizar/ puntos en el plano/los temas desde localizar// desde donde estoy/ desde donde camino/ desde mi trayectoria/por ejemplo una cuadra que le tengo que dar vuelta/ que no puedo atravesar la casas// esa situación de ubicarse/ en el espacio es la que/ tiene que ir desarrollando y es la que yo tomo en cuenta/ cómo se fue/ ubicando/ en las diferentes actividades/ anteriores/ para poder desarrollar esta" M. Martínez (comunicación personal, 29 de abril de 2021).

Tabla 3.

Revelación entre las categorías del Subdominio KMLS con el KSM

Subdominios	**KSM**	**KMLS**	
Categorías	Conexiones Auxiliares	Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas	Maneras en que los estudiantes interactúan con el contenido matemático
Indicador	Conoce conexiones del tema en cuestión con contenidos matemáticos anteriores (trayectorias, cuadricula)	Conoce qué cosas cotidianas despiertan el interés y motivación al momento de localizar puntos en el plano cartesiano.	Conoce el lenguaje y vocabulario común de los estudiantes: "cuadra" y "vuelta" para localizar un lugar e determinado lugar

CONCLUSIÓN

En la presente investigación se caracterizó el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, estableciendo y analizado las relaciones entre algunos subdominios del modelo MTSK, en donde se evidenció estrategias de enseñanza que propician el aprendizaje de los estudiantes al momento de localizar puntos en el plano y por ende orientarse en una determinada comunidad. Asimismo, se evidenció el conocimiento que moviliza la profesora al momento de utilizar términos auxiliares para la apropiación del tema a desarrollar, además la identificación de las dificultades que presenta el estudiante de pasar de una cuadrícula a un plano es considerada como salto que puede generar conflicto en el mismo. En este sentido, la profesora moviliza conocimiento en los aspectos matemáticos y didácticos necesarios para el quehacer docente.

Referencias

Acuña, C. (2001). Concepciones en Graficación, el Orden entre las Coordenadas de los puntos del Plano Cartesiano. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(3), 203 - 217. Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/335/33540301.pdf

Aravena, A y Morales, A. (2018). El Plano Cartesiano en estudiantes de Quinto Básico: su Resignificación en una Situación Específica. *Bolema, 32*(62), 825-846. Recuperado de https://www.scielo.br/pdf/bolema/v32n62/1980-4415-bolema-32-62-0825.pdf

Bishop. A. (1999). *Enculturación Matemática, la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona, España: Paidós Ibérica.

Briz, A., Albelda, M., Hidalgo, A., Padilla, X., Pons, S., Ruiz, L., y Sanmartín, J. (2002). La Transcripción De La Lengua Hablada: El Sistema Del Grupo Val.Es. Co. *Revista de Español Vivo*, *77,* 57-86.

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., y Montes, M. A. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model*. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. doi: https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Flores, E., Escudero, D. I., y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282).SEIEM.

Hernández. F., Lizarde. E., y Zúñiga, J. (2015). El Conocimiento Especializado de los Profesores de Matemáticas en la Educación Primaria. Predictores Principales desde el MTSK en la Formación Docente Inicial. *XIII Congreso Nacional de Investigación Educativa*, Chihuahua, Chihuahua. http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v13/doc/1527.pdf

Stake, R. A. (2007*). Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Ediciones Morata.

Valdespino, E. (2017). *El conocimiento especializado de maestros mexicanos de primaria sobre el plano cartesiano* (tesis de maestría). Universidad Internacional de Andalucía. http://hdl.handle.net/10334/3887.

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E., y Carrillo J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las ciencias, 36*(2), 105-123.

DESVELANDO INDÍCIOS DE CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DOS FUTUROS PROFESSORES DO RIO GRANDE DO NORTE/BRASIL PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA COM O MODELO MTSK

Unveiling Evidence of Specialized Knowledge from Future Teachers of Rio Grande Do Norte/Brazil for Teaching Algebra with the MTSK Model

Lautenschlager, E. [a]; Balvin, F. A. P. [b]

[a] Universidade Federal do Rio Grande do Norte; [b] Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Temática: 1 – MTSK na formação docente

Resumo. Este estudo identifica e analisa indícios de domínios do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática – para o ensino de álgebra – de um grupo de licenciandos em Matemática de uma universidade pública do Rio Grande do Norte. O fundamento teórico é o Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), que caracteriza o conhecimento profissional específico e especializado, o qual possui (ou deve possuir) um professor para ensinar Matemática. A estruturação metodológica apoia-se em uma abordagem qualitativa, com enfoque analítico-interpretativo. Tomamos como dados os protocolos de uma tarefa proposta aos licenciandos, no decorrer de uma oportunidade de aprendizagem profissional para futuros professores. Os resultados evidenciam a, ainda pequena, familiaridade dos participantes com as diferentes concepções de álgebra.

Palavras-chave. Formação de professores, Educação matemática, Álgebra, MTSK.

Abstract. This study identifies and analyzes evidence from domains of Specialized Knowledge of Mathematics Teachers – for teaching algebra – from a group of Mathematics undergraduates from a public university in Rio Grande do Norte. The theoretical foundation is the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), which characterizes the specific and specialized professional knowledge, which a teacher has (or should have) to teach Mathematics. The methodological structure is based on a qualitative approach, with an analytical-interpretive focus. We have taken as data the protocols concerning a task proposed to undergraduates during a professional learning opportunity for future teachers. The results show that there is still little familiarity with the different conceptions of algebra.

Keywords. Teacher Training, Mathematics Education, Algebra, MTSK.

INTRODUÇÃO

As estatísticas têm mostrado a necessidade de melhora na qualidade e eficiência do sistema educacional brasileiro ao ensinar matemática. Países com menos recursos, menor renda per capita e nos quais os professores têm piores salários, estão tendo desempenho melhor na aprendizagem, comparativamente ao Brasil. Ao analisarmos os resultados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa), 2018, observa-se que 68,1% dos estudantes brasileiros, com 15 anos de idade, não possuem nível básico de matemática. Comparado com os países da América do Sul analisados pelo Pisa, o Brasil é o pior em matemática.

Para o ensino e aprendizagem da Álgebra, muitas pesquisas relatam o insucesso dos estudantes (Bush & Karp, 2013; Cyrino & Oliveira, 2011; Kaput, 2008; Matos & Ponte,

Lautenschlager, E., & Balvin, F. A. P. (2021). Desvelando indícios de conhecimento especializado dos futuros professores do Rio Grande do Norte/Brasil para o ensino da álgebra com o modelo MTSK. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 129–136). Congresseme.

2009; Stephens & Ribeiro, 2012) e as dificuldades enfrentadas pelos professores ao ensiná-la (Barbosa & Ribeiro, 2013; Doerr, 2004; McCrory et al., 2012; Pazuch & Ribeiro, 2017; Lautenschlager & Ribeiro, 2014).

Assim, este estudo busca identificar e analisar indícios de domínios do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática – para o ensino de álgebra – de um grupo de licenciandos em Matemática de uma universidade pública do Rio Grande do Norte.

Por muito tempo, o ensino de Álgebra tem se restringido a questões técnicas e operacionais, deixando de lado, muitas vezes, o desenvolvimento de conceitos e do pensamento algébrico (Ponte, Branco, & Matos, 2009; Coelho & Aguiar 2018), que está associado, especificamente, à manipulação de regras e ao desenvolvimento de determinadas linguagens.

Por vezes, observamos que isso ocorre em razão da postura que o professor assume, transformando suas aulas em um processo árduo de aprendizagem (e, consequentemente, de ensino), desprovido de significado, tanto para o aluno quanto para o próprio professor. Sendo assim, todo esse processo, na Matemática, fica reduzido à mera reprodução dos passos ou técnicas ensinados.

Canavarro (2007) complementa que existe um consenso entre pesquisadores sobre a crescente dificuldade encarada pelos alunos na aprendizagem da álgebra, abordada em diversos estudos, como decorrente de conteúdos com ênfase “na utilização de simbologia desprovida de significados, com ênfase na aplicação de regras e técnicas visando à manipulação simbólica e com elevado grau de abstração”. A autora acrescenta ainda que o desinteresse dos alunos pela álgebra também é proveniente da forma como essa é ensinada, sendo totalmente isolada dos demais conteúdos matemáticos e da realidade na qual os alunos estão inseridos.

Pesquisas como as de Attorps (2003), Ball (1990), Barbosa (2009) e Lautenschlager & Ribeiro (2014), entre outras, indicam que vários professores da disciplina não possuem a compreensão conceitual de muitos conteúdos de Matemática elementar e, por isso, acabam por privilegiar, em suas aulas, o desenvolvimento de habilidades algorítmicas, e a memorização de regras, deixando para um segundo plano a atenção ao desenvolvimento do conhecimento conceitual.

Existem aspectos que tornam o trabalho dos professores muito mais desafiador, e diferente do de outros profissionais. Para alcançar um perfil docente que rompa com o modelo que valoriza apenas o desenvolvimento do conhecimento matemático, é necessário que a formação inicial desse profissional esteja pautada na articulação entre teoria e prática, entre o saber específico vinculado ao saber pedagógico (Cyrino, 2006; D’ambrosio, 1996; Ponte, 1992).

Em nosso entendimento, consideramos que a melhoria no ensino de Matemática passa necessariamente, embora não exclusivamente, pela melhoria na preparação docente e pela superação dos problemas da formação inicial de professores, exigindo uma análise dos paradigmas que orientam tais cursos (Moriel Junior & Wielewski, 2016).

Assim, também consideram os estudos de Shulman (1986), Ball, Thames & Phelps (2008), Climent et al. (2013), entre outros, que ratificam que o conhecimento dos professores deve ser diferente em profundidade e amplitude, em relação ao conhecimento de outros profissionais que lidam com a Matemática. Precisa estar ancorado numa matemática específica para o ensino.

Assumindo que o professor – e seu conhecimento – é um fator que tem grande impacto nos resultados e na aprendizagem dos alunos (Nye et al., 2004), torna-se essencial apresentarmos aqui algumas considerações com relação ao conhecimento do professor que ensina (ou ensinará) matemática.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (Brasil, 1998) e na BNCC (Brasil, 2017), destaca-se que a construção do pensamento algébrico deve ser desenvolvida a partir de hipóteses que relacionam as diferentes concepções de álgebra. Nesse sentido, faz-se necessário compreender tais concepções para seu ensino. Dentre os diferentes pesquisadores sobre o tema (Usiskin, 1995; Cury et al., 2002), algumas destas concepções são reveladas no currículo prescrito brasileiro, como por exemplo, citamos as de Usiskin (2005), que, levando em consideração os diferentes usos das variáveis, destaca quatro concepções sobre álgebra que, conforme a importância atribuída às variáveis, se dividem em: aritmética generalizada; estudo para resolver certo tipo de problemas; estudo de relação entre grandezas; e estudo das estruturas. Na primeira, as variáveis são compreendidas como generalizadoras de padrões e modelos aritméticos. Na segunda, ela prevê as variáveis como incógnitas, e as habilidades algébricas envolvem simplificar e resolver. Na terceira, as letras são tratadas como variáveis dependentes e independentes, e realmente variam. E na última, as variáveis são concebidas como objetos arbitrários. Nessa visão, a generalização e abstração dão lugar ao formalismo, que admite cálculos sintáticos das estruturas matemáticas em si mesmas.

Dentre os diferentes modelos resultantes de investigações sobre o conhecimento de professores de Matemática – como o de Shulman (1986) e o de Ball, Thames & Phelps (2008) –, tem sido desenvolvido, nos últimos anos, o Mathematics Teacher's Specialized Knowledge – MTSK (Climent et al., 2013). Nesse modelo o conhecimento para ensinar é considerado especializado, tanto em aspectos do conteúdo quanto em aspectos didático-pedagógicos (Climent et al., 2013).

O Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK) foi o modelo escolhido para analisarmos os dados obtidos em nosso estudo, bem como para investigarmos analiticamente o conhecimento de (futuros) professores que ensinarão Matemática, o qual descreveremos a seguir (Climent et al., Carrillo et al., 2013;; Montes, Contreras, & Carrillo, 2013).

Esse modelo possui dois grandes domínios – Conhecimento Matemático (MK) e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) – e cada um deles é subdividido em três subdomínios. Iniciamos falando sobre os subdomínios do *Conhecimento Matemático*. O *Conhecimento dos Tópicos* (KoT) são os conteúdos matemáticos a serem ensinados e seus diferentes aspectos, ou seja, descreve o quê e como o professor conhece os temas que vai ensinar. No *Conhecimento da Estrutura Matemática* (KSM) estão as conexões que o professor faz entre os tópicos matemáticos, ou seja, entre conteúdos de diferentes áreas matemáticas. O *Conhecimento da Prática Matemática* (KPM) inclui a maneira do proceder matemático, ou seja, trata-se de como surge o conhecimento matemático.

Passamos para a descrição dos subdomínios do *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo*. O *Conhecimento do Ensino da Matemática* (KMT) diz respeito ao conhecimento dos materiais e recursos disponíveis, ao modo que o professor apresenta os conteúdos e suas características, podendo ter como ponto de partida as suas próprias teorias pessoais. O *Conhecimento das Características de Aprendizagem* (KFLM) inclui a forma como os alunos aprendem os conteúdos matemáticos, engloba os conhecimentos sobre erros, obstáculos e dificuldades de aprendizagens. O *Conhecimento das Normas da*

Aprendizagem (KMLS) diz respeito ao conhecimento que o professor possui sobre aquilo que os alunos podem, e devem, alcançar em determinado nível escolar; levando em consideração as especificações curriculares dos organismos externos. Cabe destacar que, para ensinar Matemática, o licenciado em Pedagogia não pode se apoiar exclusivamente nos conhecimentos metodológicos do ensino da matéria.

Antes de prosseguirmos com este trabalho, entendemos ser necessário explicitar nosso entendimento a respeito do que seja *indício*, segundo pesquisas e teóricos por nós revisados. Moriel Junior & Carrillo (2014) definem indícios de conhecimento como "os elementos verbais, escritos ou atitudinais de manifestação do sujeito que sugerem ao pesquisador a possibilidade de determinado conhecimento ter sido mobilizado, mas sem fornecer informação suficiente e explícita que garanta sua ocorrência".

Diante disso, passaremos a apresentar alguns resultados obtidos em tarefas realizadas por licenciandos em Matemática durante os encontros de uma oficina formativa.

CONTEXTO E METODOLOGIA

Nossa investigação foi desenvolvida sob perspectiva qualitativa, com enfoque teórico interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994; Lüdke & André, 1986) sobre a mobilização do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática, com as seguintes fases: (i) elaboração e execução de uma oportunidade de aprendizagem profissional (OAP) para os futuros professores; (ii) aplicação de uma tarefa para obtenção dos dados; e (iii) análise de evidências e identificação de indícios de conhecimento.

O contexto desta pesquisa é uma OAP (Ribeiro & Ponte, 2020), realizada pelos autores, para futuros professores de Matemática participantes do "Projeto Formação profissional do professor de Matemática: o conhecimento especializado para o ensino da álgebra na escola básica", que teve como carga horária 20 horas, distribuídas em quatro dias, contando com a participação de um total de 26 estudantes de licenciatura em Matemática de uma universidade pública do estado do Rio Grande do Norte.

Todos os estudantes participavam do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (Pibid)[1] e já tinham cursado pelo menos 50% da licenciatura. Os dados que aqui serão discutidos foram coletados no primeiro encontro da OAP, em que solicitamos a produção de uma carta pessoal (ou um e-mail), a ser destinada a qualquer licenciando que estivesse no primeiro período da licenciatura. Nessa carta, o remetente deveria explicar ao destinatário o que ele entende por álgebra e qual seria a melhor estratégia para seu ensino.

Tabela 1. Apresentação das questões que deveriam ser respondidas no texto da carta e dos subdomínios do modelo MTSK.

Perguntas	Subdomínios do MTSK
O que é a álgebra?	Conhecimento dos Tópicos (KoT)
Qual poderia ser a melhor maneira para ensinar álgebra na escola?	Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT)

Expressas as opções metodológicas, passaremos para a análise dos dados.

[1] O Programa oferece bolsas de iniciação à docência aos alunos de cursos presenciais que se dediquem ao estágio nas escolas públicas e que, quando graduados, se comprometam com o exercício do magistério na rede pública.

ANÁLISE E DISCUSSÃO

Nesta seção, tomamos como dados os protocolos de resolução da tarefa proposta dos licenciandos do Curso de Matemática. Destacamos que nossas análises não têm por propósito julgar se as respostas obtidas estão certas ou erradas, mas sim buscar compreender se, e como, os indícios podem se converter em conhecimentos.

Tabela 2. Respostas dos licenciandos

Protocolo	Carta
1	A. Na minha **concepção a** *álgebra* é o ramo da matemática, que introduz o conceito de variáveis, no qual o *objetivo é a resolução de fórmulas onde há uma variável*. Entretanto, como tem uma *certa rigidez* na parte dos alunos da educação média, no que diz respeito a abstração do que a função ou outra fórmula representa, onde, desde menores possa ser colocados essa temática, mesmo que seja algo introdutivo sobre o assunto, acredito que, *lá na frente* possa ter um impacto mais significativo no ensino e aprendizagem, onde possa haver essa flexibilidade de aprender a álgebra de forma mais abstrata fundamentada em bases sólidas. Acredito, que: no ensino trazer a realidade dos alunos para a sala de aula seria mais marcante, uma vez que os discentes a acham uma coisa chata, porém sabe-se que se esse ramo, for trazido com uma mais dinâmica e atrativa, possa ser trabalhada de forma atrativa para os alunos.
2	B. Álgebra é uma parte da matemática onde se estuda as *diferentes formas de manipulações* que a matemática permite em um problema matemático. para apresentar a álgebra aos alunos, seria interessante mostrar desafios mais simples, com imagens, animações, algo que envolva os alunos, tomando a atenção deles. Seria interessante colocar desafios cada vez mais difíceis dentro do possível sobre a álgebra, agora em diferentes formatos, como em imagens e em linguagem matemática, fazendo com que os alunos fiquem cada vez mais avançados no próprio assunto, lembrando que os desafios devem ser dados de forma gradual ao avanço da turma, até que todos tenham dominado por completo o assunto.
3	C. A álgebra é um ramo da matemática que estuda *expressões matemáticas* que utilizam letras e números para calcular determinados valores, por exemplo, equações polinomiais. Os aspectos mais relevantes para a educação básica são a aprendizagem da *manipulação de termos algébricos* dentro de equações. Para ensinar álgebra precisamos levar em consideração as dificuldades particulares de cada aluno. Depois, precisamos ensinar de acordo com nível da turma, utilizando ferramentas que auxiliem nesse processo, ferramentas digitais que tenham conexão com o conteúdo, por exemplo.

As respostas obtidas pela maior parte dos licenciandos revela que, mesmo com várias reformas educacionais, novas diretrizes e orientações propostas para o sistema educacional brasileiro, o ensino de Álgebra permanece com poucas alterações na Educação Básica, uma vez que a visão revelada pelos licenciandos sobre o assunto em questão ainda está relacionada ao o ensino de regras e técnicas operatórias. Nesse sentido, os protocolos mostram que os futuros professores conhecem apenas uma, dentre as diversas concepções de álgebra. Tal fato nos leva a acreditar que esses professores a concebem a partir das suas próprias experiências enquanto alunos, e do conhecimento que construíram em razão das influências – que vêm se formando ao longo dos séculos, passando de geração a geração – por eles recebidas (Cury, 1999).

Os dados obtidos também nos fazem refletir sobre o quanto é difícil modificar/ampliar os conhecimentos adquiridos durante a Educação Básica.

Nesse sentido, é importante lembrar que as crenças dos professores sobre a Matemática, seu ensino e aprendizagem são incorporados, e permeiam os subdomínios do MTSK. Assim sendo, o conteúdo das cartas também revela as crenças dos licenciandos com relação à álgebra e ao seu ensino.

Fundamentando-nos nas análises apresentadas, indicamos algumas fragilidades nos conhecimentos dos licenciandos investigados, uma vez que os mesmos parecem desconhecer as diferentes concepções de álgebra, parece-nos haver ausência de mobilização do Conhecimento dos Tópicos (KoT), ao mesmo tempo que ratificam as conclusões das pesquisas realizadas por Attorps (2003), Barbosa (2009) e Lautenschlager & Ribeiro (2014).

Quando os licenciandos indicam que os "desafios . . . devem ser dados de forma gradual", que se deve "trazer a realidade dos alunos para a sala de aula" e que se devem utilizar imagens e animações, estão revelando indícios do Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT). Olhando com mais cuidado, percebemos que o conteúdo das cartas apresenta vestígios fortes de incompreensão dos futuros professores em relação a esse conteúdo, seja das próprias técnicas ou das metodologias de ensino.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ainda que se investigue e que se aponte, desde longa data, a necessidade de se trabalhar com as diferentes concepções de álgebra, percebemos que os problemas em relação à álgebra na formação inicial são comuns e permanecem. Os licenciandos investigados apresentaram alguns indícios de que a concepção de álgebra que prevalece é a processológica, isto é, um conjunto de procedimentos (técnicas, artifícios, processos e métodos) específicos para abordar certos tipos de problemas. Esses procedimentos específicos consistem em técnicas algorítmicas que se aplicam a problemas ou conjunto de problemas, cuja resolução se baseia no segmento de uma sequência padronizada de passos (Fiorentini et al., 1993). Mesmo que o grupo de estudantes deste estudo esteja restrito a uma única turma de licenciandos em Matemática, acreditamos que os resultados aqui apresentados sejam sinais de prováveis dificuldades encontradas no que diz respeito ao processo de ensino e aprendizagem de conceitos algébricos apontados na literatura.

Assim sendo, julgamos relevante reforçar a importância e a urgência da formação inicial com foco não somente nos conhecimentos matemáticos, mas também nos conhecimentos pedagógicos de maneira articulada.

Com isso, entendemos que seja emergencial e relevante promover processos de formação inicial de professores de Matemática no intuito de propiciar a construção e o aprofundamento do conhecimento especializado para o ensino da Matemática, no sentido apontado e defendido, por exemplo, por Carrillo (2013) e seus colaboradores.

Referências

Aguilar, Á., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., Escudero, D., ... & Rojas, N. (2013). *El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK.*

Attorps, I. (2003). *Teachers' images of the 'equation'concept.* *European Research in Mathematics Education*, 3, 1-8.

Ball, D.L. (1990). Os entendimentos matemáticos que os futuros professores trazem para a formação de professores. *The elementary school journal* , 90 (4), 449-466.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). *Content knowledge for teaching: What makes it special. Journal of teacher education*, 59(5), 389-407.

Barbosa, V. R. (2009). *A Matemática nos cursos de formação de professores para os anos iniciais do ensino fundamental*. (Monografia de Graduação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Barbosa, Y. O., & Ribeiro, A. J. (2013). *Multisignificados de Equação: Uma Investigação Acerca das Concepções de Professores de Matemática*. Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 15(2)

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto editora.

Bush, S. B., & Karp, K. S. (2013). *Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: A review*. The Journal of Mathematical Behavior, 32(3), 613-632.

Canavarro, A. P. (2007). *O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos*. Quadrante, 16(2), 81-118.

Carrillo, J., & Contreras, L. C. (2017). *Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigação de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva*. Huelva: CGSE.

Climent, N., Romero-Cortés, J. M., Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M., & Contreras, L. C. (2013). *¿ Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula?.* Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 16(1), 13-36.

Coelho, F. U., & Aguiar, M. (2018). *A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino*. Estudos Avançados, *32*, 171-187.

Creswell, J. W. (2014). *Investigação Qualitativa e Projeto de Pesquisa-: Escolhendo entre Cinco Abordagens.* Penso Editora.

Cury, H. N. (1999). *Concepções e crenças dos professores de matemática: pesquisas realizadas e significados dos termos utilizados*. Bolema, Rio Claro, 12(13), p. 29- 44.

Cury, H. N., Lannes, W., Brolezzi, A. C., & Vianna, C. R. (2002) Álgebra e Educação Algébrica: concepções de alunos e professores de Matemática. In *Educação Matemática em Revista*. RS, 4(4), p. 9-15

Cyrino, M. (2006). Preparação e emancipação profissional na formação inicial do professor de Matemática. In: A. M. Nacarato, & M. A. V. Paiva, *A formação do professor que ensina Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica. p. 77-88.

Cyrino, M., & Oliveira, H. (2011). *Pensamento algébrico ao longo do ensino básico em Portugal.* Bolema, 24(38), 97-126.

D'ambrosio, U. (1996). *Educação Matemática: da teoria à prática*. Campinas, SP: Papirus.

Doerr, H. M. (2004). Teachers' knowledge and teaching of algebra. In: K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Ed.). *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 267-289). New York: Kluwer Academic Publishers.

Fiorentini, D., Miorim, M., & Miguel, A. (1993). *A contribuição para repensar... a educação algébrica elementar.* Pro-posições, 4(1), 78-91.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Ed.). *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Routledge.

Lautenschlager, E., & Ribeiro, A. J. (2014). *Reflexões acerca do impacto do conhecimento matemático dos professores no ensino: a álgebra da Educação Básica*. Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, 7(3).

Lüdke, M.; André, M. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo, EPU

Martín, J. P., & Carrillo, J. (2017). Las oportunidades de aprendizaje e o dominio de conocimiento matemático del MTSK en educação infantil. In J. Carrillo & L. C. Contreras (Ed.). *Avances, utilidades e retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigação de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 97-101). Huelva: CGSE.

Matos, A. S., & Ponte, J. P. (2009). *Exploring functional relationships to foster algebraic thinking in grade* 8. Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica), (19).

McCrory, R., Floden, R. E., Ferrini-Mundi, J., Reckase, M. D., & Senk, S. L. (2012*). Knowledge of algebra for teaching: A framework of knowledge and practices*. Journal for Research in Mathematics Education, 43(5), 584-615.

Montes, M. A., Contreras, L. C., & Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. In A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (17. ed., pp. 403-410). Bilbao, Espanha: SEIEM.

Moriel Junior, J. G., & Carrillo, J. (2014a). Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar Matemática com o modelo MTSK. In *Seminário de Investigación en Educación Matemática XVIII* (p. 1-10). Salamanca, Espanha.

Moriel Junior, J. G., & Carrillo, J. (2014b). Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar Matemática com o modelo MTSK. In M. T. González, M. Codes, D. Arnau & T. Ortega (Ed.). *Investigación en Educación Matemática* XVIII (pp. 465-474). Salamanca: SEIEM.

Moriel Junior, J. G., & Wielewski, G. (2016). *Pressupostos predominantes na organização de licenciaturas em Matemática no Brasil*. Revista REAMEC, 78-87. doi: 10.26571/2318-6674.a2016.v4.n1.p76-87.i5318

Nye, B., Hedges, L. V., & Konstantopoulos, S. (2004). *The effects of small classes on achievement: The results of the Tennessee class size experiment*. American Educational Research Journal, 200037123151.

Pazuch, V., & Ribeiro, A. J. (2017). *Conhecimento profissional de professores de Matemática e o conceito de função: uma revisão de literatura.* Educação Matemática Pesquisa, 19, 465-496.

Ponte, J. P. (1992) Concepções dos professores de matemática e processos de formação. In: BROWN et al., *M. Educação matemática: temas de investigação*. Lisboa: IIE e SEMSPCE, 1992.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico.* Lisboa: DGIDC.

Ribeiro, A. J., & Ponte, J. P. da. (2020). *Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar Matemática*. Zetetike, 28, e020027. Recuperado de https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8659072

Shulman, L. S. (1986). *Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational researcher*, 15(2), 4-14. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/1175860

Stephens, M., & Ribeiro, A. J. (2012). *Working towards algebra: The importance of relational thinking*. RELIME, (15), 307-401.

Usiskin, Z. (1995) Concepções sobre a álgebra da escola média e utilização das variáveis. In A. Coxford; & A., Shulte (Orgs.) *As idéias da álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual.

DESVELANDO INDÍCIOS DE CONHECIMENTO ESPECIALIZADO PARA ENSINAR ÁLGEBRA COM O MODELO MTSK DOS FUTUROS PEDAGOGOS DA REGIÃO DO SERIDÓ

Unveiling evidence of specialized knowledge to teach algebra with the MTSK Model of the future pedagogos of the Seridó Region

Barboza, L. C. S. [a]; Lautenschlager, E. [b]

[a] UFABC; [b] UFRN

Temática: 1 – MTSK na formação docente

Resumo. Este texto identifica e analisa subdomínios do conhecimento especializado do professor que ensina Matemática, para o ensino de Álgebra, de um grupo de licenciandos em Pedagogia, de uma universidade pública do Rio Grande do Norte. A estruturação metodológica se apoia em uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo. Tomamos como dados os protocolos de respostas obtidas em um questionário. Nossas conclusões reforçam a ideia de que é necessário desenvolver tarefas em que os licenciandos sejam mobilizados a avançar no desenvolvimento dos níveis de pensamento algébrico, com foco não somente nos conhecimentos pedagógicos, mas também no conhecimento matemático.

Palavras-chave. Formação de professores, Educação Matemática, Álgebra, MTSK.

Abstract. This text identifies and analyzes evidence of the subdomains of the specialized knowledge of the professor who teach mathematics, for the teaching of algebra, of a group of undergraduates in Pedagogy, from a public university in Rio Grande do Norte. The methodological structure is based on a qualitative approach of interpretive nature. We take as data the resolution protocols of a Professional Learning Task (TAP). Our conclusions reinforce the idea that it is necessary to develop tasks in which undergraduates are led to advance in the development of algebraic thinking levels, with a focus not only on pedagogical knowledge, but also on mathematical knowledge and, thus, TAP presents itself as a privileged tool for building this knowledge.

Keywords. Teacher Training, Mathematics Education, Algebra, MTSK.

INTRODUÇÃO

Muitos estudos documentam o insucesso dos alunos em Álgebra (Cyrino & Oliveira, 2011; Kaput, 2008; Matos & Ponte, 2009; Stephens & Ribeiro, 2012) e as dificuldades enfrentadas pelos professores ao ensiná-la (Doerr, 2004; McCrory et al., 2012; Pazuch & Ribeiro, 2017; Lautenschlager & Ribeiro, 2014).

Por muito tempo, a Álgebra foi vista como um campo da Matemática destinado ao estudo das operações entre os números e a resolução de equações (Ponte, Branco & Matos, 2009), e esteve associada especificamente à manipulação de regras e ao desenvolvimento de determinadas linguagens. Essa forma mecanizada do ensino da Álgebra, junto à hierarquização do currículo fez com que a possibilidade de seu trabalho nos anos iniciais fosse inviável.

No Brasil, por muito tempo, o ensino da Álgebra estava previsto a partir do 7º ano do Ensino Fundamental, com ênfase em memorização de regras, procedimentos e manipulação de símbolos (Lautenschlager & Ribeiro, 2014).

Barboza, L. C. S., & Lautenschlager, E. (2021). Desvelando indícios de conhecimento especializado para ensinar álgebra com o modelo MTSK dos futuros pedagogos da Região do Seridó. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 137–144). Congresseme.

Estudos como o de Canavarro (2007) afirmam que repensar o ensino da Álgebra consiste em um grande desafio. Esse desafio parece aumentar a partir do momento em que a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Ministério da Educação, 2017), propõe o ensino da Álgebra a partir do primeiro ano do Ensino Fundamental.

É nesse contexto que esta pesquisa está inserida. A Álgebra é um dos cinco eixos temáticos da Matemática para os anos iniciais, na BNCC. O desenvolvimento do pensamento algébrico é um dos temas incluídos, e construir esse tipo de pensamento com os alunos requer do professor um conhecimento especializado (Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013).

Na contemporaneidade, muito se tem pesquisado, internacionalmente, sobre o trabalho com o pensamento algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental. O Programa Nacional de Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) já havia iniciado essa discussão e colocado algumas ideias sobre o reconhecimento de padrões e regularidades nos anos iniciais, visando ao ensino de Álgebra. A partir da aprovação da BNCC, no final de 2017, o ensino e a aprendizagem da Álgebra ganham destaque no contexto escolar brasileiro.

Sobre o trabalho com Álgebra nos Anos Iniciais, Blanton e Kaput (2008) defendem que deve ser considerado como uma forma de pensar. E que para a promoção deste podem ser utilizadas atividades sem o uso de simbologia que remeta à Álgebra, tais como “um hábito da mente que permeia toda a matemática e que envolve a capacidade dos alunos de construir, justificar, e expressar conjecturas sobre as relações e estruturas matemáticas” (Blanton & Kaput, 2008, p. 142).

Em consonância com a Base Nacional Comum Curricular, o Documento Curricular do Estado do Rio Grande do Norte (Ensino Fundamental) também afirma que o ensino da Álgebra deverá favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico (Cunha, Carvalho, Sousa & Figueiredo, 2018).

Pesquisas em Educação Matemática apontam que o pensamento algébrico é uma forma de pensar a Matemática que deve ser desenvolvida desde os primeiros anos de escolaridade, por meio do estudo de padrões e regularidades (Blanton & Kaput, 2005; Canavarro, 2007).

Em dezembro de 2017, foi homologada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) apresentando em seus documentos que a unidade temática Álgebra deve ser desenvolvida desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Com isso, novos desafios se apresentam aos professores que ensinam Matemática nessa etapa de ensino.

Pesquisadores como Ponte, Branco e Matos (2009, p. 9) defendem que o grande objetivo do estudo da Álgebra, tanto no Ensino Fundamental quanto no Médio, é “desenvolver o pensamento algébrico dos alunos”. Assim, o desenvolvimento do pensamento algébrico, como evidencia o estudo de Barboza, Pazuch e Ribeiro (2021, p. 2), aponta “as potencialidades para os estudantes, ao se desenvolver o PA desde cedo, para posteriormente engajarem-se nos estudos de álgebra dos anos subsequentes do ensino fundamental”. Como não existe um consenso na literatura a respeito do que significa o pensamento algébrico, vamos apresentar mais algumas concepções.

O pensamento algébrico, também, pode ser compreendido como um processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de exemplos particulares, estabelecendo generalizações, através da argumentação, e expressando-as gradualmente de forma simbólica apropriada a sua idade (Blanton & Kaput, 2005).

Ponte (2006) defende que o pensamento algébrico

> Inclui a capacidade de lidar com o cálculo algébrico e as funções... inclui igualmente a capacidade de lidar com muitas outras estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios (p. 7).

Já para Lins (1992, p. 11), “o pensamento algébrico é um meio de organizar o mundo ao modelar situações e manipular aqueles modelos de certa forma”. Para este autor, o pensamento algébrico é compreendido como um meio de produção de significados.

Considerando que o papel do professor é fundamental, pois é dele que partem as tarefas que propiciam que o aluno faça relações, ou seja, produza significado para o estudo, passaremos agora a apresentar o modelo teórico que adotamos sobre o tema.

MTSK

Em nosso entendimento, consideramos que a melhoria no ensino de Matemática passa necessariamente, embora não exclusivamente, pela melhoria na preparação docente e pela superação dos problemas da formação inicial de professores, exigindo uma análise dos paradigmas que orientam tais cursos.

Assumindo que o professor – e seu conhecimento – é um fator que tem grande impacto nos resultados e na aprendizagem dos alunos (Nye, Hedges & Konstantopoulos, 2000), torna-se essencial apresentarmos aqui algumas considerações com relação ao conhecimento do professor que ensina (ou ensinará) Matemática.

Dentre os diferentes modelos resultantes de investigações sobre o conhecimento de professores de Matemática – como o de Shulman (1986) e de Ball, Thames & Phelps (2008) – tem sido desenvolvido, nos últimos anos, o Mathematics Teacher’s Specialized Knowledge – MTSK (Carrillo et al., 2013). Nesse modelo, o conhecimento para ensinar é considerado especializado, e essa especialização contempla tanto aspectos do conteúdo quanto aspectos didático-pedagógicos do conteúdo (Carrillo et al., 2013).

O MTSK é um modelo teórico cujo objetivo é investigar os conhecimentos do professor de Matemática. É também uma ferramenta metodológica que permite analisar as práticas dos professores a partir de suas categorias de análise (Flores, Escudero & Aguilar, 2013).

Este modelo possui dois grandes domínios – *Conhecimento Matemático* (MK) e *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo* (PCK) – e cada um deles é subdividido em três subdomínios.

Iniciamos falando sobre os subdomínios do *Conhecimento Matemático*: *Conhecimento dos Tópicos* (KoT), *Conhecimento da Estrutura Matemática* (KSM) e *Conhecimento da Prática Matemática* (KPM).

O *Conhecimento dos Tópicos* (KoT) são os conteúdos matemáticos a serem ensinados e seus diferentes aspectos, ou seja, o KoT é usado para descrever o que e como o professor conhece os temas que vai ensinar. No *Conhecimento da Estrutura Matemática* (KSM) estão as conexões que o professor faz entre os tópicos matemáticos, ou seja, as conexões entre os conteúdos de diferentes áreas matemáticas. O *Conhecimento da Prática Matemática* (KPM) inclui a maneira do proceder matemático, ou seja, trata-se de como surge o conhecimento matemático.

Passamos à descrição dos subdomínios do *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo*: *Conhecimento do Ensino da Matemática* (KMT), *Conhecimento das Características de Aprendizagem* (KFLM) e *Conhecimento das Normas da Aprendizagem de Matemática* (KMLS).

O *Conhecimento do Ensino da Matemática* (KMT) diz respeito ao conhecimento dos materiais e recursos disponíveis, ao modo de apresentar os conteúdos e suas características, podendo ter como ponto de partida as suas próprias teorias pessoais. O *Conhecimento das Características de Aprendizagem* (KFLM) inclui a forma como os alunos aprendem os conteúdos matemáticos, engloba os conhecimentos sobre os erros, os obstáculos e dificuldades de aprendizagens. O *Conhecimento das Normas da Aprendizagem de Matemática* (KMLS) diz respeito ao conhecimento que o professor possui sobre aquilo que os alunos podem e devem alcançar em determinado nível escolar, levando em consideração as especificações curriculares dos organismos externos. Cabe destacar que, para ensinar Matemática, o licenciado em Pedagogia não pode se apoiar exclusivamente nos conhecimentos metodológicos do ensino da Matemática.

CONTEXTO E METODOLOGIA

Nossa investigação foi desenvolvida sob uma perspectiva qualitativa, com um enfoque teórico interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994) sobre a mobilização do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática, com as seguintes fases:

- Elaboração e execução de um curso de extensão, nas dependências de uma universidade pública do Rio Grande do Norte;
- Aplicação de um questionário para obtenção dos dados;
- Análise de evidências e identificação dos subdomínios do conhecimento.

O contexto desta pesquisa é um curso de extensão realizado pelas autoras no ano de 2020, que teve como carga horária 60 horas distribuídas em 15 dias, contando com a participação de um total de 21 estudantes da licenciatura em Pedagogia de uma universidade pública do Estado do Rio Grande do Norte. Todos os estudantes cursaram pelo menos 50% da licenciatura. Os dados que aqui serão discutidos foram coletados no primeiro encontro do curso, onde aplicamos um questionário, antes da realização de qualquer estudo sobre o tema.

Tabela 1. Apresentação das questões de pesquisa, seus respectivos objetivos e os indícios de conhecimento especializado para ensinar Matemática com o modelo MTSK

Questão	Objetivo	Indícios de conhecimento especializado para ensinar Matemática com o modelo MTSK
1. O que você sabe sobre a Base Nacional Comum Curricular de Matemática? Conte-nos!!!	Investigar o conhecimento que os licenciandos possuem sobre o currículo de Matemática disposto na BNCC.	Conhecimento das Normas da Aprendizagem de Matemática (KMLS).
2. O que você entende por Álgebra?	Identificar o que o licenciando entende por Álgebra.	Conhecimento de tópicos (KoT).
3. O que você entende por pensamento algébrico?	Identificar o que o licenciando entende por pensamento algébrico.	Conhecimento de tópicos (KoT).

O questionário era composto por três questões sobre a Álgebra, o pensamento algébrico e sobre a Base Nacional Comum Curricular. Para fins de análises dos dados produzidos, elaboramos a Tabela 1 acima, concebida segundo a nossa compreensão dos diferentes domínios do MTSK (Carrillo et al., 2013) e suas relações com as questões utilizadas no instrumento de coleta de dados.

Expressas as opções metodológicas, passaremos para a análise dos dados.

ANÁLISE E DISCUSSÃO

Nesta seção, tomamos como dados os protocolos de resolução da tarefa proposta dos licenciandos do curso de Matemática. Destacamos que nossas análises não têm por propósito julgar se as respostas dos futuros professores estavam bem ou mal elaboradas. Nosso objetivo foi trazer à tona elementos que consideramos fundamentais no/para o ensino da Álgebra nos anos iniciais. Sobre a questão da BNCC, obtivemos os seguintes resultados:

Tabela 2. Variáveis e frequência de respostas (Questão 1)

Variáveis	Frequência
Conhecimento superficial	6
Nunca leu	11
Possui conhecimento	4

Ao analisarmos as respostas da primeira pergunta, percebemos que a maioria nunca realizou a leitura da Base Nacional Comum Curricular. Apresentaremos alguns protocolos:

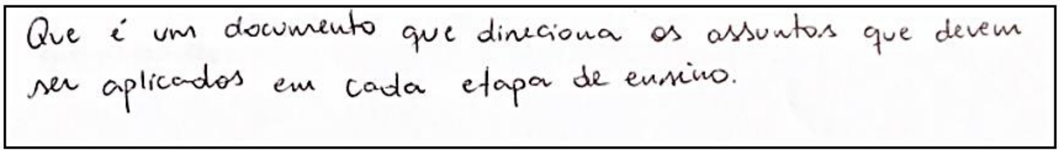

Que é um documento que direciona os assuntos que devem ser aplicados em cada etapa de ensino.

Figura 1. Protocolo A

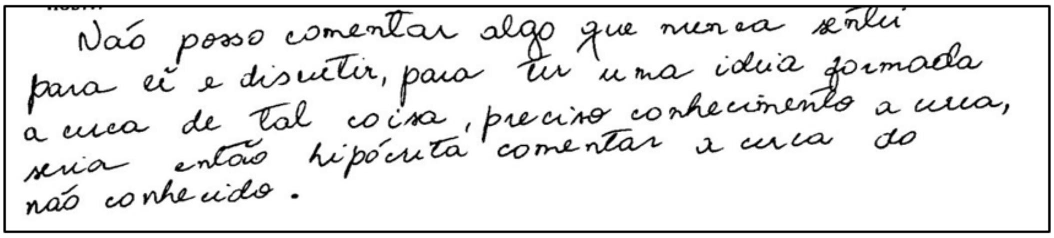

Não posso comentar algo que nunca sentei para lê e discutir, para ter uma ideia formada a cerca de tal coisa, preciso conhecimento a cerca, seria então hipócrita comentar a cerca do não conhecido.

Figura 2. Protocolo B

Os protocolos A e B revelam que o futuro professor desconhece o documento que define os conhecimentos essenciais que todos os alunos da Educação Básica têm o direito de aprender. Prevista em lei, a BNCC deve ser obrigatoriamente observada na elaboração e implementação de currículos das redes públicas e privadas, urbanas e rurais. Esse fato desvela a ausência de mobilização do Conhecimento das Normas da Aprendizagem de Matemática (KMLS), ao mesmo tempo que denuncia a urgência e importância de se estudar a BNCC nos cursos de licenciatura.

Em relação à segunda questão, as respostas obtidas da maior parte dos licenciandos revelam que, mesmo com várias reformas educacionais, novas diretrizes e orientações propostas para o sistema educacional brasileiro, o ensino de Álgebra permanece com poucas alterações na Educação Básica, uma vez que a visão da Álgebra revelada pelos licenciandos ainda está relacionada ao ensino de regras e técnicas operatórias. Esse conhecimento sobre a fundamentação conceitual está relacionado ao KoT.

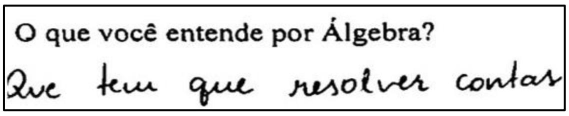

O que você entende por Álgebra?
Que tem que resolver contas

Figura 3. Protocolo C

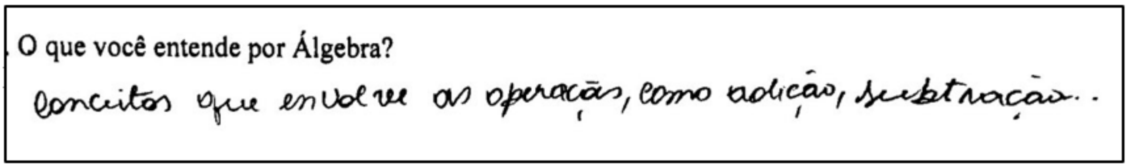

O que você entende por Álgebra?
Conceitos que envolve as operações, como adição, subtração.

Figura 4. Protocolo D

O protocolo E é um exemplo de resposta que revela as fragilidades com relação à fundamentação conceitual, que está relacionada ao conhecimento de tópicos. A concepção de pensamento algébrico, revelada pela maioria do grupo, está relacionada com as operações aritméticas. Também registramos que nove pessoas, dentre as 21, registraram "*não sei*" como resposta (cf. figura 6).

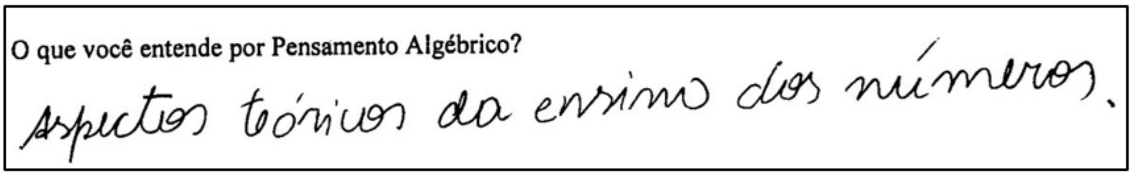

O que você entende por Pensamento Algébrico?
Aspectos teóricos do ensino dos números.

Figura 5. Protocolo E

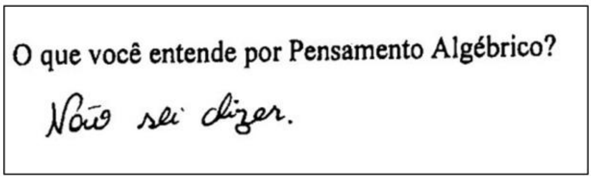

O que você entende por Pensamento Algébrico?
Não sei dizer.

Figura 6. Protocolo F

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante das discussões e dos indícios apresentados, fica notória a importância de que é necessário ao formador de professores oportunizar o trabalho com os subdomínios do MTSK, desde a formação inicial de professores.

Não obstante é essencial desenvolver tarefas em que os licenciandos (futuros professores que ensinarão Matemática) sejam mobilizados a avançar no desenvolvimento dos níveis de pensamento algébrico, com foco não somente nos conhecimentos pedagógicos, mas também no conhecimento matemático.

Não há aqui uma visão ingênua de que, para a construção de conhecimentos, basta propor boas tarefas. No entanto, é possível reconhecer a importância da reflexão do futuro professor ao trabalhar com elas, a partir de questionamentos do formador de professores e das discussões desencadeadas.

Referências

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, Thousand Oaks*, *59*, 389-407.

Barboza, L. C. S., Pazuch, V. & Ribeiro, A. J. (2021). Tarefas para a aprendizagem de professores que ensinam matemática nos anos iniciais. *Zetetiké*, *29*, 1-25.

Blanton, M., & Kaput, J. (2008). Building disctrict capacity for teacher development in algebraic reasoning. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Orgs.), *Algebra in the Early grades* (pp. 133-160). Nova Iorque: Lawrence Erlbaum Associates.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Bogdan, R, & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, *16*(2), 81-118.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics teaching. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (8. ed., pp. 2985-2994). Antalya, Turkey: Middle East Technical University, Ankara.

Cunha, A. C. P. C., Carvalho, J. S. O., Sousa, M. F. V., & Figueiredo, M. L. S. C. L. (Orgs.) (2018). *Documento Curricular do Estado do Rio Grande do Norte: Ensino Fundamental*. Natal, RN: Secretaria da Educação e da Cultura.

Cyrino, M., & Oliveira, H. (2011). Pensamento algébrico ao longo do ensino básico em Portugal. *Bolema*, *24*(38), 97-126.

Doerr, H. M. (2004). Teachers' knowledge and teaching of algebra. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study.* (pp. 267-289). New York, USA: Kluwer Academic Publishers.

Flores, E., Escudero, D. I., & Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. In A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Routledge.

Lautenschlager, E., & Ribeiro, A. J. (2014). Reflexões acerca do impacto do conhecimento matemático dos professores no ensino: a álgebra da Educação Básica. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *7*(3).

Lins, R. C. (1992). *A framework for understanding what algebraic thinking is*. Tese (Doctor of Philosophy) – School of Education, University of Nothingam, Nothingam, UK.

Matos, A. S., & Ponte, J. P. (2009). Exploring functional relationships to foster algebraic thinking in grade 8. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica),* Supplemento n. 2 al n. 19, 1-9.

McCrory, R. et al. (2012). Knowledge of algebra for teaching: A framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(5), 584-615.

Ministério da Educação (2017). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC. Recuperado de: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

Nye, B., Hedges, L. V., & Konstantopoulos, S. (2000). The effects of small classes on achievement: The results of the Tennessee class size experiment. *American Educational Research Journal*, *37*(1), 123-151.

Pazuch, V., & Ribeiro, A. J. (2017). Conhecimento profissional de professores de matemática e o conceito de função: uma revisão de literatura. *Educação Matemática Pesquisa*, *19*(1), 465-496.

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimental, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Ponte, J., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa, Portugal: DGIDC.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, Thousand Oaks*, *15*(2), 4-14.

Stephens, M., & Ribeiro, A. J. (2012). Working towards algebra: The importance of relational thinking. *RELIME*, *15*(3), 307-401.

CAMBIOS EN EL CONOCIMIENTO GEOMÉTRICO ESPECIALIZADO Y EL PAPEL DE LA REFLEXIÓN COLABORATIVA. EL CASO DE UN DOCENTE DE PRIMARIA.

Changes in the Geometrical Teaching Specialized Knowledge and the role of collaborative reflection. Case of a teacher's elementary school

Sánchez-Ramírez, S. [a]; Sandoval, I. [b]

[a b] Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Ajusco, México

Temática: 1 – MTSK en la formación docente

Resumen. La reflexión colaborativa sobre la práctica docente, en el contexto de una intervención de desarrollo profesional, posibilita a los participantes profundizar en sus conocimientos geométricos especializados. Estudiamos a un docente de primaria, de una escuela pública en México, quien participó en una investigación-acción colaborativa. Se analizaron episodios, usando el modelo MTSK, de dos sesiones de la misma temática impartida por el docente en dos ciclos escolares distintos. Los resultados muestran cambios en su conocimiento geométrico especializado relacionado con la (des)composición de figuras y cuerpos geométricos. En particular, se identificaron cambios en su conocimiento de los temas (KoT), de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFML) y de los Estándares de Aprendizaje Matemático (KMLS).

Palabras clave. (Des)composición de figuras y cuerpos geométricos, docente de primaria, conocimiento geométrico especializado, reflexión colaborativa.

Abstract. Collaborative reflection on teaching classroom practices, in the context of a professional development program, enables participants to develop their geometrical teaching specialized knowledge. In this study, we analyzed the teaching practices of a teacher, he works in an elementary public school in Mexico, and he participated in a collaborative action research. We analyzed episodes, using the MTSK model, episodes of two sessions of the same geometrical topic given by the same teacher in two different school years. The results show changes in their geometrical teaching specialized knowledge related to the (de)composition of geometric figures and solids. In particular, we identified some changes in their Knowledge of Topics (KoT), Knowledge of Mathematics Teaching (KMT), Features of Mathematics Learning (KFML) and Mathematical Learning Standards (KMLS).

Keywords. (De) composition of geometrical figures and solids, elementary school teacher, geometrical teaching specialized knowledge, collaborative reflection.

INTRODUCCIÓN

Los docentes son un agente primordial para la implementación de las propuestas curriculares. Diversos autores reconocen a los docentes como un eje imprescindible para cumplir las metas educativas de cada país (Fullan, 2002; Latapí, 2004). Además, los países con mejores resultados en las pruebas estandarizadas internacionales relacionan estos logros con la alta capacidad y excelencia de sus docentes (Fullan, 2002).

En México, según datos de la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2020), son 1,225,341 docentes de educación primaria distribuidos en más de 230 mil escuelas; por lo que incidir en la mejora de sus prácticas en el aula requiere de acciones contextualizadas. Este sistema educativo tiene amplia diversidad sociocultural, de tipos de escuelas (generales, indígenas y comunitarias; multigrado y de organización completa), de formación inicial

Sánchez-Ramírez, S., & Sandoval, I. (2021). Cambios en el conocimiento geométrico especializado y el papel de la reflexión colaborativa: el caso de un docente de primaria. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 145–152). Congresseme.

de los docentes (algunos con o sin una carrera afín a la docencia para educación primaria), entre otros (Sandoval y Lozano, 2014), lo que implica repensar la formación continua de docentes. Asimismo, cada seis años por relevo en el gobierno es factible tener nuevas propuestas educativas materializadas en reformas educativas, lo que implica nuevos materiales educativos, dos de ellos son los libros de textos para el alumno y para el docente, que son gratuitos, públicos y se distribuyen a todos los estudiantes y docentes. En este contexto, las acciones implementadas por la SEP para el mejoramiento de la práctica docente, han resultado insuficientes y más cuando hay nuevos materiales educativos (Weiss, et. al., 2019). Por lo que la formación de docentes en servicio es una problemática vigente.

Una de las áreas de las matemáticas escolares menos abordada, tanto en las aulas como en la investigación, es la geometría en comparación con otras áreas como la aritmética (Guillén, 2010; Avila, Block y Carvajal, 2013). Además, en los nuevos libros de texto (1ro y 2do grado de primaria, SEP, 2018a, 2018b) se aprecia un incremento en las temáticas y tiempos destinados a la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Por estas razones se decidió investigar *¿cómo la reflexión sobre la práctica docente (propia y de otros) en un ambiente colaborativo, da voz a los docentes y permite movilizar e identificar conocimientos geométricos especializados (modelo MTSK) cuando se enseñan temas relacionados con la (des)composición de figuras y cuerpos geométricos en primaria?*

Los resultados que aquí se presentan forman parte de una investigación más amplia como parte de una tesis de Maestría (Sánchez, 2021).

MARCO TEÓRICO. EL MTSK COMO HERRAMIENTA ANALÍTICA

Para la enseñanza de las matemáticas es necesario, según Shulman (1986), conocimientos tanto disciplinares como pedagógicos y su amalgamiento es lo que lo convierte en conocimiento especializado. Aunque lo disciplinar está en el centro de la enseñanza, es su transformación la que la vuelve escolar y diferenciada; pues implica organizar, estructurar, y reestructurar los conocimientos matemáticos a contenidos de la matemática escolar en formas accesibles (Scheiner, Montes, Godino, Carrillo y Pino-Fan, 2019). Por lo que investigar sobre los conocimientos especializados que los docentes tienen y ponen en acción en la práctica de la enseñanza de las matemáticas es de actual interés.

Para responder la pregunta de esta investigación que implica interpretar, analizar y comprender el conocimiento que un docente pone en juego en su práctica, hemos seleccionado el modelo del *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (MTSK por sus siglas en inglés). Aunque el foco fue en subdominios del *Conocimiento Didáctico de Contenido* (PCK) se identificaron interacciones con otros subdominios.

A continuación se describe el modelo y sus subdominios (Contreras, Carrillo y Climent, 2018). El *Conocimiento Matemático* (MK) está conformado por tres subdominios. El *Conocimiento de los Temas* (KoT) incluye saber sobre fenomenología y aplicaciones de un contenido, los procedimientos, las definiciones y sus fundamentos, y los diferentes registros de representaciones. En esta investigación es necesario saber el concepto de poliedro y sus clasificaciones, características de los cuerpos geométricos (p.ej., pirámides y prismas), fenómenos modelados con poliedros, así como ejemplos representativos de cuerpos geométricos. El *Conocimiento de la estructura de las matemáticas* (KSM) incluye una visión respecto a conexiones de complejización, simplificación, transversales o auxiliares del contenido. Para los poliedros, analizar sus elementos y relacionarlos con figuras bidimensionales (el caso de las caras), es un ejemplo de conexión de simplificación-complejización entre contenidos geométricos. El *Conocimiento de práctica matemática* (KPM) aborda las características de trabajo matemático con aspectos como la comunicación, argumentación, demostración matemática, así como procesos asociados a la resolución de problemas (heurístico) y prácticas del quehacer matemático (como la modelación). Para el caso de los poliedros, el papel del lenguaje y vocabulario geométrico al describir las características y propiedades de un cuerpo geométrico; además, la utilización de ejemplos y no ejemplos como una estrategia de visualización de propiedades y su validación.

El dominio *Conocimiento Didáctico del Contenido* (PCK) está integrado tres subdominios. El *Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT) se interpreta sobre cómo se presenta el contenido y sus potencialidades para lograr el aprendizaje esperado, entre los elementos a identificar se encuentran las actividades, ejemplos adecuados, intención y el contexto en que se desarrollan. En este caso, el uso de materiales concretos para modelar cuerpos sólidos (p.ej., ensambles, mini tapete, dados) y explorar relaciones y propiedades geométricas. El papel de representaciones 2D y construcción de prismas y pirámides con diversos materiales como palillos y plastilina para mostrar diferentes elementos del mismo poliedro. El *Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* (KFML) se precisa como algunas maneras comunes de razonamiento de los alumnos en un determinado contenido, sus dificultades, aspectos que les resultan más comprensibles, los más y menos atractivos. En este subdominio cobra relevancia saber sobre dificultades relacionadas con las representaciones 2D de cuerpos 3D, la pertinencia de favorecer diferentes vistas del mismo objeto, reconocer los obstáculos que pueden generarse por la utilización de figuras comunes o prototípicas. El *Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS) refieren a saber los objetivos a alcanzar de un tema y su organización curricular, desde un contexto local y global. En este estudio el docente debe saber cuál es el objetivo de la lección, su relación al interior del grado y entre otros grados, esto es, el reconocimiento de la relación entre figuras y cuerpos geométricos, en particular, diversos prismas.

METODOLOGÍA. INVESTIGACIÓN ACCIÓN COLABORATIVA

En este estudio, de corte cualitativo, se usó la Investigación acción colaborativa (IAC). Esta se diferencia de otros enfoques por el trabajo conjunto tanto del investigador como de los participantes, en la búsqueda y propuesta de soluciones que emanen de manera activa, reflexiva y colaborativa, para repercutir en la mejora de la realidad (Cohen, Manion y Morrison, 2007). Esta se caracteriza por ser un proceso cíclico, dinámico y de re-construcción en la toma de decisiones. Este tipo de metodología implica cuatro fases, a saber, observación, reflexión, planeación y acción; y son dinámicas y cíclicas.

Contexto

La escuela donde se implementó esta intervención manifestó su disponibilidad para el acceso a los docentes y a los estudiantes, y brindó posibilidades para realizar el taller, por lo que la selección fue intencionada y deliberada. El punto de partida fue el interés tanto del investigador como de los docentes, manifestado en el acercamiento inicial, ratificado en una autoevaluación institucional y en los diálogos a lo largo de este estudio; el objetivo compartido fue el de promover espacios de reflexión colaborativa a fin de generar cambios en la práctica docente. Los criterios utilizados para seleccionar a los cuatro participantes en el estudio fueron: impartían clases en escuela primaria pública en primero o segundo grado; con al menos 3 años de experiencia docente; utilizaban los nuevos libros de texto gratuitos (implementados en el ciclo escolar 2018-2019) de la Reforma del 2017; conocían los libros de texto anteriores (Reforma 2011); disposición de ser observados, video grabados, entrevistados y para la participación en diferentes actividades de un taller.

Instrumentos de recolección de datos

Para recuperar la experiencia de los docentes se usó la "narrativa como herramienta de reflexión sobre la acción", observaciones de clase (videograbadas) y la entrevista posterior a cada clase (audiograbadas). Las narrativas fueron elaboradas tanto por el investigador como por cada docente participante para reconocer cuestiones sobre su práctica y posibles áreas de mejora. Se decidió mostrar como estudio de caso a Daniel (seudónimo), docente de 2do quien impartió el mismo grado y las mismas lecciones en los dos ciclos escolares consecutivos.

El taller. Una propuesta de Desarrollo Profesional en la misma escuela

Para realizar un trabajo de reflexión en beneficio de la práctica docente y, a su vez, el aprendizaje de los alumnos se propuso un taller de 10 sesiones (dos horas cada una). En este se abordó las necesidades detectadas en las tres observaciones de clase a cada docente, sus narrativas y reflexiones individuales y colectivas. Una vez sistematizados y analizados estos insumos, se identificaron conocimientos especializados para la enseñanza (consolidados o en proceso). Los conocimientos en proceso considerados como necesidades, están vinculados con la profundización en contenidos específicos (KoT); en el reconocimiento de prácticas matemáticas como "definir", "justificar", "visualizar" (KPM); en aspectos vinculados con el aprendizaje (KFML) de la geometría (procesos de definición, construcción y razonamiento); su enseñanza (representación de figuras y cuerpos; recursos de enseñanza; (KMT) y en el análisis de la organización de estos temas en currículo (cantidad de lecciones, comparación con otros temas; KMLS).

¿DE QUIÉN SON LAS HUELLAS? UNA MISMA LECCIÓN, UN MISMO PROFESOR, DOS CICLOS ESCOLARES DIFERENTES

Un aspecto central en el docente y su quehacer es lograr aprendizajes integrales en sus alumnos, a través de sus acciones. Para mejorar su práctica docente al enseñar matemáticas (al igual que en otras áreas de conocimiento), un punto de partida, según autores como Contreras, Carrillo y Climent (2018), es la reflexión de estas prácticas. Este fue el eje central del taller propuesto que se convirtió en una herramienta para la reflexión y la acción individual y colectiva, el intercambio de experiencias y conocimientos, gestándose como un espacio de oportunidades para el desarrollo profesional y el aprendizaje mutuo.

Algunas generalidades de la clase "¿De quién son las huellas?"

El objetivo de esta lección es "Reconocer la relación entre figuras y cuerpos geométricos en diversos prismas." (SEP, 2018b, p. 126) para que los alumnos continúen con "la identificación de los cuerpos a través del reconocimiento visual de la forma de las caras, del número de estas, de aristas y de vértices así como de las relaciones y diferencias entre figuras y cuerpos geométricos." (SEP, 2018a, p. 116). En el libro del alumno se proponen tres actividades a realizar durante la lección (véase Figura 1), dos de las cuales son para todos los alumnos y una tercera para aquellos con mayor desempeño, denominada "Un paso más".

Para el desarrollo de esta lección se le sugiere al profesor partir de los conocimientos previos de los alumnos y, a su vez, ejemplificar con situaciones cercanas a sus contextos particulares. Los ejemplos y explicaciones con cuerpos sólidos (sugeridos en el libro del maestro, es disponer de un prisma rectangular, uno triangular y un cubo) tienen la pretensión de aproximar a los alumnos a conocer no sólo la relación entre cuerpos y figuras sino favorecer habilidades de visualización para reconocer e identificar caras ocultas en los modelos/estructuras de cuerpos geométricos 3D y en la representación 2D.

La clase de Daniel en el ciclo 2018-2019. ¿Rectángulo acostado, inclinado, parado?

En la planeación de la temática en los dos ciclos escolares, 2019 y 2020, Daniel se centró en ejemplificar y contestar el libro de texto del alumno como el instrumento guía de sus clases.

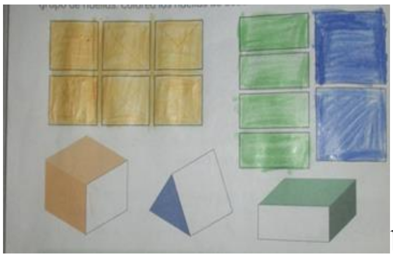
Durante la sesión en 2018-2019, Daniel inicia su clase con la pregunta a sus alumnos "¿qué pasa cuando pisamos lodo?", con la finalidad recomendada en el libro del maestro de contextualizarlos en un escenario conocido para ellos, ayudarles a reconocer cómo se forman las huellas, y relacionarlo con la forma que dejan algunos cuerpos geométricos de acuerdo con la forma de sus caras (KMLS y KoT). Primero, él ejemplifica con un cubo (usa un dado) y sus caras (KMT). El docente refiere cómo cada cara tiene una cantidad de puntos diferentes, coloca el dado con una vista frontal a los alumnos donde solo muestra una cara y, después, lo inclina un poco, para apreciar tres diferentes caras del cubo con sus correspondientes puntos (KMT). Después, les pregunta respecto a la cara oculta "¿cuántos puntos tiene esta?"(KMT, KoT y KMLS). El docente a partir de la observación de las cinco de las caras espera de ellos respuestas acordes a la identificación de la cara no visible de acuerdo con los puntos correspondientes.

El docente continúa con más preguntas, esta vez procura solo dar características de figuras geométricas y los alumnos deben descubrir y nombrar dicha figura. El docente se centra en figuras más familiares para los alumnos y susceptibles de reconocer fácilmente como es el caso del cuadrado y rectángulo (KMT). El docente privilegia figuras prototípicas y con carencias en las características necesarias y suficientes para definirlas. Para ilustrarlo, se retoman las palabras del docente "una figura que tiene cuatro lados iguales", los alumnos aseveran que es el cuadrado, mientras el docente reafirma esta respuesta como correcta (Daniel omite considerar a los rombos con esta característica, además, un rombo no siempre es cuadrado). Esta situación se repite con el rectángulo, donde las características dadas no son suficientes para definir al rectángulo (KMT, KMLS y KFML).

Después, Daniel explica, brevemente, que las figuras geométricas pueden presentarse en diferente posición, traza tres rectángulos en la pizarra y los nombra por la posición. Cuando uno de los lados más largos queda de manera horizontal, el docente lo nombra como rectángulo acostado, si los lados más largos del rectángulo están perpendiculares a la base de la pizarra lo denomina como un rectángulo parado, y si los lados no se encuentran ni en horizontal ni en vertical, el los llama como rectángulo inclinado (KoT, KFML y KMT). El docente incorpora otros ejemplos de situaciones donde se dejan huellas ("cuando le quitas un pepperoni a una pizza deja la huella circular del pepperoni"). Una vez ha ejemplificado sobre las huellas de algunos cuerpos, les pide a sus alumnos contestar la primera actividad del libro de texto. Daniel da un tiempo para su resolución individual, aunque no revisa las respuestas. Para finalizar la clase, invita a los alumnos a experimentar con varios cuerpos geométricos y les pide marcar las huellas (huella dependiendo la cara que marquen) de los cuerpos seleccionados en hojas con el uso de acuarelas. Cuando la mayoría de los alumnos terminan, él da por finalizada la sesión.

Al analizar la narrativa del investigador y la clase videograbada, observación de su propia práctica, Daniel comenta que él "nunca se había percatado de la dificultad que representa para los alumnos, reconocer las caras ocultas de los cuerpos geométricos". Para él esta habilidad se desarrollaba de manera innata (es psicólogo de formación inicial). Asimismo, notó el desacierto en la contestación de los alumnos a la actividad del libro de texto (Figura 1b,1c). Esta situación generó un cuestionamiento (reflexión) a Daniel, ¿por qué ocurría? En su experiencia previa, el ver o no ver caras ocultas pasaba desapercibido y no había tomado conciencia de la importancia de la habilidad de visualización.

a.


b.

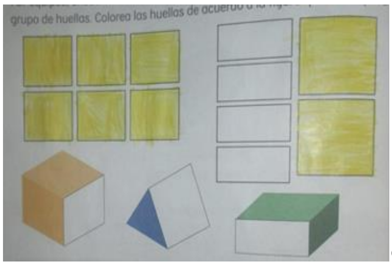

c.

Figura 1. Lección y dificultades de los alumnos para reconocer las caras de un cuerpo geométrico representado en 2D

Daniel imparte la misma clase, un año después. Uso de otros materiales y preguntas

Daniel inicia la sesión con la pregunta "¿cuál es la diferencia entre un cuerpo geométrico y una figura geométrica?", a fin de recuperar lo visto previamente. Él afirma que una característica es la forma en cómo vemos a las figuras y cuerpos geométricos. Por ello, los cuestiona nuevamente "¿cómo vemos una figura geométrica?". Los alumnos comunican diferentes respuestas, pero ninguna está encaminada a lo que él pretende escuchar; al finalizar la clase, en un diálogo informal, él afirma que "las figuras tienen una sola vista y los cuerpos varias" (KMT, KFML y KoT).

Dada esta situación, Daniel prosigue y dibuja en el pizarrón un cuadrado. Después, pregunta "¿qué es?" y los alumnos identifican al cuadrado. Continúa cuestionando, "¿cuál cuerpo se puede formar con un cuadrado?" y ellos le responden "un cubo" y, nuevamente pregunta por la cantidad de caras del cubo. De manera simultánea, ejemplifica con un material para ensamblar el desarrollo plano de un cubo (KMT, KFML y KMLS). Después, el docente utiliza otros cuerpos, entre estos una pirámide. Daniel vuelve a preguntar por la diferencia entre cómo vemos una figura geométrica y un cuerpo. Uno de los alumnos le responde "las figuras solo tienen una cara y los cuerpos tienen más". Esta respuesta la usa como guía de su explicación y ejemplificación. Luego, en el pizarrón, él dibuja algunas figuras geométricas (cuadrado y rectángulo) y la representación de cuerpos geométricos que pueden formar o tener en sus caras esas figuras geométricas (prismas). El docente ejemplifica con cuerpos sólidos e identifica sus caras, para posteriormente pasar a la lección del libro. Él da tiempo para la resolución de la actividad del libro, y después en colectivo, hace preguntas para validar la respuesta de algunos alumnos.

¿Qué cambió en los conocimientos geométricos especializados de Daniel en sus dos clases?

Resultado de analizar las acciones de Daniel, en las dos sesiones con diferencia de un año y posterior a un taller, se logró identificar cambios en sus conocimientos especializados al enseñar el mismo tópico geométrico. Uno de ellos está relacionado con el uso del material concreto, en sus palabras,

> En un primer momento, les daba el material … terminado la actividad para que jugaran y tenerlos ocupados; ya en el segundo … sirvió como algo previo … ahora que se pudo ver todas las bondades del material ya se los dí pero ya con un propósito … ayudó a que lo pudieran visualizar a lo sólido, porque también mis clases … netamente al pizarrón, veíamos esa dificultad de la parte plana de una sola vista." (Daniel, S9, V4, T9:50).

En la Figura 2 se muestra, una síntesis de los conocimientos geométricos identificados.

Subdominios del MTSK	Sesión de clase 2018-2019	Sesión de clase 2019-2020
Conocimientos de los temas (KoT)	• Conoce características necesarias de figuras geométricas (relación entre lados y sus longitudes). • Conoce que las caras de prismas y pirámides son figuras planas.	• Conoce que las caras de los cuerpos geométricos son figuras geométricas. • Conoce que la forma de las caras en desarrollos planos son figuras geométricas y que a partir de estas se pueden construir cuerpos geométricos. • Conoce que la posición no es una característica de los cuerpos geométricos.
Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT)	• Conoce beneficios de usar cuerpos geométricos sólidos familiares para los alumnos (materiales concretos y manipulativos), para ejemplificar características entre y de las caras que lo constituyen, y establecer las relaciones geométricas de elementos constituidos del cuerpo.	• Conoce los beneficios de iniciar con un cuerpo conocido por los alumnos (cubo) para representar y ejemplificar la forma de sus caras (cuadradas). • Conoce y emplea material concreto (desarmable) para que los alumnos reconozcan características comunes en cuerpos (forma de las caras, número de aristas y de vértices) y figuras geométricas (número y tamaño de lados) y promover la aprehensión de la relación entre cuerpos y figuras geométricas. • Conoce y emplea los sólidos y la relación con su representación en 2D para que los alumnos comprendan la relación entre figuras y cuerpos geométricos, en sus representaciones planas.
Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFML)	• Conoce dificultades generadas por el uso exclusivo de ejemplos de cuerpos y figuras geométricas prototípicas para la comprensión de relaciones entre figuras y cuerpos geométricos.	• Sabe que los alumnos reconocen algunos cuerpos geométricos (como el cubo) y la reconoce como una ventaja, que los alumnos tengan conocimientos previos de características de cuerpos y figuras familiares para retomarlos para su clase. • Conoce que al mostrar el desarrollo plano de algunos cuerpos geométricos (prismas y pirámides), los alumnos distinguirán relaciones entre las caras planas y los cuerpos geométricos, en términos de cantidad y forma. • Sabe que la posición puede ser una dificultad que impide a los alumnos reconocer cuerpos geométricos si estos no se presentan de manera prototípica.
Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje Matemático (KMLS)	• Conoce la organización y secuenciación de temas de geometría (lo que va primero y lo que va después), propuestos en la reforma curricular 2017, para la enseñanza y aprendizaje de relaciones y diferencias entre figuras y cuerpos geométricos.	• Conoce la necesidad de interconectar contenidos geométricos, en este caso, utiliza la construcción de cuerpos geométricos a partir de las figuras geométricas de sus desarrollos planos.

Figura 2. Contraste entre los conocimientos geométricos especializados del mismo docente

A MANERA DE CONCLUSIÓN

La mejora de la práctica docente viene dada a partir de cambios tanto de perspectiva, de conocimientos y acciones por parte de los docentes, como producto de la reflexión y acción. Para promover cambios en la práctica no es suficiente con describir, interpretar o analizar lo que ocurre en la enseñanza. Es necesario generar propuestas que fomenten la reflexión y construcción de conocimientos colaborativa; contar con el apoyo de las autoridades educativas y de los padres de familia, y generar un espacio de confianza entre los participantes. Afirmamos que la realización de una reflexión colectiva en contraste con una individual, tanto en el análisis de situaciones como de resolución de problemas, potencia y genera un trabajo de apoyo y de enriquecimiento para los participantes. Esta dinámica favoreció contrastar y compartir diversas perspectivas, comentarios y diálogos que incidieron en la reflexión, como sucedió con Daniel después de observar su clase. Al final del taller, Daniel y los demás participantes valoraron el trabajo colaborativo pues promovió realmente "tener cambios en la forma de concebir la geometría y los conocimientos que tenían respecto a esta".

El modelo MTSK permitió identificar evidencias y conocimientos que los docentes pusieron en juego en sus clases (analizar las narrativas docentes y la observación de clase), y reconocer aquellos que estaban en proceso de construcción o ausentes. Además, fue una herramienta para la construcción de la propuesta del taller, sus sesiones, actividades y acciones.

Agradecimientos

Este trabajo está vinculado a la Red MTSK de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

Referencias

Avila, A., Block. D. y Carvajal, A. (2013). Investigaciones sobre educación preescolar y primaria. En Avila, A. (coord.), Block, Carvajal, Camarena, Eudave, Sandoval y Solares. *La investigación en educación matemática en México: 2002-2011*. Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México. (pp. 35-54). México. COMIE/ANUIES.

Cohen L., Manion L y Morrison K. (2007). *Research Methods in Education*. Estados Unidos, Nueva York; Routledge.

Contreras, L., Carrillo, J. y Climent, N. (2018). Aproximándonos al conocimiento especializado de una estudiante para maestro a partir de una narrativa. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar –González, P. Alonso, F.J. García-García y Bruno, A. *Investigación en Educación Matemática XXII, SEIEM*. (pp. 50-65). España: Gijón.

Fullan, M. (2002). El sentido del cambio educativo. En M. Fullan. *Los nuevos significados del cambio en la educación.* (pp. 61-78) Barcelona. Octaedro-Colección Repensar la educación.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV SEIEM.* (pp. 69-85). España: Universitat Lleida.

Latapí, P. (2004). La política educativa del Estado mexicano desde 2002. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 6* (2).

Sánchez, S. (2021). *Reflexión y acción para movilizar conocimientos especializados en la enseñanza de la geometría. Una propuesta de desarrollo profesional en docentes de educación primaria.* (Tesis maestría no publicada). México: Universidad Pedagógica Nacional.

Sandoval, I., y Lozano, D. (2014). La necesidad de cambio en las prácticas de enseñanza de las matemáticas en primaria a través del trabajo colaborativo entre investigadores y maestros. En Solares, A. (coord.). *Qué, Cómo y porqué: una conversación internacional sobre el aprendizaje de profesores de matemáticas/ What, How and Why: An internacional conservation on Mathematics Teacher Learning.* (91-112). México: UPN/UdeC.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J. & Pino-Fan, L. (2019). What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(1), 153–172.

SEP (2018a). *Libro para el maestro. Matemáticas primer grado*. México: Secretaría de Educación Pública.

SEP (2018b). *Matemáticas. Segundo grado.* México: Secretaría de Educación Pública.

SEP (2020). *Principales Cifras del Sistema Educativo Nacional 2019-2020.* https://bit.ly/2WZqlpG

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14.

Weiss, E., Block, D., Civera, A., Dávalos, A., Naranjo, G. (2019) (coords.). *La enseñanza en educación básica. Análisis de la práctica docente en contextos escolares*. México: INEE.

COMUNICAÇÕES ORAIS

TEMÁTICA 2

MTSK DO FORMADOR DE PROFESSORES

DETERMINANTES DEL CONOCIMIENTO DE LOS FORMADORES DE PROFESORES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN MÉXICO

Determinants of knowledge of secondary education teacher trainers in Mexico

Avalos-Rogel A. [a]; Hernández-Escobar M. [b]

[a, b] Escuela Normal Superior de México

Temática: 2 – MTSK del formador de profesores

Resumen. En este estudio se indagaron los elementos que determinan los conocimientos de los formadores de profesores mexicanos de la Licenciatura en enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en educación secundaria, a partir de la discusión con el modelo denominado Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, con el fin de contribuir a la caracterización de un Conocimiento Especializado del Formador de Profesores de Matemáticas. Se investigaron algunas tradiciones magisteriales en la formación de docentes y las trayectorias de los formadores de profesores de matemáticas en México; esta información fue recuperada mediante la aplicación de un instrumento a 99 formadores de 19 estados de escuelas normales. Se confirma que los conocimientos del formador se ven impactados por los sujetos que intervienen, el currículo, las trayectorias y el aprendizaje social de la profesión.

Palabras clave. Conocimiento de Formadores, Formador de Profesores, MTSK.

Abstract. In this study they investigated the elements that determine the knowledge of the trainers of Mexican teachers of the Bachelor's Degree in teaching and learning of Mathematics in secondary education, based on the discussion with the model called Specialized Knowledge of the Teacher of Mathematics, in order to contribute to the characterization of a Specialized Knowledge of the Teacher of Mathematics Teachers, investigated the teaching traditions in teacher training and the trajectories of the teachers trainers of mathematics teachers in Mexico, this information was recovered by describing the application of an instrument to 99 trainers from 19 states of normal schools. It is confirmed that the knowledge of the trainer is impacted by the subjects involved, the curriculum, the trajectories, and the social learning of the profession.

Keywords. Trainers Knowledge, Teacher Trainer, MTSK.

INTRODUCCIÓN

El conocimiento de los formadores de profesores de matemáticas es una línea de investigación que recién ha sido abordada (Avalos-Rogel, et al. 2017; Avalos-Rogel, 2019 y Pascual, Montes y Contreras, 2019), por lo tanto, se reconoce que hay diversos conocimientos de los formadores que son andamiajes en la formación de docentes. La formación de los docentes de matemáticas en una institución, es multidimensional; es concebida como espacio de legitimación de saberes (matemáticos, didácticos, escolares, tecnológicos); como normas que dan cuenta de intenciones sociales a diversos niveles (desde las políticas educativas mundiales, del país, de la comunidad, de la institución formadora, de los centros escolares); como prácticas educativas en tradiciones culturales de la enseñanza las matemáticas y de la formación de docentes de matemáticas; y como metodologías para el diseño de propuestas de enseñanza de las matemáticas en diversos niveles de concreción curricular (planes de estudio, programas, libros de texto, diseño de secuencias de actividades, vinculación curricular), tanto para la educación básica como

Avalos-Rogel A., & Hernández-Escobar M. (2021). Determinantes del conocimiento de los formadores de profesores de educación secundaria en México. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 154–161). Congresseme.

para la formación, entre otros. En cada una de estas dimensiones, se juegan conocimientos y saberes diversos, tanto teóricos como metodológicos, algunos de los cuales el modelo MTSK se ha encargado de describir.

Lo anterior se ve trastocado por los contextos específicos. La Licenciatura en enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en la educación secundaria que ofrece la Escuela Normal Superior de México (ENSM) recupera la perspectiva propuesta en el Proyecto Tuning para América Latina relativa al desarrollo de competencias. De esta manera, el plan de estudios pretende desarrollar tres tipos de competencias: genéricas, profesionales y disciplinares. En el desarrollo de competencias genéricas, el conocimiento matemático y la resolución de problemas forman parte de lo que todo ciudadano debe saber y saber hacer, de competencias profesionales ligadas a los saberes de la profesión docente y de competencias disciplinares que se relacionan con el conocimiento matemático y su didáctica. Las competencias profesionales se desarrollan en un planteamiento de acercamiento a la práctica mediante la iniciación científica, pero también a través de la docencia reflexiva, perspectiva que permite construir una mirada diferente a lo múltiple y problemático, a partir de la instalación de formatos de interlocución en diversos dispositivos institucionales, como la descripción del contexto, el diagnóstico de los aprendizajes de los estudiantes y el análisis del diseño y puesta en marcha de situaciones didácticas.

En dicho programa, los espacios curriculares se organizan en cuatro trayectos formativos: Bases teórico-metodológicas para la enseñanza, Formación para la enseñanza y el aprendizaje, Práctica profesional y Optativos [D.O.F., 2018]. En cada uno de ellos es posible identificar articulaciones y vinculaciones que toman como punto de referencia los contenidos de la educación obligatoria, la perspectiva de género, la presencia de contenidos transversales, y el alumno como el centro de la propuesta académica. Tomar en cuenta al estudiante en formación es importante, dada la complejidad que reviste en el proceso formativo. De acuerdo con Portugais (1995, cit. in Soto y Aguayo, 2020, p. 38) "… el formado ocupa una doble posición en el sistema de formación, la de futuro profesor y la de alumno. Cuando ocupa el lugar de alumno, la relación con el formador está mediada por la intervención de aprender a enseñar, pero cuando juega el rol de enseñante, la relación está mediada por su intención de enseñar matemáticas. El formado ocupa estas dos posiciones en un mismo tiempo…".

Nuestra preocupación se centró en indagar cuáles eran los determinantes de los conocimientos del formador, desde los que provienen de sus trayectorias profesionales, las que derivan del planteamiento curricular y las que se instalan en los procesos formativos. Cabe señalar que forma parte de un proyecto de investigación más amplio sobre la caracterización de los conocimientos del formador de formadores que lleva a cabo la Red Iberoamericana de Investigación sobre el Conocimiento Especializado del Profesorado de Matemáticas, de la que las autoras formamos parte,

Para esta investigación se plantearon tres preguntas para problematizar las determinantes del conocimiento de los formadores: ¿Qué tensiones y problemáticas en los conocimientos surgen del planteamiento curricular? ¿Cuál es el impacto de las trayectorias de los formadores de formadores en los saberes de la formación? ¿Cuáles son los saberes y prácticas de los formadores en el acompañamiento de los futuros profesores en el *practicum*?

Algunos aspectos del conocimiento del formador de profesores en este estudio se recuperaron mediante el desarrollo de instrumentos de tipo descriptivo, los cuales fueron aplicados a 99 formadores de profesores de escuelas normales en México para identificar los conocimientos involucrados en algunos procesos formativos y describir las trayectorias de los formadores de profesores de matemáticas en México. Las prácticas de formadores de futuros docentes de matemáticas de la educación secundaria en el marco del acompañamiento en el *practicum*, son vistas desde una racionalidad multirreferencial (Ardoino, 1993; 2006).

REFERENTES CONCEPTUALES

Se discute el modelo propuesto por Carrillo *et al.* (2013) denominado Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), pues pone de relieve qué aspectos del MTSK se movilizan en la formación de profesores.

El MTSK consta de seis subdominios, tres referentes al conocimiento matemático (MK): conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de la estructura matemática (KSM) y conocimiento de la práctica de la matemática (KPM); y otros tres referentes al conocimiento pedagógico de contenido (PCK): conocimiento de las características de aprendizaje de matemáticas (KFLM), conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de matemáticas (KMLS). Las categorías para este subdominio han sido construidas basándose en evidencias empíricas (Flores-Medrano, 2015; Escudero-Ávila, 2015).

LOS SUJETOS EN LAS RELACIONES DE FORMACIÓN

El sistema de la formación inicial está conformado por sujetos epistémicos, esto es, sujetos que en sus relaciones recuperan, socializan, adecuan y construyen conocimiento matemático, conocimiento matemático escolar, conocimiento pedagógico de las matemáticas y los saberes que subyacen a las prácticas matemáticas. En algunos casos son sujetos individuales con investiduras institucionales: en la escuela normal pueden ser formadores cuando son titulares de asignaturas, asesores cuando son acompañantes en el practicum, asesores de apoyo o metodológicos en la elaboración de sus documentos recepcionales para la obtención del título, y tutores para acompañar a los estudiantes en su trayectoria académica o en situaciones de rezago. También pueden ser sujetos colectivos: cuerpos académicos o grupos de investigación, comunidades de aprendizaje, consejos estudiantiles, o colegios de docentes.

Los roles de los sujetos epistémicos cambian según el lugar que ocupen en diferentes momentos de la formación, y eso les obliga a recuperar y reconstruir los saberes de la profesión: cuándo un saber matemático es recuperado para entender un saber matemático escolar; cuándo un saber sobre el conocimiento de las características de aprendizaje de matemáticas (KFLM) se retoma para transformarse en un conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT).

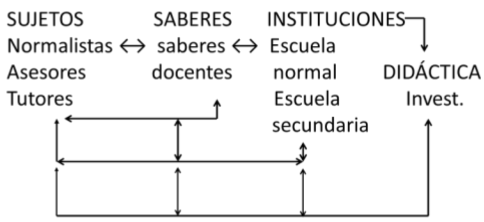


Figura 1. Modelo (Avalos-Rogel, 2019, p. 74)

Los saberes de los formadores se ven supeditados a restricciones institucionales, a macro y micropolíticas, a la construcción y gestión de conocimientos matemáticos, a la generación y gestión de conocimiento pedagógico de las matemáticas, entre otros.

LAS PROBLEMÁTICAS CURRICULARES DE LA FORMACIÓN

El programa formativo se organiza en 4 trayectos: Bases teórico-metodológicas para la enseñanza, Formación para la enseñanza y el aprendizaje, Práctica profesional y Optativos [D.O.F., 2018]. Las problemáticas curriculares de la formación en México son tensiones que se derivan del desarrollo de competencias genéricas en donde el conocimiento matemático y la resolución de problemas forma parte de lo que todo ciudadano debe saber (MK) y saber hacer (KPM), las competencias profesionales ligadas a los saberes de la profesión docente y las disciplinares que se relacionan con el conocimiento matemático (KoT y KSM) y su didáctica (PCK).

Sin embargo, se dejan entrever tensiones entre el planteamiento curricular con los proyectos de los sujetos y sus trayectorias. Un ejemplo es lo que sucede con las asignaturas optativas. En México se proponen cuatro trayectos de asignaturas optativas: Educación financiera, Tecnología educativa, Didáctica de las matemáticas y Matemáticas superiores. Con relación a las asignaturas optativas, en las entrevistas que realizamos se deja entrever que los docentes no las identifican como un componente de flexibilidad curricular, que permite al estudiante construir un proyecto de vida profesional y abrir el horizonte profesiográfico.

LAS TRAYECTORIAS ACADÉMICAS DE LOS FORMADORES DE PROFESORES

Se presenta la descripción de la información que arrojó la aplicación de los instrumentos a 99 docentes de 19 estados del país, que laboran en 25 instituciones que ofrecen el programa de la Licenciatura en aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, lo que representa el 30% de formadores de formadores de matemáticas. A nivel nacional se entrevistó a docentes que participaron en asignaturas de matemáticas y asignaturas de otros trayectos.

Contrariamente a la tendencia de la feminización de la profesión docente en los últimos 50 años, en la cultura de los formadores de formadores de matemáticas prevalece la mayoría masculina: 59.2% es del sexo masculino, contra el 40.8% femenino. Valdría la pena identificar si existe algún impacto de género en la formación de las y los futuros maestros de matemáticas.

En cuanto al porcentaje de maestros que participaron en cada trayecto de formación, el 59% en el Trayecto formativo Formación para la enseñanza y el aprendizaje, el 19% en el Trayecto formativo Bases teórico-metodológicas para la enseñanza, el 12% en el Trayecto formativo Práctica profesional, 10% en el Trayecto lengua adicional: inglés. El peso de los porcentajes va a reflejarse fuertemente en la percepción sobre los trayectos y las asignaturas, pues casi la mayoría los considera indispensables para la formación, con un menor peso el trayecto de los cursos optativos y el trayecto de lengua adicional: inglés.

En relación a sus estudios de licenciatura origen, 56.1% de los formadores de matemáticas tienen estudios universitarios relacionados con el área, preponderantemente son ingenieros y matemáticos (licenciados en Matemáticas). Cabe señalar que el 68% de esos profesionistas hizo estudios de posgrado en el área educativa y de la didáctica de las matemáticas, lo que hace que el 82,5% de los docentes que participa en el desarrollo curricular de esa licenciatura tenga conocimientos sobre educación y procesos educativos, además de poseer conocimientos de matemáticas. Este aspecto influye fuertemente en una percepción positiva de las asignaturas de Matemáticas en cuyo impulso se espera se desarrollen competencias profesionales, particularmente en torno a la didáctica del área de las matemáticas que se aborda, a la reflexión en torno de los procesos de enseñanza y de aprendizaje del área.

Cabe señalar que el 43.9% de los formadores de futuros profesores son egresados de las licenciaturas en enseñanza de las matemáticas de escuelas normales, el diseño del Plan de Estudios de las Escuelas Normales hace énfasis y se profundiza en el dominio de la disciplina y su didáctica desde diversas perspectivas teórico-metodológicas que permiten reducir las brechas entre la formación de docentes en la Escuela Normal y su desarrollo profesional en la educación obligatoria; en otras palabras, un buen porcentaje de egresados de las normales superiores, regresa a su alma mater en la misma especialidad, después de haber ejercicio por un tiempo la profesión en la educación básica. Esta mediación simbólica les permite tener sensibilidad a los problemas del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas, y las estrategias para el abordaje de los problemas de la formación.

En relación al número de años de experiencia respecto a la asignatura impartida, el 52% tiene menos de 10 años de experiencia, y el 86% considera que su formación es acorde al perfil profesiográfico del programa, lo que podría favorecer rangos de construcción de expertisse, y por lo tanto una apertura a la innovación.

También se identifican tradiciones en relación con la formación de profesionales que acompañen a los concursos de Matemáticas, aún permea una tradición de trabajo individual y poca proclividad al desarrollo de proyectos colegiados inter y transdiciplinarios.

EL APRENDIZAJE SOCIAL DE LA PROFESIÓN COMO PROCESOS INTRA E INTERSUBJETIVOS

En este apartado centraremos la atención sobre la percepción de los formadores sobre las características del programa de formación en función del perfil de egreso. Para la mayoría de los docentes que participan en el programa la estructura del plan de estudios es de excelente a muy buena. También más del 75% considera de excelentes a muy buenas las competencias que se espera desarrollar, y los contenidos que se ofrecen.

Cabe señalar que el 22% considera algunos contenidos repetitivos, y en algunas entrevistas así se mencionó. Faltaría discutir con los docentes de Matemáticas aún más el momento en que un contenido matemático funciona como herramienta para resolver problemas, particularmente en las asignaturas de los primeros semestres y en las actividades de vinculación intracurricular, y en qué momento el mismo contenido funciona como objeto de reflexión, de conceptualización, e incluso en la construcción axiomática. También un porcentaje muy bajo en las entrevistas refiere a que los contenidos del primer semestre son bajos.

En los casos de las asignaturas del Trayecto formativo Formación para la enseñanza y el aprendizaje, el Plan de Estudios promueve que el estudiante de educación normal desarrolle un pensamiento científico y una visión holística del fenómeno educativo, que lo conduzcan a reflexionar, investigar y resolver problemas de manera permanente e innovadora. Sin embargo, un porcentaje importante de formadores (30%) siguen trabajando de manera aislada, y la vinculación curricular la realizan, cuando así lo consideran pertinente, en las actividades propuestas al interior de su aula, y en caso de que tengan lugar, se realizan con los docentes de las asignaturas del trayecto formativo Práctica profesional.

En relación a las propuestas que se hacen en los programas sobre las actividades centradas en el estudiante, la mayoría de los docentes recurre al aprendizaje basado en problemas, al aprendizaje basado en casos enseñanza, al aprendizaje colaborativo y al aprendizaje autónomo e individual y en menor medida (40%) al aprendizaje del servicio, a la detección y análisis de incidentes críticos y a los estudios de caso. Esto puede entenderse a la luz de las culturas de las matemáticas escolares, que también sirven como mediación para la percepción y, por lo tanto, la aceptación de las propuestas curriculares.

Con respecto a las prácticas, se recupera una visión en torno a su dinamicidad, ya sea en la creación de ambientes formativos, en la instalación de dispositivos de formación, e incluso en los intercambios intersubjetivos, no desprovistos de tensiones. En algunos casos, se recupera información que es insumo a las asignaturas del trayecto formativo Bases teórico-metodológicas para la enseñanza.

Los formadores adoptan diversas posturas de docencia reflexiva para que los futuros maestros logren "descubrir, desvelar y articular su actuación con la visión del aprendizaje …de esa reflexión" (Brockbank, 2002, p. 88). Los saberes para la docencia se obtienen por un sujeto epistémico que es consciente de sí, de las relaciones que establece con sujetos posicionados en un contexto en el que se inscribe un dispositivo, y de sus saberes como construcciones colectivas que tienen implicaciones diversas.

Se identifican tres perspectivas metodológicas de los formadores de formadores que adoptan esa postura reflexiva: 1. la docencia como aprendizaje social; 2. Los procesos intrasubjetivos; y 3. Los procesos intersubjetivos de acompañamiento –la devolución, la contención, la expectativa sobre el futuro académico.

Primera perspectiva metodológica: la docencia como aprendizaje social

Se identifican tres posturas que dependen del acento que se pone a ciertos elementos constitutivos del sistema: *el aprendizaje de la profesión situado, el aprendizaje mediado y las comunidades de aprendizaje*.

En el aprendizaje de la profesión situado se enfatiza el contexto donde tiene lugar la relación de los sujetos que participan en una situación real o virtual. Permite la contextualización de los saberes, da significados múltiples al conocimiento, y permite su integración. Un ejemplo son las prácticas de campo y algunos proyectos de intervención: los futuros docentes son colocados en escenarios reales, problemáticos, para que "vivan" experiencias de formación alternativas a las de la escuela normal.

El aprendizaje mediado es el que se lleva a cabo cuando se ha diseñado un dispositivo de formación, como la observación o la práctica profesional, en el que el futuro docente se coloca en escenarios reales, pero su actuar, su responsabilidad, y su investidura, y por ende sus saberes, están "mediados" por un actor institucional –tutor, asesor, directivo, e incluso estudiantes.

El aprendizaje en comunidades de aprendizaje tiene lugar en proyectos institucionales amplios, donde el futuro docente "se inicia" en la comunidad, y en esa iniciación adquiere saberes y competencias profesionales. Un ejemplo son los proyectos de equipos de investigación en el que participan jóvenes estudiantes como "ayudantes de investigación".

Segunda perspectiva metodológica: los procesos intrasubjetivos

Se identifican tres posturas de acercamiento al sí mismo de la docencia, que permiten una mayor conciencia de la práctica profesional personal: la autonomía, la autorregulación, la construcción del proyecto de profesional.

La autonomía es la posibilidad que tiene el sujeto de verse a sí mismo, de considerar su actuar en relación con los demás, y no de manera individual. Es una forma de gestión pedagógica, en la que el sujeto es consciente de que su práctica impacta no sólo en los aprendizajes de los niños, sino en el aprendizaje de los demás actores educativos y de la institución. La interlocución es lo que posibilita identificar el impacto del sí.

La autorregulación es cuando el futuro docente “sabe” en qué circunstancias su silencio, o su intervención generan ciertos tipos de aprendizajes, por lo que debe “contenerse” de reaccionar de manera poco reflexiva.

La construcción del proyecto profesional es cuando el docente es consciente de sus propias intenciones, expectativas y deseos, más allá del marco normativo e institucional en el que se inscriben sus prácticas.

Tercera perspectiva metodológica: los procesos intersubjetivos deacompañamiento

Metodológicamente los procesos intersubjetivos tuvieron su concreción en el acompañamiento reflexivo, alimentado por el diálogo, los procesos motivacionales en la interacción, y la socialización de las experiencias.

Se identificaron tres tipos: la recuperación de la pregunta, la contención y la expectativa sobre el futuro académico.

La recuperación de la pregunta es el proceso por el cual el formador recupera la pregunta del estudiante normalista sobre lo que debe hacer para satisfacer el “deseo” del formador, y le actualiza la pregunta sobre la posibilidad del aprendizaje de los niños y/ o adolescentes.

La contención es cuando el formador ayuda al estudiante a establecer los límites de su propia subjetividad, frente a la subjetividad de niños, tutores y del asesor mismo.

La expectativa sobre el futuro académico es cuando el formador ayuda al futuro docente a construir un proyecto profesional desde las expectativas que él tiene de la profesión misma.

CONCLUSIONES

En general, es posible afirmar que los docentes están de acuerdo con la propuesta curricular de esta licenciatura, sin embargo, reconocen que sigue prevaleciendo una cultura matemática centrada en el contenido y poco en la construcción de ambientes de aprendizaje, relacionado con la adaptación que realizan los docentes en formación, quienes consideran distintas restricciones, como por ejemplo, al estudiante de secundaria con el que van a practicar, los docentes titulares que están a cargo del grupo, los docentes que lo están formando y el currículo de la escuela normal.

Este estudio permitió identificar en qué medida las trayectorias de los formadores de formadores impactan en la percepción del currículo y en su implementación, particularmente en la toma de decisiones, como el trabajo colegiado, o la evaluación formativa mediante el portafolio de evidencias, los conocimientos de los formadores de profesores están relacionados en primer lugar con la vinculación curricular, en término de la gestión necesaria para la vinculación con la educación básica y con otros formadores.

Se recuperó la intención de mirar a la formación de profesores desde tres perspectivas metodológicas: primero a la docencia como aprendizaje social (aprendizaje situado de la profesión, aprendizaje mediado y comunidades de aprendizaje); como segundo elemento, los procesos intrasubjetivos (perspectiva de autonomía, autorregulación y construcción del proyecto de vida profesional), y por último los procesos intersubjetivos de acompañamiento (recuperación de la pregunta, la contención y la expectativa sobre el futuro académico).

Por tratarse de un estudio descriptivo de corto tiempo, no fue posible identificar redireccionamientos en las trayectorias profesionales, o modificaciones reales en las concepciones de lo que significa formar docentes de matemáticas para la educación secundaria. Esta es una veta que vale la pena explorar, relacionados con el saber para la transposición didáctica con los que los futuros docentes fundamentarán sus prácticas y los saberes de las matemáticas escolares.

Referencias

Ardoino, J. (1993). El análisis multirreferencial. *Revista de la Educación Superior, 87*(22). México: ANUIES.

Ardoino, J. (2006). *Complejidad y Formación: Pensar la educación desde una mirada epistemológica*. Buenos Aires: Novedades Educativas.

Avalos-Rogel, A. (2019). *Los saberes y las prácticas exitosas de los formadores de formadores*. Informe de investigación. México: ENSM.

Avalos-Rogel, A., Montes, L., Macías, M. y Parada, S. (2017). Capítulo 3. Los saberes profesionales de los formadores de las escuelas normales. Un acercamiento a su naturaleza epistemológica. López, B. (2017). *Educando en la transversalidad para un conocimiento multidisciplinario*. Oaxaca: Universidad del Papaloapan.

Brockbank, A. y McGill (2002). *Aprendizaje reflexivo en la Educación Superior*, Madrid, Morata.

Carrillo, J.; Climent, N.; Contreras, L. C.; Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Mathematics Teacher Specialized Knowledge. In: *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mmathematics, 8th*, Antalya. CERME 8, Antalya, Turquía: CERME 8, 29852994.

D.O.F. (2018). *Acuerdo número 14/07/18 por el que se establecen los planes y programas de estudio de las licenciaturas para la formación de maestros de educación básica*. México, Secretaría de Gobernación.

Pascual, M. I., Montes, M. y Contreras, L. C. (2019). Un acercamiento al conocimiento del formador de profesores de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX*. 473-482

Soto, M. y Aguayo, L. M. (2020). *Enseñar a enseñar Matemáticas. Un recorrido de estudio e investigación para la formación de profesores*. Zacatecas: UPN- Taberna literaria editores.

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características. *Enseñanza de las Ciencias, 36* (2), 105-123.

EL CONOCIMIENTO DEL CURRICULUM DE LOS FORMADORES DE DOCENTES DE MATEMÁTICAS, EN SU ROL DE DISEÑADORES

Knowledge of the curriculum of mathematics teacher trainers, in their role as designers

Hernández-Escobar M.[a]; Avalos-Rogel A.[b]

[a, b] Escuela Normal Superior de México

Temática: 2 – MTSK del formador de profesores

Resumen. En este estudio, se indagaron los conocimientos de los formadores de futuros docentes al participar en el diseño del currículum de la formación inicial, a partir de la discusión del modelo denominado Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. Se parte de un contexto de instituciones formativas. Se problematiza la transparencia del conocimiento del curriculum de los formadores y se reconoce su rol activo en diferentes niveles cuando están como diseñadores. Los primeros resultados apuntan a que los formadores poseen lógicas para la organización de los contenidos matemáticos al interior de un programa formativo: contenidos que son prerrequisitos de otros, contenidos que presentan rupturas a conocimientos previos. Se identificó persistencia y robustez en la reflexión sobre los contenidos de la educación básica en las asignaturas de acercamiento a la práctica docente.

Palabras clave. Conocimiento de Formadores, Curriculum, Formador de Profesores, MTSK.

Abstract. In this study, the knowledge of teacher trainers when they participate in the design of the initial training curriculum, based on the discussion of the model called Specialized Mathematics Teacher Knowledge. It starts from a context of training institutions. The transparency of knowledge of the curriculum is problematized and the active role of trainers is recognized at different levels when they are as designers. The first results suggest that trainers have logic for the organization of mathematical content within a bachelor program: content that is prerequisite for others, content that presents a break in previous knowledge. A persistence and robustness of the so-called organization is identified in the reflection on the contents of basic education in the subjects of approach to teaching practice.

Keywords. Trainers Knowledge, Teacher Trainer, MTSK, curriculum.

INTRODUCCIÓN

El conocimiento de los formadores de docentes de matemáticas sobre el curriculum está considerado en el modelo DMTSK (Pascual, Montes y Contreras, 2019), y está inserta en una línea más amplia sobre el pensamiento del profesor. Shulman (1987) ya había considerado como conocimientos de los maestros de matemáticas el conocimiento del curriculum "Representado por la gama completa de programas diseñados para la enseñanza de materias particulares y temas en un nivel dado, la variedad de materiales de instrucción disponibles en relación con esos programas, y el conjunto de características que sirven como indicaciones y contraindicaciones para el uso de material de programa o plan de estudios en particular en circunstancias particulares" (p.10). Este conocimiento del profesor se ha considerado como indubitable, y por ello, el conocimiento del curriculum ha formado parte de los programas de estudio de la formación inicial de docentes.

Hernández-Escobar M., & Avalos-Rogel A. (2021). El conocimiento del curriculum de los formadores de docentes de matemáticas, en su rol de diseñadores. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 162–166). Congresseme.

Ahora bien, de manera homóloga, nadie pondría en duda que el conocimiento del curriculum de la formación también forma parte de los conocimientos del formador de docentes. Pero este supuesto indubitable vuelve transparente el problema de investigación e impide ver en qué consiste dicho conocimiento ¿Cuál es el estatus epistémico de dichos conocimientos? En particular cuando hay de por medio el estudio de contenidos matemáticos, como en el caso de los programas de formación de maestros que no tienen antecedentes de estudios universitarios de matemáticas ¿Cómo juegan otros contenidos, como los contenidos de las matemáticas escolares y los conocimientos pedagógicos del contenido? ¿Qué tensiones y problemáticas del conocimiento del formador de docentes surgen del planteamiento curricular?

Este estudio tiene como propósito identificar los conocimientos de los formadores de formadores que participan en el diseño de un programa de formación inicial de futuros docentes de matemáticas de la educación secundaria, y forma parte de un proyecto de investigación más amplio sobre la caracterización de los conocimientos del formador de formadores que lleva a cabo la Red Iberoamericana de Investigación sobre el Conocimiento Especializado del Profesorado de Matemáticas, de la que dos de los autores formamos parte.

REFERENTES CONCEPTUALES

Se discute el modelo propuesto por Carrillo et al. (2013) denominado Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), pues pone de relieve qué aspectos del MTSK se movilizan en la formación de profesores y qué aspectos pueden completarlo para caracterizar el Conocimiento Especializado del formador de formadores de Matemáticas (DMTSK).

El MTSK consta de seis subdominios (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz Catalán, 2013), tres referentes al conocimiento matemático (MK): conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de la estructura matemática (KSM) y conocimiento de la práctica de la matemática (KPM); y otros tres referentes al conocimiento pedagógico de contenido (PCK): conocimiento de las características de aprendizaje de matemáticas (KFLM), conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de matemáticas (KMLS).

Las problemáticas curriculares de la formación en México son tensiones que se derivan del desarrollo de competencias genéricas en donde el conocimiento matemático y la resolución de problemas forma parte de lo que todo ciudadano debe saber (MK) y saber hacer (KPM), las competencias profesionales ligadas a los saberes de la profesión docente y las disciplinares que se relacionan con el conocimiento matemático (Kot y KSM) y su didáctica (PCK).

METODOLOGÍA

Para esta investigación se siguió un método cualitativo, se llevaron a cabo entrevistas semiestructuradas a 18 formadores, con el fin de recuperar los significados que ellos atribuyen al curriculum de la formación inicial de profesores de matemáticas, adoptando un enfoque top-down y bottom-up (Grbich, 2003), la aplicación de un cuestionario daba elementos generales y un mapeo para identificar aspectos específicos que convenía abordar con informantes, que eran diseñadores de los programas de los planes que pretenden desarrollar tres tipos de competencias: genéricas, profesionales y disciplinares, en este caso las Matemáticas.

El trabajo con los informantes daba pie a explorar aspectos que podían identificarse en una parte de la población de formadores a través del diseño de los espacios curriculares que están organizados en cuatro trayectos formativos: Bases teórico-metodológicas para la enseñanza, Formación para la enseñanza y el aprendizaje, Práctica profesional y Optativos [D.O.F., 2018]. La finalidad de esta investigación fue identificar el conocimiento del curriculo en el abordaje de contenidos de matemáticas que se lleva a cabo en el trayecto Formación para la enseñanza y el aprendizaje y en algunos trayectos Optativos como el de Matemáticas Superiores o el de Matemáticas financieras.

LA TRANSPARENCIA DEL CURRICULUM DE LA FORMACIÓN INICIAL

Para los formadores de formadores el curriculum de la formación es vivido como norma, y como tal, pauta un comportamiento al interior de las instituciones, la gestión académica del programa, la distribución de los espacios, de los tiempos y de los materiales de instrucción disponibles, pauta el lugar otorgado al practicum y a la vinculación interinstitucional con la educación básica, y aspectos que sirven como indicaciones y contraindicaciones para su desarrollo.

Simultáneamente, el curriculum para el formador es un proyecto educativo, que es puesto ante los ojos de los estudiantes normalistas como una forma de identificación del nivel y de construcción identitaria. Es un referente que pauta la trayectoria para la formación. Y por lo tanto es fijo, acabado e incuestionable.

Pero también, un aspecto una posibilidad de diseño (Gimeno, 1988): en la adecuación curricular para el diseño de secuencias formativas, en la actualización de los programas, y en el diseño y construcción curricular, cuando se plantean nuevas políticas educativas.

Los docentes consideran que las matemáticas es un contenido fijo, acabado, que no tiene desarrollo para el fututo: "Cuando hablas en estadística de medidas de tendencia central, todo mundo sabe a qué te refieres. 2 x 2 siempre será 2 x 2", afirmaba uno de los formadores. Sin embargo algunos contenidos sí se modifican gracias al impacto de los contenidos matemáticos escolares del nivel para el cual están formando, de tal suerte que los conocimientos y procedimientos matemáticos de los formadores se ven modificados. Un maestro comentaba: "¿Series de Taylor? Para qué, eso está muy complicado, hay que ver lo que se pide en la prepa, por si tienen que dar clase ahí"

Por otro lado, los contenidos matemáticos extremedamente novedosos, y que son estudiados por los formadores de docentes en virtud de que son la norma, son incorporados al bagaje de conocimientos. Esto sucede también con los componentes curriculares relacionados con el conocimiento pedagógico del contenido, el cual es mucho más flexible en su incorporación a los conocimientos del currículo.

LA ORGANIZACIÓN DE LOS CONTENIDOS MATEMÁTICOS AL INTERIOR DEL CURRRICULUM

En este estudio los formadores poseen lógicas para la organización de los contenidos matemáticos al interior de un programa formativo. Se identificaron contenidos que son prerrequisitos de otros, contenidos que se acumulan a los anteriores y contenidos que presentan rupturas a conocimientos previos.

Algunos docentes consideran que el conocimiento matemático es acumulativo, esto es, que es que se tiene que tener un cúmulo de conocimientos antes de abordar un nuevo contenido. Un formador afirmaba que "Los alumnos deben dominar la aritmética antes de entrar al álgebra, particularmente las cuatro operaciones fundamentales".

Esto llevó a entender la idea de "conocimientos previos" como aquellos conocimientos que ellos tenían que dar como requisito para el abordaje del tema.

También consideran que un cierto contenido es prerrequisito para que se aborde el siguiente “No puedes ver la división si no has abordado antes la multiplicación”.

Se puede identificar cierta persistencia de los conocimientos disciplinares de los formadores, pues se mantienen a lo largo de las generaciones; de la misma manera también hay persistencia en el espacio, pues son conocimientos compartidos por docentes de distintas normales del país. Desde esos conocimientos miran e interpretan los estándares, a pesar de los cambios curriculares y de los enfoques de enseñanza de las matemáticas y de la formación.

También hay contenidos en los que prevalece una lógica de las “rupturas epistémicas” dentro de los propios contenidos en los que se están formando, incluyendo la dialéctica en la que contenidos son considerados como herramientas (para la resolución de problemas matemáticos, pero también para la resolución de problemas de enseñanza) y otros contenidos son considerados como objetos de estudio. Esto permite una vinculación con otras áreas del conocimiento de los procesos pedagógicos y psicológicos del aprendizaje de las matemáticas.

CONCLUSIONES

La percepción fue una constante que se encontró en las respuestas de muchos formadores a partir de los conocimientos que ellos tenían de las características del programa, sin embargo también hay formadores que su trabajo lo realizan en función del perfil de egreso de su formación.

Se concluye que los saberes profesionales de los formadores de formadores son transparentes: no se les ha nombrado, ni sistematizado, sobre todo en el caso de los que ya tienen muchos años de servicio y cuentan con un dominio del conocimiento matemático. Sin embargo, los saberes metodológicos ligados a la docencia reflexiva son argumentos especializados y, por lo tanto, están instalados en el dominio de lo teórico.

En general, es posible afirmar que los docentes están de acuerdo con la propuesta curricular de esta licenciatura, particularmente les congratula que las matemáticas ocupen un lugar central en el currículo. Sin embargo, ellos mismos reconocen que sigue prevaleciendo una cultura matemática centrada en el contenido y la enseñanza magistral, y poco en la construcción de ambientes de aprendizaje.

Por tratarse de un estudio descriptivo de corto tiempo, no fue posible identificar redireccionamientos en las trayectorias profesionales, o modificaciones reales en las concepciones de lo que significa formar docentes de matemáticas para la educación secundaria. Esta es una veta que vale la pena explorar.

Referencias

Arroyo, M. J. (2013). *Educación superior en América latina: reflexiones y perspectivas en Matemáticas*. Bilbao: Universidad de Deusto.

Avalos-Rogel, A., Montes, L., Macías, M. y Parada, S. (2017). Capítulo 3. Los saberes profesionales de los formadores de las escuelas normales. Un acercamiento a su naturaleza epistemológica. López, B. (2017). *Educando en la transversalidad para un conocimiento multidisciplinario*. Oaxaca: Universidad del Papaloapan.

Carrillo, J.; Climent, N.; Contreras, L. C.; Muñoz-Catalán, M. C. Mathematics Teacher Specialized Knowledge. In: *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mmathematics, 8th*, 2013, Antalya. CERME 8, Antalya, Turquía: CERME 8, pp. 2985-2994.

Chauvot, J. (2009). Grounding practice in scholarship, grounding scholarship in practice:

Knowledge of a mathematics teacher educator–researcher. *Teaching and Teacher Education, 25*(2), 357-370.

D.O.F. (2018). *Acuerdo número 14/07/18 por el que se establecen los planes y programas de estudio de las licenciaturas para la formación de maestros de educación básica*. México, Secretaría de Gobernación.

Gimeno; J. (1988). El currículum modelado por los profesores. En: *El currículo una reflexión sobre la práctica*: Morata P.p. 1-40

Grbich, F. G. (2003). New approaches in social research. Londres: SAGE.

Pascual, M. I., Montes, M. y Contreras, L. C. (2019). Un acercamiento al conocimiento del formador de profesores de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 473482). Valladolid: SEIEM.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. Harvard *Educational Review, 57* (1),1987, pp. 1-22..

COMUNICAÇÕES ORAIS

TEMÁTICA 3

MTSK EM DISTINTOS TÓPICOS E ETAPAS

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA EN EL TEMA DE ECUACIÓN CUADRÁTICA VISTO DESDE EL USO DE EJEMPLOS

Specialized Knowledge of the math teacher in the topic of a quadratic equation seen from the use of examples

Sánchez-Acevedo, N. [a]; Sosa-Guerrero, L. [b]

[a] Universidad de Huelva; [a] Universidad Alberto Hurtado; [b] Benemérita Universidad Autónoma de Zacatecas

Temática: 3 – MTSK en diferentes temas y etapas

Resumen. El conocimiento del profesor de Matemáticas es un área que ha sido objeto de investigación desde hace décadas; cada vez con un mayor aporte a la caracterización y comprensión del conocimiento necesario para la enseñanza. Adoptamos el Modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) para caracterizar el conocimiento de una profesora cuando usa ejemplos para enseñar la resolución de ecuaciones cuadráticas completas e incompletas. Nos apoyamos en una metodología cualitativa, bajo un diseño de estudio de casos instrumental y los análisis se realizan a través de observaciones de aula. Dentro de los principales resultados encontrados evidenciamos un alto conocimiento de los temas (KoT) en relación con procedimientos y algunos indicios de conocimiento sobre KFLM. Finalizamos, con algunas proyecciones del trabajo futuro en relación con los subdominios del modelo e interconexiones entre estos.

Palabras clave. Conocimiento especializado, Profesor de Matemáticas, Ejemplos, Ecuación cuadrática

Abstract. The knowledge of the mathematics teacher is an area that has been the object of research for decades; each time with a greater contribution to the characterization and understanding of the knowledge necessary for teaching. We adopt the Mathematics Teacher Specialized Knowledge (MTSK) Model to characterize a teacher's knowledge when she uses examples to teach solving complete and incomplete quadratic equations. We rely on a qualitative methodology, under an instrumental case study design and the analyzes are carried out through classroom observations. Among the main results found, we evidenced a high knowledge of the topics (KoT) in relation to procedures and some indications of knowledge about KFLM. We finalize the conclusions, with some projections of future work in relation to the subdomains of the model and interconnections between them.

Keywords. Specialized knowledge, Math teacher, Examples, Quadratic equation

INTRODUCCIÓN

Los ejemplos juegan un rol relevante en la enseñanza de conceptos, procedimientos y como ejercicios que permiten una familiarización con ideas nuevas y el desarrollo de procedimientos elementales (Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep, 2009). Con mayor o menor intencionalidad, son uno de los recursos más usados por profesores en la enseñanza. Su uso está condicionado a la finalidad y los objetivos que se pretenden desarrollar en relación con el contenido matemático y para ello, se requiere de un conocimiento sobre qué ejemplos pueden ser más idóneos en relación con las características y los objetivos de enseñanza (Huckstep, Rowland y Thwaites, 2002).

Sánchez-Acevedo, N., & Sosa-Guerrero, L. (2021). Conocimiento especializado del profesor de matemática en el tema de ecuación cuadrática visto desde el uso de ejemplos. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 168–175). Congresseme.

El conocimiento sobre los ejemplos y su naturaleza es relevante para la enseñanza y la intencionalidad que se les da a esos ejemplos (Figueiredo, Contreras y Blanco, 2012). Es por ello, que explorar el conocimiento especializado del profesor de Matemática (Carrillo *et al*., 2018) en relación con el uso de ejemplos para la enseñanza y su uso es una tarea importante.

De acuerdo con lo anterior, es que nos proponemos como objetivo identificar y caracterizar el conocimiento especializado que moviliza una profesora de Matemática en la enseñanza del contenido de resolución de ecuaciones cuadráticas. Trataremos de mostrar este conocimiento a partir de evidencias empíricas, derivadas directamente de las observaciones de su práctica.

REFERENTES TEÓRICOS

Desde el trabajo pionero de Shulman (1986), en que hace patente la importancia del Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC), diversos investigadores se han interesado en comprender el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas para la enseñanza, Ball, Thames y Phelps (2008), Blaumert y Kunter (2013), Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep (2009), entre otros.

En particular, desde el modelo MTSK, creemos que el conocimiento del profesor tiene un carácter especializado, tanto desde lo matemático como de lo didáctico, con base en el contenido matemático (Scheiner et al., 2019). El MTSK *(Mathematics Teacher's Specialised Knowledge)* (Carrillo et al., 2018), nos aporta una mirada analítica del conocimiento especializado que se moviliza en el aula de Matemática (Rojas, Flores y Carrillo, 2015).

El MTSK está organizado en tres dominios. El Conocimiento Matemático (MK), el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) y un tercer dominio, el de las creencias (de las matemáticas y enseñanza y aprendizaje hacia las matemáticas) (Figura 1)

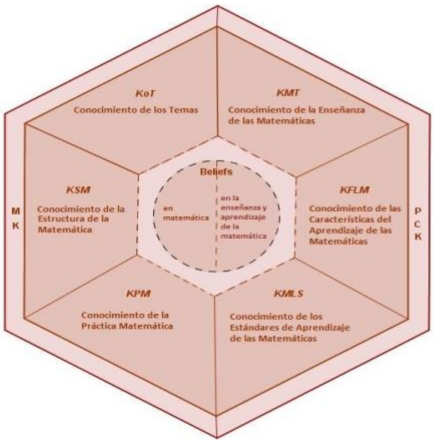


Figura 1. Modelo MTSK (Carrillo et al., 2018)

El dominio MK (Mathematical Knowledge) está compuesto por tres subdominios: Conocimiento de los Temas (KoT), Conocimiento de la Estructura de la Matemáticas (KSM), y Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM).

Por su parte, el PCK (Pedagogical Content Knowledge) se compone del Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las matemáticas (KFLM), y Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS).

Algunas consideraciones sobre los ejemplos

Los ejemplos en clase de Matemáticas son un recurso relevante en la enseñanza de las Matemáticas y como parte del conocimiento del profesor de Matemática. En este trabajo, compartimos la propuesta de Leinhardt (2001), quien plantea que un ejemplo es parte importante de una buena explicación, que en nuestro caso se centra en las explicaciones de la profesora a través del uso de ejemplos. La elección de los ejemplos y el conocimiento que se moviliza a partir de estos, no es una tarea trivial, de hecho, los ejemplos presentan ciertas características distintivas y su conocimiento dotaría de riqueza en relación con su uso e intencionalidad en clase. Una de estas características, es la variación, aspecto que propone que el aprender algo, consiste en hacer nuevas distinciones; simultáneamente, discernir algo de, y relacionarlo con, un contexto (Marton y Booth, 1997). Posteriormente Mason y Watson (2005) lo ampliaron a la idea de dimensión de variación posible. Esta variación, es tanto más útil y visible en el aprendizaje de algún concepto, si se hace uso de secuencias de ejemplos para que la atención se focalice en los aspectos críticos de los ejemplos relevantes (Bills et al., 2006). Además, de la variación, los ejemplos presentan otra característica, que es la noción de transparencia a una representación, la cual se relaciona con un concepto cualquiera. En términos simples, una representación *transparente* es aquella que representa lo que se quiere representar y una representación opaca, es aquella que enfatiza algunos aspectos de la representación e invisibiliza otros.

METODOLOGÍA

Nos situamos desde un paradigma interpretativo, bajo una aproximación cualitativa. El diseño de investigación es un estudio de caso de tipo instrumental (Stake, 1999), aspectos que nos permiten adentrarnos en la comprensión del conocimiento de una profesora de Matemática de secundaria en el tema de ecuación cuadrática. El caso en cuestión, de seudónimo Jenny, es una profesora de Matemáticas y Física, con 5 años de experiencia con estudiantes de entre 14 a 18 años de Chile.

Este trabajo, es parte de la investigación doctoral en curso (del primer autor), denominada *Conocimiento Especializado de una profesora de Matemática en la enseñanza del tema de ecuación y función cuadrática al hacer uso de ejemplos*, la cual se encuentra en proceso de análisis de los resultados. Las etapas de análisis comprendidas en la investigación se muestran en la Figura 2, a partir de los acercamientos que se realizan en el análisis de los datos.

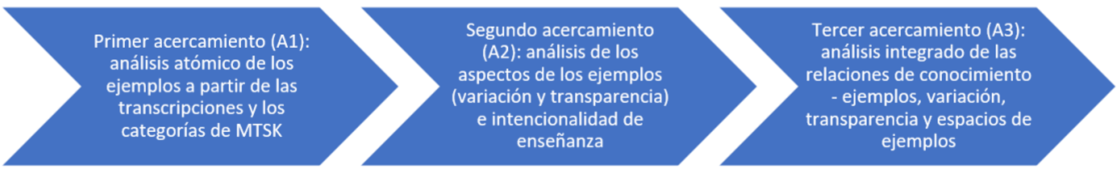


Figura 2. Etapas de análisis de la investigación

La recolección de información se ha llevado a cabo a través de 12 videograbaciones de aula; de las cuales se realizaron las respectivas transcripciones y la observación ha sido no participante (Flick, 2015) complementando éstas, con notas de campo. La información que se ha recogido de las grabaciones de aula (Tabla 1) se complementará con entrevistas a la profesora que nos permitirán corroborar indicios de conocimiento al usar ejemplos para la enseñanza.

Tabla 1. Número de la clase y contenido tratado del tema de ecuación cuadratica

N° de la clase	Contenido
1	Repaso de técnicas de factorización
2	Coeficientes de una ecuación cuadrática. Resolución de ecuaciones cuadráticas
3	Ecuaciones cuadráticas. Identificación de coeficientes y técnicas de factorización
4	Resolución de ecuaciones cuadráticas por medio de fórmula general
5	Discriminante de una ecuación cuadrática y propiedades de raíces
6	Aplicaciones de las propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática
7	Aplicaciones de uso de la ecuación cuadrática

Aquí, presentamos los resultados del análisis realizado (primer acercamiento, Figura 2) de una de las clases (clase 2), considerando los aportes en relación con las evidencias e indicios que se presentaron. Aun cuando no hacemos uso de codificación alguna en este trabajo, presentamos la codificación que se utiliza en la investigación doctoral. Usamos la nomenclatura [C_x,y]–[U_i-f], donde la letra **y** denota el número del episodio (ejemplo) y **x** denota en número de la clase en la que se ubica el episodio (ejemplo). Cada episodio (ejemplo), en particular, puede contener más de una unidad de información, por lo tanto, la nomenclatura U_i-f (en corchetes) denota la unidad de información que comienza en la línea i y finalizan en la línea f para cada unidad de información. Para las evidencias de conocimiento, se destaca la codificación en negrita (**[C_x,y]–[U_i - f]**) y para los indicios de conocimiento, se deja la codificación en cursiva (*[C_x,y]–[U_i - f]*).

La validación se realiza por medio de procesos de triangulación de consenso de expertos (Flick, 2015).

ALGUNOS RESULTADOS

Para mostrar los resultados de la sesión 2, hemos organizado las evidencias e indicios del conocimiento matemático y didáctico en torno al tema de ecuación cuadrática, en particular, la resolución de ecuaciones cuadráticas por medio de la técnica de factorización. La presentación de los resultados, se realiza en orden cronológico en relación con los ejemplos que usó Jenny en la sesión 2.

En la sesión 2, Jenny presenta el objetivo de enseñanza de la clase: *trabajar en la resolución de ecuaciones cuadráticas completas e incompletas*. Para ello, inicia con un repaso de la clase anterior, en la que recordó las técnicas de factorización usuales, introdujo la definición de ecuación cuadrática, junto con la identificación de coeficientes de una ecuación a partir del uso de diversos ejemplos. En la Tabla 3, mostramos los ejemplos usados por Jenny en esta sesión

Tabla 2. Número de clase y temática tratada

N°	Ejemplo	Descripción y agrupación
1	$x^2 + 3x + 2 = 0$	Ejemplos de repaso para identificar coeficientes de ecuaciones cuadráticas
2	$-3{,}2x^2 = 3x + 5$	
3	$x(x + 2) = 6(x + 5)$	
4	$(2x + 1)^2 = 0$	
5	$x^2 - 4 = 0$	Ejemplo para recordar factorización de ecuación de la forma $ax^2 + c = 0$
6	$ax^2 + bx = 0$	Ecuaciones cuadráticas estándares y o estándares de la forma $ax^2 + bx = 0$ para resolver por factorización
7	$3x^2 + 9x = 0$	
8	$3x^2 - 2x = 0$	
9	$2x^2 = 18$	

10	$2x^2 = 18x$	
11	$x^2 - 10x + 9 = 0$	Ecuaciones cuadráticas completas estándares para resolver por factorización e introducir el uso de la fórmula general
12	$x^2 - x - 6 = 0$	
13	$x^2 + 8x + 14 = 0$	

De la Tabla 2, vemos que Jenny, utilizó 13 ejemplos de acuerdo al objetivo propuesto. Se presenta acá a partir de la agrupación de los ejemplos que usa la profesora, una oportunidad de conocimiento para explorar sobre la intencionalidad y consciencia que podría tener Jenny sobre estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (KMT) en relación con la potencialidad de enseñanza al agrupar los ejemplos de manera ordenada de acuerdo al objetivo planteado. Vemos, además, que los ejemplos, están en relación con el orden de la clase, es decir, ejemplos para identificar coeficientes, ejemplos para resolver ecuaciones cuadráticas incompletas con $b = 0$, ejemplos para resolver ecuaciones cuadráticas incompletas con $c = 0$ y ecuaciones cuadráticas completas para resolver por algoritmo de factorización.

Mostramos algunos fragmentos que dan cuenta de evidencias de conocimiento de Jenny sobre los ejemplos (episodios) presentados en la clase.

En relación con el ejemplo 2 ($-3{,}2x^2 = 3x + 5$), Jenny pregunta a sus estudiantes sobre los coeficientes de la ecuación presentada, la cual no está escrita en forma estándar y los estudiantes responden $a = -3{,}2$, $b = 3$ y $c = 5$, ante esto la profesora pregunta:

P: El tres y cinco negativos ¿Por qué tiene negativo el tres y cinco? Okey Si, ¡Muy bien! Lo primero que debo hacer, el primer paso es… ordenar ¿Si? Menos tres equis a la dos… perdón es tres coma dos, menos tres equis, más cinco [Corrige] Menos cinco ¿Cierto? [Anota en la pizarra $-3{,}2x^2 - 3x - 5 = 0$]

A partir de este fragmento, vemos que Jenny muestra indicios de conocimiento sobre *KFLM* (*Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*), pues Jenny parece saber (al realizar la pregunta) que los estudiantes podrían presentar dificultades de aprendizaje, que pueden derivar en errores al identificar coeficientes de una ecuación cuadrática en forma no estándar. Asociado a este conocimiento, identificamos, también, evidencias de conocimiento en relación con **procedimientos (KoT)**, pues sabe ordenar una ecuación cuadrática expresada en forma no estándar a una estándar, y luego identificar los coeficientes de la ecuación cuadrática.

Del ejemplo 5 ($x^2 - 4 = 0$), vemos que la ecuación presentada es de tipo incompleta ($b = 0$) y se muestra en forma estándar. En este caso, la intención de Jenny con este ejemplo (y los restantes) es enseñar a resolver ecuaciones cuadráticas por el algoritmo de la factorización. Se muestra el siguiente fragmento:

P Cuatro ¿Qué aplico ahora?

E Raíz cuadrada.

P ¡Muy bien! [La profesora desarrolla el ejercicio en la pizarra] Equis ¿La raíz cuadrada de cuatro?

E dos.

P ¿Sólo dos?

E No.

P Positivo y negativo. ¿Sí? Ya ¡Perfecto! eh…quedamos en

De donde identificamos que Jenny moviliza conocimiento sobre **KoT (procedimientos-¿cómo se hace?)**, pues el algoritmo convencional para encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática incompleta de la forma $ax^2 + c = 0$ cuando aplica raíz cuadrada a ambos miembros de la igualdad para obtener las soluciones $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$. De este mismo fragmento, vemos indicios de conocimiento sobre *KFLM (fortalezas y dificultades)*, que se desprende cuando Jenny pregunta *¿sólo dos?* dada la respuesta de los estudiantes de una única solución $(x = 2)$ en la resolución de la ecuación cuadrática, es decir, podría saber que los estudiantes tienen dificultades de aprendizaje al aplicar una raíz cuadrada en una igualdad.

En el ejemplo 6 $(ax^2 + bx = 0)$; que es una ecuación cuadrática incompleta con $c = 0$, Jenny, pereciese intencionar junto a sus estudiantes, encontrar una expresión general para resolver este tipo de ecuaciones, aspecto que se presenta como una oportunidad para explorar en el KMT de Jenny sobre la intencionalidad sobre el uso de ciertos ejemplos de acuerdo a los objetivos de aprendizaje propuestos. Jenny pregunta a los estudiantes sobre el coeficiente que toma el valor cero (*¿cuál vamos a tener cero?*) respondiendo de manera errónea los estudiantes comentando que el coeficiente que valía cero era el a. A partir de esto, se muestra, el tratamiento que da Jenny en esta ecuación:

P: La c ¡Muy bien! La a no… no porque si tenemos la a ¿Qué va a pasar si tenemos la a igual cero? ¿Qué tipo de ecuación sería? Lineal de primer grado ¿Cierto? Entonces ahí ya no… nos devolveríamos ¿Sí? Entonces ahora esta… [Refiriéndose al término C de la fórmula de ecuación cuadrática] No está. Entonces sería a equis cuadrado, b equis, igual cero

A partir de este fragmento, evidenciamos conocimiento de Jenny sobre **KoT (definiciones, propiedades y sus fundamentos)**, pues la profesora conoce que, como definición de una ecuación cuadrática, es que el coeficiente del término cuadrático sea $a \neq 0$, y que en caso contrario la ecuación será de tipo lineal.

Jenny sigue el procedimiento para resolver la ecuación cuadrática planteada, realizando la factorización y llegando a las soluciones de la ecuación para $x = 0$ y $ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$ que da cuenta de evidencia de conocimiento sobre **KoT (procedimientos)**. Así mismo, y en relación con las soluciones de la ecuación cuadrática, comenta:

P Y esas serían las dos respuestas de este tipo de ecuación.

E ¿Tienen respuestas distintas?

P Sí, va a tener una con cero y la otra (…)

De donde identificamos evidencias de conocimiento sobre KoT (procedimientos-características del resultado), pues la profesora conoce de antemano que una ecuación cuadrática incompleta con $c = 0$ tiene siempre una solución igual a cero $(x_1 = 0)$ y otra que viene dada por $ax + b = 0$.

En la Tabla 3, presentamos una síntesis de las evidencias e indicios de conocimientos de Jenny movilizados a partir de los ejemplos usados en la clase 2.

Tabla 3. Número de clase y temática tratada

Dominio - Sub dominios	**Categoría - Indicadores**
MK - KoT	*[KoT-1_procedimientos]* Jenny parece conocer sobre propiedades y fundamentos relativos a la propiedad distributiva para realizar operaciones algebraicas y dejar una ecuación cuadrática igualada a cero.
	[KoT-2_procedimientos] Jenny sabe ordenar una ecuación cuadrática expresada en forma no estándar a una estándar, para luego identificar sus coeficientes.

	[KoT-3_procedimientos] Jenny conoce como procedimiento convencional que, para llegar a identificar los coeficientes de una ecuación cuadrática no estándar, se debe resolver el cuadrado de binomio aplicando la fórmula.
	[KoT-4_procedimientos] Jenny conoce que como algoritmo alternativo para encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática incompleta de la forma $ax^2 + c = 0$ se despeja y aplicar raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad.
	[KoT-5_procedimientos] Jenny conoce de antemano que una ecuación cuadrática incompleta con $c = 0$ tiene siempre una solución igual a cero ($x_1 = 0$) y otra que viene dada por $ax + b = 0$.
	[KoT_6_procedimientos] Jenny sabe que la factorización de algunas ecuaciones cuadráticas completas no solo requiere de la identificación de los factores enteros, sino que también, de condiciones de signos para una correcta factorización.
	[KoT_7_procedimientos] Jenny conoce que algunas ecuaciones cuadráticas no pueden ser resueltas por el método de factorización, haciendo necesario el uso de otro método de resolución (uso de fórmula).
	[KoT-8_procedimientos] Jenny, conoce que, como definición de una ecuación cuadrática, una condición necesaria, es que el coeficiente del término cuadrático sea $a \neq 0$, y que en caso contrario la ecuación será de tipo lineal.
MK - KFLM	*[KFLM-1_ fortalezas y dificultades]* Jenny parece saber que los estudiantes presentan dificultades que pueden derivar en errores al identificar los coeficientes de una ecuación cuadrática expresada en forma no estándar.
	[KFLM-2 fortalezas y dificultades] Jenny sabe que los estudiantes pueden cometer errores en su aprendizaje al aplicar la raíz cuadrada en ecuaciones cuadráticas incompletas con $b = 0$.

Se aprecia de la Tabla 3 que Jenny moviliza en gran medida conocimiento en relación con los procedimientos para la resolución de ecuaciones cuadráticas, lo que puede estar fundamentado por carácter de los contenidos enseñado y el foco en lo procedimental. Dentro de la misma clase, emergen indicios y oportunidades de conocimiento en relación con KMT (estrategias, técnicas, tareas, y ejemplos).

CONCLUSIONES

A partir del objetivo planteado en este trabajo y la clase analizada de Jenny (clase 2 de 12), se evidencia que el MTSK de la profesora es en gran parte sobre el KoT, específicamente en relación con los procedimientos (¿cómo se hace? ¿Cuándo puede hacerse? ¿Por qué se hace así? y características), aspecto que puede deberse al contexto y tipo de enseñanza al que tributan los objetivos de aprendizaje en Chile y la institución educativa en que se encontraba Jenny en ese momento específico. Se obtienen indicios de conocimiento de la profesora sobre KFLM, particularmente centrados en fortalezas y dificultades. Tal conocimiento, podría atribuirse al conocimiento que tiene Jenny sobre errores típicos que cometen los estudiantes cuando realizan operaciones para resolver ecuaciones cuadráticas. En este sentido, y con base en las evidencias identificadas y el análisis de este primer acercamiento (análisis atómico de una clase solo a partir de las transcripciones), el conocimiento de Jenny tiene foco en el dominio matemático, particularmente, en el conocimiento sobre procedimientos relativos a la resolución de ecuaciones cuadráticas expresadas en forma estándar y no estándar, como también, métodos de factorización para ecuaciones cuadráticas completas e incompletas.

En lo que sigue, sobre esta clase y la investigación en la que se inserta este trabajo, se están construyendo las entrevistas adecuadas para las clases y corroborar los indicios de conocimiento que han emergido en los análisis de las transcripciones de clases, aspectos que no son claramente identificables a partir de las observaciones de aula. En este sentido, la aplicación de estas entrevistas a Jenny, podría aportarnos evidencias de conocimiento en relación con el KMT y KFLM y sus posibles conexiones, por una parte, desde los aspectos de la enseñanza, como también desde el conocimiento sobre las formas de aprendizaje de los estudiantes.

Finalmente, y si bien es cierto, este trabajo presenta un pequeño aporte al total de las clases que son analizadas (12 en total), el mayor aporte viene dado a partir de elementos que son (aun) claramente visibles de la simple observación y que pretendemos rescatar de las entrevistas que realizaremos a Jenny en relación con las características de los ejemplos, variación y transparencia, como también, los espacios de ejemplos de los que se apoya Jenny y cómo estos elementos se conectan con su MTSK. Estas tres características (de las que sólo se enunciaron dos y que solo se describen en el marco de referencia), pensamos que nos podrían aportar evidencias de conocimiento suficientemente fuertes en relación con el KMT y el conocimiento que sustentaría, relevando la secuenciación de ejemplos y la variación para el aprendizaje de ecuaciones y función cuadrática.

Referencias

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Baumert, J., & Kunter, M. (2013). The COACTIV model of teachers' professional competence. En M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss, & M. Neubrand (Eds.), *Cognitive activation in the mathematics classroom and professional competence of teachers* pp. 25–48). New York, NY: Springer.10.1007/978-1-4614-5149-5.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., et al. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253.

Figueiredo, C.A., Contreras, L.C. & Blanco, L.J. (2012). La ejemplificación del concepto de función: diferencias entre profesores noveles y profesores expertos. *Educación Matemática*, *24*(1), 73-105.

Flick, U. (2015). *El diseño de la investigación cualitativa*. (Trad. Tomás del Amo y Carmen Blanco). Madrid, España: Ediciones Morata S.A.

Huckstep, P., Rowland, T. y Thwaites, A. (2002). *Primary Teachers' Mathematics Content Knowledge: What does it look like in the Clasrroom?*. Proceedings of BERA Conference. Exeter. Disponible en: http://education.pwv.gov.za/content/documents/

Rojas, N., Flores, P., & Carrillo, J. (2015). Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales. *Bolema*, *29*(51), 143-166.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). Transformation: Using examples in mathematics teaching. En T. Rowland, F. Turner, A. Thwaites, y P. Huckstep (Eds), *Developing Primary Mathematics Teaching: Reflecting on Practice with the Knowledge Quartet* (pp. 67-100). London: Sage.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). *Developing Primary Mathematics Teaching: reflecting on practice with the Knowledge Quartet*. Londres: SAGE.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J. y Pino-Fan, L. R. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(1), 153-172.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Stake, R.E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata, S.L.

CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KOT DE FUTUROS PROFESORES SOBRE LÍMITE DE SUCESIONES

Knowledge of topics (KoT of future teachers on limit of sequences

Bustos-Tiemann, C. [a]; Ramos-Rodríguez, E. [a]

[a] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Temática: 3 - MTSK en diferentes temas y etapas

Resumen. El concepto de límite de sucesiones ha sido parte de diversas investigaciones dada su complejidad en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Desde el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemática (MTSK) se lleva a cabo un estudio cualitativo a partir de la planificación de una clase introductoria sobre el tema de límite de sucesiones. El objetivo del estudio fue analizar el conocimiento de los temas (KoT) de futuros profesores sobre límite de sucesiones. Los principales resultados dan cuenta de una fenomenología de aproximación simple intuitiva en los registros verbal, gráfico y numérico. También fue posible observar un KoT congruente con lo señalado en el nuevo currículo chileno. Estos hallazgos pueden ayudar a entender con más claridad los procesos asociados a la enseñanza y aprendizaje de este concepto y propiciar su estudio a los otros subdominios del MTSK.

Palabras clave. MTSK, didáctica, matemáticas, práctica educativa

Abstract. The concept of limit of sequences has been part of several investigations due to its complexity in the teaching and learning process. From the model of specialized knowledge of the mathematics teacher (MTSK), a qualitative study is carried out based on the planning of an introductory class on the topic of limit of sequences. The aim of the study was to analyze the subject knowledge (KoT) of future teachers on the limit of sequences. The main results show a phenomenology of simple intuitive approximation in the verbal, graphic and numerical registers. It was also possible to observe a KoT congruent with that indicated in the new Chilean curriculum. These findings may help to understand more clearly the processes associated with the teaching and learning of this concept and to propitiate its study in the other subdomains of the MTSK.

Keywords. MTSK, didactics, mathematics, educational practice

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre qué es lo que debiera conocer un profesor para la enseñanza de la matemática en el aula ha dado origen a diferentes modelos. Es así como a partir de los trabajos de Shulman (1986) con el concepto de Conocimiento Pedagógico del Contenido muchos investigadores han desarrollado esta línea de investigación surgiendo así el "Knowledge Quartet" (KQ) (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005) y el "Mathematical Knowledge for Teaching" (MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008), por cuanto suponen una adaptación del modelo de Shulman al dominio de la matemática. Basándose en las ideas de los modelos anteriores, surge el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK, por sus siglas en inglés) desarrollado por Carrillo et al. (2013) en la Universidad de Huelva.

Este modelo considera dos grandes dominios, el conocimiento matemático MK y el conocimiento didáctico del contenido PCK, y dota de contenido a cada uno de estos dominios con tres subdominios y categorías internas. Además, considera las creencias de los profesores relacionadas con las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas.

Bustos-Tiemann, C., & Ramos-Rodríguez, E. (2021). Conocimiento de los temas (KoT) de futuros profesores sobre límite de sucesiones. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 176–183). Congresseme.

Este estudio estará centrado en el subdominio del conocimiento de los temas (KoT) del MK, el cual tiene por objetivo describir qué y cómo conoce el profesor de matemática los temas que va a enseñar. Se proponen cuatro categorías para caracterizar el contenido del KoT y que pueden ser utilizadas independiente del tema en el cual el profesor esté trabajando (Carrillo et al., 2018). Las categorías son: fenomenología, definiciones, propiedades y sus fundamentos, registros de representación y procedimientos.

Por otro lado, en Chile, a partir del año 2020 se ha introducido en el currículo de enseñanza secundaria, algunos conceptos del cálculo, entre ellos el de límite de sucesiones, que antes eran exclusivos para la enseñanza superior. En este contexto, los profesores en formación y en servicio chilenos se han enfrentado a considerar este tema dentro de los que debe enseñar, el que muestra ser complejo pues muchas de las dificultades que enfrentan los estudiantes son reforzadas por la manera en que el profesor de matemática introduce dichos temas (Hitt, 2003).

El objetivo de esta investigación es analizar el conocimiento de los temas (KoT) de futuros profesores sobre límite de sucesiones. Para ello, nos enmarcamos en el modelo MTSK y consideramos la planificación de una clase introductoria de este tema presentada por un grupo de futuros profesores.

MARCO DE REFERENCIA

El estudio consideró el modelo MTSK, en particular el subdominio KoT centrándose en las categorías *registros de representación* y *fenomenología*, las que, a continuación, se detallarán para el caso de límite de sucesiones.

Registros de representación

En esta categoría se incluye el conocimiento de un profesor sobre las distintas formas en que se puede representar un tema, incluyendo la notación y el lenguaje matemático asociado a dichas representaciones (Vasco et al., 2016).
Respecto del concepto de límite consideramos la propuesta para trabajar en secundaria de Blázquez y Ortega (2001) con los registros verbal (V), numérico (N), gráfico (G) y algebraico (A). En el registro verbal el límite se representa como la aproximación óptima de los valores de la sucesión. En el registro numérico, se considera como un proceso de tendencia basado en una tabla de valores e imágenes de estos. El registro gráfico permite visualizar las situaciones y realizar acercamientos por medio de los puntos de la gráfica y en el sistema algebraico aparecen los algoritmos del cálculo procedimental de límites y la definición métrica.
Cada representación destaca de diferente manera algunos rasgos del objeto matemático a estudiar, por ejemplo, para comprender el límite infinito de sucesiones, las representaciones gráficas no son suficientes, y tampoco con el apoyo de un ordenador es posible detallar su comportamiento, por ello es necesario la utilización de una representación tabular (Radillo y González, 2014).

Fenomenología

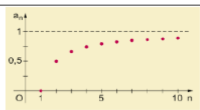
Comprende el conocimiento de profesor sobre fenómenos o situaciones asociados a los significados de un tema matemático (Freudenthal, 1983) así como aquellos que aparecen en la génesis misma del concepto. También comprende el conocimiento de los usos y aplicaciones de un tema.
Consideramos los fenómenos asociados al concepto de límite de sucesiones por Claros et al. (2016) denominados como: de aproximación simple intuitiva y retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones para el límite finito de una sucesión. Para el caso de límite infinito de una sucesión consideramos los fenómenos caracterizados por Arnal (2019)

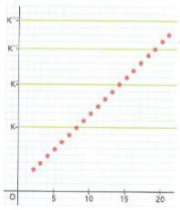
como: crecimiento (decrecimiento) intuitivo ilimitado e ida y vuelta para sucesiones de límite infinito. Explicamos a continuación cada uno de ellos:

- *Fenómeno de aproximación simple intuitiva para sucesiones con límite finito (a. s. i)*. Si consideremos k términos ordenados de una sucesión, generalmente consecutivos, $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, …, (k, a_k), vamos a caracterizar la aproximación simple intuitiva como el fenómeno observado al inspeccionar la secuencia de valores a_1, a_2, …, a_k cuando "parecen acercarse" a otro valor fijo (Claros et al., 2016).
- *Fenómeno de crecimiento (decrecimiento) intuitivo ilimitado para sucesiones con límite infinito (c. i. i / d. i. i)*. Es el fenómeno que se observa cuando los valores de la sucesión se van haciendo cada vez mayores a medida que avanzamos en ella. Como consecuencia de este fenómeno se puede intuir que la sucesión es creciente no acotada superiormente, es decir, crece ilimitadamente (c. i. i). De manera análoga d. i. i es el fenómeno que se observa cuando los valores de la sucesión se van haciendo cada vez más pequeños y es posible deducir intuitivamente que la sucesión es decreciente. Esta sucesión puede estar o no estar acotada inferiormente. En el caso de no estar acotada inferiormente es posible observar el fenómeno de decrecimiento intuitivo ilimitado (Arnal, 2019).
- *Fenómeno de retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones con límite finito (i. v. s. f)*. La seguridad de que un candidato a límite es el límite de una sucesión se consigue a través del fenómeno de retroalimentación (Claros et al., 2016). Dos procesos caracterizan este fenómeno. El primer proceso, denominado *de ida*, se produce cuando en la definición aparece la expresión: "para cada $\varepsilon > 0$, existe un número natural N". La "ida" se establece partiendo de la variable dependiente y llegando a la variable independiente. El segundo proceso, denominado *de vuelta*, se produce cuando en la definición aparece a expresión: "si $n \geq N$ se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$". En la "vuelta" se parte de la variable independiente y se acaba en la variable dependiente.
- *Fenómeno de retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones con límite infinito (i. v. s. i)*. Para este fenómeno consideraremos la definición de Linés (1983). Esta definición plantea para el límite más infinito que "la sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite "más infinito", si para cada elemento H de ℝ, existe un número natural ν, tal que es $a_n > H$, para todo $n \geq v$". El primer proceso, denominado "ida" corresponde al fragmento: "si para cada elemento H de ℝ, existe un número natural v". El segundo proceso, denominado "vuelta" corresponde al fragmento "tal que es $a_n > H$, para todo $n \geq v$". La retroalimentación se manifiesta en la observación conjunta de ambos procesos (Arnal, 2019).

Los fenómenos anteriormente mencionados hacen referencia a dos enfoques: uno intuitivo (a. s. i y c. i. i) y otro formal (i. v. s. f y i. v. s. i) presentes en la enseñanza del concepto de límite a nivel de secundaria (Arnal et al., 2020) y cada fenómeno puede introducirse usando un sistema de representación (de los cuatro mencionados anteriormente). Esto nos permite relacionar ambas categorías del KoT resultando dos posibilidades. La primera de ellas se muestra en la tabla 1, donde se articulan los sistemas de representación con los fenómenos desde el enfoque intuitivo.

Tabla 1. Subcategoría del KoT, representaciones y fenómenos para límite de sucesiones

<table>
<tr><th></th><th colspan="4">Sistemas de representación</th></tr>
<tr><th></th><th>Verbal</th><th>Numérico</th><th>Gráfico</th><th>Algebraico</th></tr>
<tr><td>a. s. i</td>
<td>En la sucesión $\left\{\begin{matrix} 0{,}6; 0{,}66; \ldots; \\ 0{,}66\ldots6\ldots; \ldots \end{matrix}\right\}$ sus términos se aproximan cada vez más al número racional $\frac{2}{3}$. Se suele decir que los términos de cada sucesión tienden o se aproximan al número $\frac{2}{3}$.</td>
<td>Sea la sucesión $a_n = \frac{2n}{n+1}$ entonces:
<table>
<tr><th>n</th><th>a_n</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>10</td><td>1,81…</td></tr>
<tr><td>100</td><td>1,98…</td></tr>
<tr><td>10.000</td><td>1,999 …</td></tr>
<tr><td>1.000.000</td><td>1,99999…</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>tiende a ∞</td><td>tiende a 2</td></tr>
</table></td>
<td>
(MINEDUC, 2021)</td>
<td>Sea $a_n = \frac{2n-3}{n+1}$ ¿es posible obtener un término de la sucesión cuya distancia a 2 sea menor que $\varepsilon = 0{,}5$, $\varepsilon = 0{,}05$, $\varepsilon = 0{,}001$?
Es decir,
¿es posible encontrar n tal que:
$|a_n - 2| < 0{,}5$;
$|a_n - 2| < 0{,}05$;
$|a_n - 2| < 0{,}001$?</td></tr>
<tr><td>c. i. i</td>
<td>A medida que n se hace mayor, los términos de las sucesiones
$a_n = n^2 + 1$;
$b_n = 2n^3 + 1$;
$c_n = 5n^4 + 2$

se hacen cada vez mayores, por lo tanto
$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$;
$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$;
$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$</td>
<td>Dando valores a n cada vez más grandes se obtiene para $a_n = n^2 + 1$ la siguiente tabla:
<table>
<tr><th>n</th><th>a_n</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>10</td><td>101</td></tr>
<tr><td>100</td><td>10.001</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>→ +∞</td><td>→ +∞</td></tr>
</table></td>
<td></td>
<td>En la sucesión $a_n = \frac{n^2-3}{n}$ se puede verificar que partiendo de:
$n^2 + n + 3 > 0;\ \forall\, n \in \mathbb{N}$
$\Leftrightarrow$
$\frac{(n+1)^2 - 3}{n+1} > \frac{n^2 - 3}{n}$
$\Leftrightarrow$
$a_{n+1} > a_n;\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

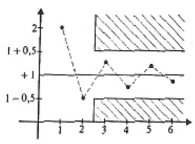
Y se podría intuir que

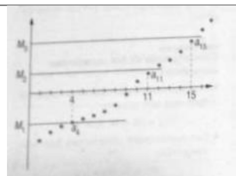
$a_n > K;\ \forall\, K \in \mathbb{R}$</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia

La tabla 2, muestra las representaciones asociadas a los fenómenos desde el enfoque formal.

Tabla 2. Representaciones asociadas a los fenómenos desde el enfoque formal

<table>
<tr><th rowspan="2">Fenómenos</th><th colspan="4">Sistemas de representación</th></tr>
<tr><th>Verbal</th><th>Numérico</th><th>Gráfico</th><th>Algebraico</th></tr>
<tr><td>i. v. s. f</td>
<td>Se dice que el límite de la sucesión $\{\boldsymbol{a_n}\}$ es el número real L y se escribe
$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = L}$
cuando para todo número real positivo $\boldsymbol{\varepsilon}$ se puede determinar</td>
<td>En este caso se explica la definición eligiendo un valor de épsilon y determinando el N correspondiente.
<table>
<tr><th>ε</th><th>N</th><th>a_N</th></tr>
<tr><td>10^{-1}</td><td>9</td><td>a_9</td></tr>
<tr><td>10^{-2}</td><td>99</td><td>a_{99}</td></tr>
</table></td>
<td></td>
<td>$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-5}{n+1} = 2$
El fenómeno de retroalimentación exige construir una función $(\mathcal{E} - N)$, es decir, la ida es desde el entorno del límite hacia la variable natural:</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>un número natural $\boldsymbol{N}$ tal que para todo $\boldsymbol{n} > \boldsymbol{N}$, se verifica que $\boldsymbol{a_n}$ pertenece al entorno de centro L y radio $\boldsymbol{\varepsilon}$ que representamos por $\boldsymbol{E(L, \varepsilon)}$.</td>
<td><table><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>10^{-50}</td><td>9…9 (50 nueves)</td><td>$a_{9\,\ldots\,9}$</td></tr></table>(Vizmanos et al., 1981)</td>
<td></td>
<td>$$\left|\frac{2n-5}{n+1}-2\right| < \varepsilon$$ Implica tomar $$N \geq \frac{7}{\varepsilon} - 1$$ Y la vuelta, desde $n > N$ permite comprobar que $$a_n \in E(2, \varepsilon)$$</td>
</tr>
<tr>
<td>i. v. s. i</td>
<td>Se dice que una sucesión de números reales positivos, tiene por límite a infinito o que tiende a infinito, cuando fijado un número positivo M tan grande como se quiera, se puede determinar un término de la sucesión tal que él y todos los que le siguen sean mayores que M</td>
<td>Para $a_n = n^2 + 1$ consideramos M=10.000 y al completar la tabla de valores buscamos un natural v de modo que $a_n > 10.000$<table><tr><td>n</td><td>a_n</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>10</td><td>101</td></tr><tr><td>100</td><td>10.001</td></tr><tr><td>…</td><td>…</td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>Luego, v=100 y para todo $n \geq v$, se tiene que $a_n > 10.000$</td>
<td>En el gráfico se parte de un número real M_2 en el eje Y y “vamos” a un número natural v, v=11 en el eje X, y “volvemos” desde $n \geq v$, por ejemplo, n=15 hacia un número real de la sucesión obteniendo $a_{15} > M_2$ (González et al., 1995).</td>
<td>En la sucesión $$a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$ Dado $M = 10.000$ $\exists v \in \mathbb{N}$ / $$a_n > 10.000$$ Si v =23 se tiene $$a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{23} > 10.000$$ Entonces la vuelta es desde n=24, ($n \geq v$) hacia un número real de la sucesión, $$a_{24} = 16.834{,}11$$</td>
</tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia

METODOLOGÍA

El estudio se enmarca en el paradigma cualitativo desde un enfoque descriptivo-interpretativo (Hernández et al., 2014). El diseño del estudio se enmarca en un estudio de casos en el cual un grupo de cuatro futuros profesores (FP) que están en su cuarto año de la carrera de Pedagogía en Matemática de una Universidad chilena. El caso se ha escogido por criterio de accesibilidad y disponibilidad.

El instrumento de recogida de datos es una planificación diseñada por el grupo de FP con el objeto de introducir el concepto de límite de sucesiones.

Para el análisis se ha empleado el análisis de contenido (Flick, 2004), considerando como unidades de análisis los párrafos o conjunto de estos con alguna idea en común. Las categorías de análisis corresponden a las categorías del KoT consideradas para el estudio, es decir, *registros de representación* y *fenomenología.*

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En la tabla 3 podemos ver la presencia/ausencia de los indicadores en la planificación de los FP. La categoría *registros de representación* (V, N, G y A) se considera en relación con la categoría *fenomenología,* en donde 1 significa presencia y 0 ausencia.

Tabla 3. Categorías presentes/ausentes

Categorías KoT																
Fenomenología y Registros de representación	Enfoque intuitivo								Enfoque formal							
	a. s. i				c. i. i (d. i. i)				i. v. s. f				i. v. s. i			
	V	N	G	A	V	N	G	A	V	N	G	A	V	N	G	A
	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Fuente: Elaboración propia

Para el análisis, primeramente, hemos observado la tarea central de la clase propuesta (Figura 1). De ella es posible evidenciar conocimiento de los FP sobre el fenómeno a.s.i en los registros numérico y gráfico. En el registro numérico, si observamos la secuencia $(0,1),(1,\frac{1}{4}),(2,\frac{1}{16}),(3,\frac{1}{64}),\ldots$ en la representación tabular, es posible intuir que, a medida que n crece, el valor de las áreas parece acercarse a un valor fijo, en este caso cero.

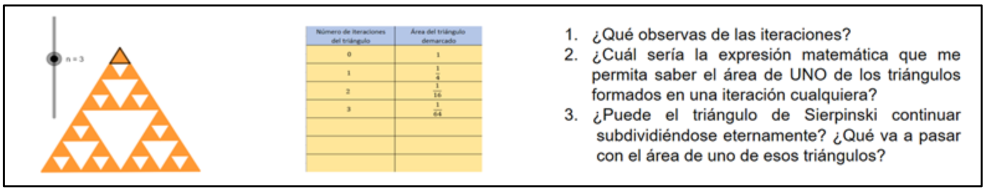


Figura 1. Tarea escolar propuesta por los futuros profesores

En el registro gráfico los FP provocan observar en sus alumnos que las áreas de los triángulos son cada vez menores después de cada iteración. Cada iteración significa unir los puntos medios de los lados y remover el triángulo del medio del triángulo original. Se puede intuir, haciendo uso de conocimientos sobre regularidades, que la sucesión de valores de las áreas de los triángulos así obtenidos se aproxima a cero a través del reconocimiento del patrón infinito. En la figura 1 el fenómeno a.s.i se presenta a través de un ejemplo lo que coincide con el resultado del estudio de Claros et al. (2016) en donde se afirma que el fenómeno a.s.i se observa en mayor medida en el formato ejemplo.

El grupo de FP propone como institucionalización del saber lo expuesto en la figura 2.

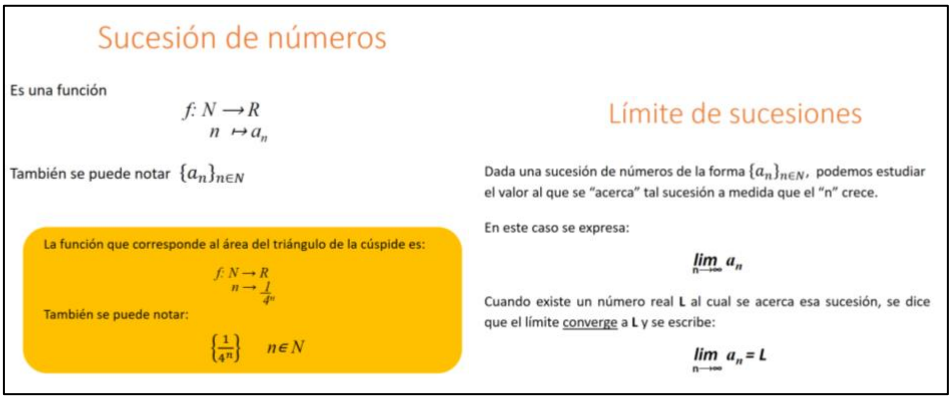


Figura 2. Institucionalización sobre sucesiones y límite de sucesiones

Se puede evidenciar que los FP consideran el concepto de límite de sucesiones también como una aproximación simple intuitiva, pero en el registro de representación verbal. En este caso la idea de convergencia la presenta el grupo de FP como un acercamiento o aproximación a un valor real L. De esta manera los FP evidencian el conocimiento de la idea de aproximación como noción intuitiva de la idea de límite de una sucesión. En este caso el fenómeno a.s.i se presenta a través de una definición lo cual, junto al formato de ejemplo, pero en menor medida, también es evidenciado por las investigaciones de Claros et al. (2016).

CONCLUSIONES

Nos hemos propuesto estudiar el conocimiento especializado del tema de FP sobre límite de sucesiones. El análisis ha permitido evidenciar conocimiento de los FP en las dos categorías del KoT consideradas, *fenomenología* y *registros de representación.*

De esta manera ha sido posible observar conocimiento de los FP sobre los fenómenos de aproximación intuitiva en los registros verbal, numérico y gráfico para el concepto de límite de sucesiones. Es de notar que el fenómeno a.s.i se evidenció a través de los formatos de ejemplo y definición, con mayor presencia de ejemplos, lo que coincide con el resultado del estudio de Claros et al. (2016) en donde se afirma que el fenómeno a. s. i se observa en mayor medida en el formato ejemplo. Por otro lado, el fenómeno c.i.i se evidencia para la sucesión de perímetros en los registros verbal y gráfico. Es posible suponer además que, debido a ser una clase de introducción al tema, se haya optado por una aproximación intuitiva como comienzo de una secuencia didáctica sobre la enseñanza del límite y de esta manera los enfoques formales no aparezcan.

Por otro lado, se observa también que la definición de límite de sucesión dada no es completa desde el punto de vista matemático, por ser una aproximación intuitiva, pero tampoco es incorrecta. Además, los registros de representación utilizados permitieron abordar el concepto de límite de diferentes formas permitiendo una fenomenología más completa.

El conocimiento de los temas (KoT) evidenciado es congruente con lo establecido en el nuevo currículo chileno en donde se sugiere el reconocimiento de patrones infinitos para acercarse de manera intuitiva a la noción de límite (MINEDUC, 2021).

Se espera que este estudio evidencie parte del conocimiento especializado del profesor de matemática en la enseñanza del concepto de límite de sucesiones y permita la reflexión sobre las categorías del KoT sobre el tema específico mencionado. Se espera además seguir construyendo las categorías asociadas a los cinco subdominios restantes del MTSK sobre el concepto de límite de sucesión y extenderlo al concepto de límite de función.

Agradecimientos

Se agradece a la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile, Proyecto FONDECYT Iniciación Nº11190553, y a la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Beca Postgrado PUCV 2021.

Referencias

Arnal-Palacián, M. (2019). *Límite infinito de una sucesión: fenómenos que organiza.* Tesis de doctoral. Madrid, España: Universidad Complutense de Madrid.

Arnal-Palacián, M., Claros-Mellado, J., y Sánchez-Compaña, M. T. (2020). Límite infinito de sucesiones en libros de texto españoles: desde 1936 hasta 2019. *PNA, 14*(4), 295-322.

Baeza, A., Córdova, C., García, M., et al. (2010). *Manual esencial estadística, probabilidad y precálculo*. Santillana del Pacífico.
Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.
Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Relime, 4*(3), 219-236.
Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Munoz-Catalan, M. C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Hasery M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquia: CERME.
Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Avila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.
Claros, J., Sánchez, M. y Coriat, M. (2016). Tratamiento del límite finito en libros de texto españoles de secundaria: 1933–2005. *Educación Matemática 28*(1), 125-152.
Flick, U. (2004). *Introducción a la Investigación Cualitativa*. Ediciones morata S.L.
Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig (2001), publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados.* Cinvestav.
González, C., Llorente, J., y Ruiz, M.J. (1995). *Matemáticas I.* EDITEX.
Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta edición). Editorial McGraw-Hill.
Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En E. Filloy, F. Hitt, C. Imaz, F. Rivera, y S. Ursini (Eds.), *Matemática Educativa: Aspectos de la Investigación Actual* (pp. 91-111). Fondo de Cultura Económica.
Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2021). *Matemática. Programa de Estudio Límites, Derivadas e Integrales para Formación Diferenciada 3º y 4º Medio*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación.
Radillo, M. y González, L. (2014). Enseñanza del concepto de límite de una función mediante sus diversas representaciones semióticas, a nivel licenciatura. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 853-861). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255-281.
Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.
Vasco, D. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de Álgebra Lineal. Un estudio de casos en el nivel universitario.* Tesis de doctoral. Huelva, España: Universidad de Huelva.
Vasco, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M.A., y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento Especializado de un Profesor de Álgebra Lineal y Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema, 30*(54), 222-239.
Vizmanos, J., Anzola, M., y Primo M. (1981). *Funciones-2 Matemáticas 2º B.U.P. Teoría y Problemas*. Editorial S.M.

CONHECIMENTO REVELADO POR PROFESSORES DA EDUCAÇÃO INFANTIL EM UMA FORMAÇÃO COM FOCO NA CLASSIFICAÇÃO

Kindergarten teacher´s knowledge revealed on a classification task

Doiche, E. [a]; Quimenton E. C. P. [a]; Almeida, A. R. [b], Ribeiro, M. [a]

[a]Unicamp; [b]PUCCamp/Unicamp

Temática: 3 – MTSK em diferentes temas e etapas

Resumo. Este trabalho discute o conhecimento revelado por oito professoras de Educação Infantil em um encontro de formação continuada. A tarefa implementada e a análise do material coletado foram realizadas na perspectiva do Mathematics Teachers' Specialized Knowledge – MTSK. O tema classificação, foi escolhido por sua importância para o desenvolvimento da percepção espacial, da resolução de problemas e da atenção à estrutura matemática. Os resultados mostram conhecimento das participantes quanto à definição e à fenomenologia da classificação, no entanto, não relacionaram tal conhecimento ao desenvolvimento do pensamento abstrato e à matemática tendo ficado em um nível de generalidades.

Palavras-chave. Classificação, Educação Infantil, MTSK.

Abstract. This work discusses the knowledge revealed by eight kindergarten teachers in a continuing education meeting. The implemented task and the analysis of the collected material were carried out from the perspective of Mathematics Teachers' Specialized Knowledge – MTSK. The classification theme was chosen for its importance for the development of spatial perception, problem solving and attention to mathematical structure. The results show the participants' knowledge about the definition and phenomenology of classification, they, however, do not relate such knowledge to the development of abstract thinking and mathematics, remaining at a level of generalities.

Keywords. Classification, Kindergarten, MTSK.

INTRODUÇÃO

O ensino da classificação pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento espacial e geométrico dos alunos, o que é essencial para o aprendizado da matemática ao longo da trajetória escolar (e.g., Clements et al., 1999).

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018), documento que orienta os currículos no Brasil indica que este tópico deve ser iniciado desde os primeiros anos da educação escolar. Nele, é referido que, na faixa etária de um ano e sete meses a três anos e onze meses, deve haver oportunidades de "explorar e descrever semelhanças e diferenças entre as características e propriedades dos objetos" (Brasil, 2018, p. 51) de forma a favorecer o desenvolvimento do raciocínio e das representações mentais (Duval, 1998), proporcionando que, a criança, ao analisar e descrever um objeto, crie uma imagem mental que possa ser descrita por meio da fala ou do desenho.

O tópico da classificação é, então, assumido como importante para o desenvolvimento do raciocínio lógico e geométrico (González, 2015) e para a resolução de problemas (Breda et al., 2011). Contudo, é importante ressaltar que embora os documentos curriculares brasileiros não estabeleçam a matemática como área na Educação Infantil (0 a 5 anos), considera-se que o profissional que atua nesta etapa educacional necessita

Doiche, E., Quimenton E.C.P., Almeida, A.R., & Ribeiro, M. (2021). Conhecimento revelado por professores da Educação Infantil em uma formação com foco na classificação. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 184–191). Congresseme.

deter um conhecimento específico para ensinar noções matemáticas fundamentais que permitam sustentar as aprendizagens nas etapas posteriores (e.g., Escudero-Domínguez et al., 2021). Assume-se também que existem especificidades do conhecimento desses professores que desenvolvem a sua prática na Educação Infantil, diferentes dos profissionais de outras etapas educacionais (Muñoz-Catalán et al., 2018).

Considerando a importância do ensino da classificação e do conhecimento do professor a ele associado, neste texto, abordamos a seguinte questão: que conhecimento especializado revelam professores de Educação Infantil no âmbito do tópico de classificação em um contexto de formação continuada?

ALGUMAS DISCUSSÕES TEÓRICAS

O ato de classificar está intimamente relacionado a observar características e relações entre os objetos para distribuí-los em grupos seguindo um método e um critério estabelecido (De Villiers, 1994). Existem essencialmente duas formas de considerar a classificação: a priori ou a posteriori. Classificar a priori, refere-se a, primeiramente, classificar e, depois, descrever as características dos elementos a fim de construir definições; classificar a posteriori, corresponde a contextos em que primeiro observa-se cada propriedade dos objetos para, então, separá-los em grupos (Guillén, 2005).

Classificar relaciona-se à percepção de semelhanças e diferenças, tanto físicas como abstratas, e, mostra-se como uma das bases do raciocínio matemático (Breda, et al., 2011) por facilitar a resolução de diferentes classes de problemas. Desse modo, diante da grande importância deste tópico, faz-se necessária uma atenção especial a como é ensinado e como se dá a compreensão de seus diversos aspectos tais como, o que é uma classificação hierárquica, quando subgrupos apresentam-se relacionados entre si de acordo com algumas propriedades, ou classificação por partição (disjunta) quando cada grupo é distinto dos outros (De Villiers, 1994).

A literatura aponta que o conhecimento do professor de matemática impacta na aprendizagem dos alunos (Charalambous & Pitta-Patanzi, 2016), assim, torna-se essencial um mais amplo entendimento sobre o conteúdo do conhecimento do professor nos diferentes tópicos matemáticos de modo a possibilitar, discutir e propor formas de melhorar a prática, a aprendizagem dos alunos e a própria formação de professores (Ferreira et al., 2017).

Para compreender esse conhecimento assume-se, aqui, a perspectiva do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK[1] (Carrillo, et al., 2018) que considera dois domínios desse conhecimento especializado: o Mathematical Knowledge (MK) e o Pedagogical Content Knowledge (PCK). O MK detalha o conhecimento do professor relacionado à matemática como disciplina científica, mas, situado no contexto educacional e o PCK refere-se ao conhecimento do professor relacionado aos processos de ensino e aprendizagem de cada conteúdo matemático a ser trabalhado em cada faixa etária e/ou etapa escolar.

Os domínios do conhecimento, MK e PCK não são hierarquizados e relacionam-se ainda com as crenças do professor. Cada um desses domínios subdivide-se em três subdomínios, mas pelo contexto do trabalho que aqui apresentamos – como pode-se ver na epígrafe seguinte – discutimos apenas o MK e, em maior detalhe, o KoT. O MK

[1]Optamos por manter a nomenclatura em Inglês, pois esta é uma conceitualização do professor reconhecida em nível internacional, e a tradução desvirtuaria não apenas o sentido, mas também, essencialmente, o conteúdo de cada um dos subdomínios que compõem o modelo que a representa.

compõe-se, assim, do *Knowledge of Topics* (KoT) que refere-se ao conhecimento dos tópicos matemáticos a serem ensinados, que, no âmbito da classificação, inclui conhecer que para classificar é necessário se estabelecer critérios; que classificar está relacionado à identificação de caraterísticas; classificar como forma de agrupar; classificar no sentido de comparar; entre outros aspectos. O *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) que envolve o conhecimento das diferentes conexões matemáticas de cada tópico e como estes se relacionam, bem como suas fundamentações, por exemplo, as noções de classificar ou de definir um objeto matemático também em outros contextos matemáticos, não somente na Geometria. No caso da Educação Infantil, ao se possibilitar discussões sobre as propriedades de cada figura desprezando certas propriedades (condicionantes) ou substituindo algumas por outras mais gerais, pode-se iniciar a percepção de classificação hierárquica ou por partição. E o *Knowledge of the Practice of Mathematics* (KPM) que se refere ao conhecimento do fazer, da prática matemática, conhecimento das diferentes maneiras para alcançar os resultados desejados e um exemplo no âmbito da classificação, refere-se ao conhecimento de nomenclaturas corretas, a não fazer comparações equivocadas (como dizer que cubo e quadrado são a mesma "coisa"), saber conduzir uma classificação de modo a solucionar, e explanar como se classificou.

No âmbito particular do KoT, integra-se o conhecimento do professor sobre o tópico matemático, os conceitos, as propriedades, os procedimentos, as formas de fazer registros de representação e aplicações do mesmo. Neste subdomínio integram-se as seguintes categorias:

(i) *Definitions, properties and foundations:* refere-se ao conhecimento do professor sobre a definição e sobre quais fundamentos matemáticos se relacionam à determinada atividade. No âmbito da classificação inclui conhecer que classificar envolve estabelecer critérios, identificar caraterísticas, semelhanças e diferenças entre cada objeto a ser classificado;

(ii) *Mathematical procedures:* este aspecto refere-se aos diferentes procedimentos usados em cada situação, o conhecimento do professor sobre o que fará, como fará. No caso da classificação, como escolherá os critérios, como proporá aos alunos que classifiquem e como os auxiliará a explicar os procedimentos feitos;

(iii) *Registers of representation*: neste âmbito considera-se o conhecimento do professor sobre as representações, tanto verbais como simbólicas que conduzam ao significado de determinado tema matemático. No caso da classificação, refere-se ao conhecimento do professor sobre como explanar e representar adequadamente cada aspecto e decisão tomada referente à classicação realizada.

(iv) *phenomenology and applicatio*ns: envolve compreender os fenômenos envolvidos em determinada atividade matemática, e saber explicar o que está relacionado a ela; no caso da classificação, conhecer como se classifica, em quais contextos, o que se considera para realizar a classificação, além de conhecer que, fora do âmbito matemático, também é possível classificar em ações do cotidiano como os alimentos em uma despensa, ou ainda, em outras disciplinas, como a classificação das espécies animais e plantas em biologia.

Estas categorias nos permitem um olhar mais detalhado para uma melhor compreensão do conhecimento do professor como apresentado no tópico Análise e Discussão.

CONTEXTO E MÉTODO

A pesquisa desenvolvida, neste trabalho, é de cunho qualitativo na perspectiva do estudo de caso (Stake, 2005). A coleta das informações ocorreu em um encontro de formação de duas horas e trinta minutos, do qual participaram oito professoras, que possuíam pelo menos cinco anos de experiência docente, que trabalham com crianças entre dois e sete anos e onde a primeira autora assumiu o papel de formadora. Para o encontro foi implementada uma "Tarefa para Formação" (Ribeiro, et al., 2021), que tem sido conceitualizada no âmbito do grupo CIEspMat[2] e que tem por objetivo, simultaneamente, aceder e desenvolver o conteúdo do conhecimento especializado do professor.

A Tarefa para Formação foi implementada em três momentos: inicialmente com respostas individuais à questões; no segundo momento as professoras participantes foram organizadas em pequenos grupos (dois ou três integrantes) onde deveriam efetuar a classificação de um conjunto de objetos representativos de polígonos e objetos tridimensionais; e, no terceiro momento, ocorreu a socialização e a discussão plenária.

Foca-se aqui nas produções e discussões ocorridas no primeiro momento onde a formadora procurou não intervir, nem dar respostas para que as participantes pudessem revelar seu conhecimento sobre classificação, como classificar e sua importância.

As informações aqui analisadas fazem parte desse primeiro momento, e, dizem respeito, às produções das professoras em relação à Parte I da tarefa (Figura 1), mais especificamente aos itens a), b) e c) que se relacionam com o conhecimento matemático das participantes no âmbito da classificação e com o tipo de propostas que desenvolvem, ou não, com seus alunos, e que estão associadas ao desenvolvimento do entendimento da classificação. O item d) não será aqui discutido por limitação de espaço e por estar associado mais diretamente aos domínios do PCK.

1) Leia cada uma das questões a seguir. Responda a cada uma delas sem considerar um contexto escolar, ou seja, sem considerar que deverá ensiná-las aos alunos:

a) O que é classificar?
b) Em que contextos podemos classificar? Justifique a sua resposta;
c) Na sua prática docente (indique que ano leciona), em que contexto(s) explora a classificação com os seus alunos? (se não tem turma, em que contexto(s) exploraria);
d) Você considera importante que se trabalhe com o tema de classificação com os alunos da Educação Infantil? E com alunos dos Anos Iniciais? Por que considera (ou não considera), em cada uma dessas etapas, que seja importante o trabalho com esse tema? (Para apresentar seus argumentos, considere os aspectos relacionados com outros âmbitos da matemática).

Figura 1. Parte I da tarefa

Para a análise, focamos o conteúdo das categorias do KoT – associado a conceitualização desta parte da Tarefa para a formação – tendo a identificação do conhecimento especializado revelado pelas professoras sido efetuada a partir das suas produções escritas. Na sequência procedeu-se a descrição do conhecimento revelado de forma associada a um conjunto de acrônimos que nos permitem, posteriormente, sintetizar esse conhecimento revelado de forma mais visual como pode-se observar a seguir.

---

[2] O CIEspMat é um grupo de Pesquisa e Formação que desenvolve trabalhos focados no desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e futuro professor de e que ensina matemática – desde a Educação Infantil ao Ensino Médio. Para saber mais sobre o grupo, acesse: https://ciespmat.com.br

Tabela 1. Subdomínios e seus acrônimos

Subdomínios	Dimensões	Acrônimo
KoT	Definições	KoTd
	Fenomenologia e Aplicação	KoTfn
KFLM	Fortalezas e Dificuldades na aprendizagem matemática	KFLMd
KMT	Teorias sobre o ensino	KMTt
	Recursos materiais e virtuais	KMTr
KMLS	Expectativas de aprendizagem	KMLSec
	Sequenciamento dos tópicos	KMLSs

Na primeira coluna temos os subdomínios que foram observados nesta parte da tarefa, na segunda suas dimensões ou categorias e na terceira o acrônimo que o identifica e permite que cada conhecimento possa ser identificado.

ANÁLISE E DISCUSSÃO

Em relação à questão a) "O que é classificar?" as produções escritas das professoras revelaram uma associação da classificação a: "*separar por categorias*"; "*dividir, figuras, objetos, conforme suas semelhanças*"; "*separar itens/coisas/objetos pelas mesmas características*"; "*separar seguindo um critério*"; e "*agrupar de acordo com um critério pré-estipulado*". Estas produções deixam evidente um conhecimento associado à necessidade de critérios (KoTd: conhecer que para classificar é necessário se estabelecer critérios) e, de um conjunto de características associadas (KoTd: conhecer que classificar se relaciona à identificação de caraterísticas). As professoras revelaram conhecer que, para classificar, é necessário observar as características dos objetos/elementos de modo a identificar semelhanças e diferenças entre um objeto e outro para os agrupar de acordo com a opção efetuada (De Villiers, 1994).

Uma das participantes relacionou classificar a "*dividir*", revelando um conhecimento parcial sobre este tópico já que, poderia se considerar que para classificar é necessário "dividir", no sentido de partilha (Ribeiro, et al., 2017), contudo, ainda assim, é necessário que esta separação se associe a algum critério que pode ser definido a priori ou a posteriori (De Villiers, 1994). Dessa maneira, há a evidência de um conhecimento parcial que necessita ser completado para que possa impactar positivamente nas aprendizagens das crianças/alunos levando-as a perceber que, para classificar, é necessário perceber as formas, funções e atributos dos objetos (González, 2015), desde as primeiras classificações, e que, a divisão que efetuam corresponde a uma distribuição por conjuntos associada a determinadas características focais e não a uma partilha centrada na quantidade de elementos do conjunto – cardinalidade.

As respostas "*Nomear*" e "*Atribuir característica*" foram agrupadas, por não se relacionarem ao fenômeno da classificação, não descrevendo o que é classificar, uma vez que a característica é algo inerente ao objeto e não algo que possa ser atribuído pela classificação. Nesse sentido, o objeto não recebe um nome ao ser classificado, ele já possui um nome e suas propriedades poderão colocá-lo em um conjunto ou em outro, de acordo com semelhanças e diferenças – quando em uma classificação disjunta –, ou em mais de um conjunto em uma classificação inclusiva (De Villiers, 1994).

Outras produções das professoras associam-se a "*estar em algum lugar, posição. Ex: times classificados*" e "*definir conjuntos, ordenar*". Estas produções têm correspondência com um conhecimento associado ao âmbito do Sentido de Número e não diretamente à classificação, isso trás para a discussão o que as professoras entendem por classificar – correspondendo ao fenômeno da classificação – e a ênfase atribuída aos Números e Operações e a presunção de que "tudo" se enquadra nos Números. Classificar pode relacionar-se a ordenar, contudo, as professoras não aprofundam suas considerações neste sentido relacionado ao Número como por exemplo, localizar numa dada sequência (e.g., Cebola, 2002).

Na questão b) "Em que contextos podemos classificar?", as professoras indicam como contexto, que se pode classificar "*Cores, formas, tamanhos, figuras, objetos, etc.*"; "*Classificar animais, objetos, alimentos, a classificação depende do que foi pré-estipulado*" e "*classificar para diferenciar objetos ou diversos materiais*". Tais produções revelam um conhecimento sobre a classificação como forma de diferenciar os elementos observando seus aspectos visíveis ou suas propriedades, o que relacionamos ao subdomínio (KoTd: conhecer que classificar se relaciona à identificação de caraterísticas). Revelam também um conhecimento associado à fenomenologia (KoTfn: conhecer quais fundamentos matemáticos se relacionam à atividade de classificar) uma vez que classificar envolve a observação de características para perceber semelhanças e diferenças entre os elementos e suas propriedades a partir de um critério pré-estipulado que pode resultar em formação de conjuntos (De Villiers, 1994; Guillén, 2005).

Em relação à questão c) "Na sua prática docente em que contexto(s) explora a classificação com seus alunos?" as professoram discorrem sobre contextos em que realizam classificações com seus alunos, considerando aspectos de seu cotidiano: "*no momento de organizar os brinquedos como caixa para jogos de encaixe, jogos de empilhar, panelinha, etc.*"; "*classificação de letras e números*"; "*situações problemas em que precisamos classificar o tipo de sentença, etc.*". Tais respostas apresentam modos de utilizar a classificação, porém, apenas de forma indireta e sem estabelecer as necessárias relações da classificação com o desenvolvimento do pensamento abstrato, sem tornar explicito o fato de ser ou não trabalhada a escolha de critérios com as crianças e sempre considerando aspectos visíveis, físicos dos objetos (González, 2015). Apesar de as professoras participantes revelarem compreender princípios básicos do tópico da classificação, como a necessidade de um critério, (KoTd: para classificar conhecer que para classificar é necessário se estabelecer critérios), não relacionam este conhecimento como essencial para o desenvolvimento do pensamento matemático, e suas produções revelaram conhecimento relacionado à classificação por partição (De Villiers, 1994) detendo-se aos aspetos físicos dos elementos sem explorar propriedades abstratas.

O papel da classificação, sua natureza, os tipos de classificação e a abordagem no ensino da Geometria têm sido discutidas pela literatura (e.g., Breda, et al., 2011; De Villiers, 1994; Guillén, 2005; Muñoz- Catalán et al., 2018), bem como a importância de um trabalho sistemático e intencional com a Matemática, o que inclui a classificação, desde a Educação Infantil (e.g., Clements et. al, 1999; Clements & Sarama, 2011). Esse é um ponto que destacamos, já que, sem compreender os processos mentais e a estrutura lógica do pensamento que o ensino da classificação pode proporcionar, os professores podem, muitas vezes, não realizar atividades que possibilitem esse desenvolvimento.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao retomar nossa questão investigativa: Que conhecimento especializado revelam professores de Educação Infantil no âmbito do tópico de classificação em um contexto de formação continuada?, a análise das produções das professoras à luz do MTSK, contribuiu para revelar que estas possuem conhecimento relacionado ao tópico (KoT), tanto em relação à definição quanto à fenomenologia do ato de classificar. A Tabela 2 apresenta o conhecimento revelado e o uso do (*) indica o conhecimento que pode ser aprimorado.

Tabela 2. Conhecimento revelado a partir das produções das professoras

Categoria	Subdomínio	Conhecimento revelado
KoT	KoTd1	conhecer que para classificar é necessário se estabelecer critérios
	KoTd2	conhecer que classificar se relaciona à identificação de caraterísticas
	KoTd3	*conhecer que classificar pode estar relacionado a ordenar
	KoTd4	conhecer classificar como forma de agrupar
	KoTd5	*conhecer classificar no sentido de comparar
	KoTd6	*conhecer quais conceitos matemáticos se relacionam ao ato de classificar
	KoTfn1	*conhecer quais fundamentos matemáticos se relacionam à atividade de classificar

No entanto, como pode-se observar, o conhecimento revelado, apresentou-se dissociado da prática matemática, considerando que nenhuma das professoras relacionou o ensino da classificação ao desenvolvimento do pensamento abstrato, citaram o uso da classificação como algo feito no cotidiano, no geral, sem ser conduzido pelas professoras, considerando aspectos físicos dos objetos e classificando por partição: “cada brinquedo em sua caixa”.

Escolher realizar a formação com professoras da Educação Infantil, se justifica porque estas atuam na primeira etapa escolar, obrigatória, no Brasil, a partir dos 4 anos de idade, e preditiva para o desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos que está estritamente relacionado ao conhecimento do professor (Clements & Sarama, 2011). Nesse sentido, potencializar o desenvolvimento desse conhecimento e entendimento matemáticos dos alunos requer desenvolver o conhecimento especializado do professor e preencher as lacunas que vão sendo identificadas nesse conhecimento. Desse modo, os resultados apresentados apontam uma possível direção a seguir para que a formação de professores se foque onde é efetivamente necessária.

Ao final, foi possível perceber que o conhecimento revelado pelas participantes pode ser aprofundado de modo a contribuir para que as crianças construam seu conhecimento matemático a partir de diferentes oportunidades de realizarem classificações disjuntas, hierárquicas, a priori, a posteriori, com distintos materiais e em diferentes situações, desde a Educação Infantil, porém, para isso, torna-se, urgente e necessária, uma mudança no foco da formação considerando a ideia da especialização do conhecimento do professor para a atuação docente e a compreensão de que a formação e a pesquisa sejam realizadas de forma articulada (Ribeiro, Gibim, & Alves, 2021), bem como a elaboração de tarefas explicitamente com foco nesse tipo de conhecimento.

Referencias

Brasil. (2018) Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gob.br/ Acesso em: 11 mar. 2019.

Breda, A.; Serrazina, L.; Menezes, L.; Sousa, H. & Oliveira, P. (2011) *Geometria e medida no ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Carrillo, J.; Climent, N.; Montes, M.; Contreras, L. C.; Flores-Medrano, E.; Escudero-Ávila, D.; Vasco, D.; Rojas, N.; Flores, P.; Aguilar-Gonzalez, A.; Ribeiro, M. & Muñoz-Catalán, M. C. (2018)The mathematics teacher’s specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, London, v. 20, n. 3, p. 1-18.

Cebola, G. (2002) Do número ao sentido do número. In Ponte, J. P.; Costa, C.; Rosendo, A. I.; Maia, E.; Figueiredo, N.; Dionísio, A. F. (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores*. Lisboa: SEM-SPCE. p. 257–273.

Charalambous, C.& Pitta-Pantazi, D. (2016) Perspectives on Priority Mathematics Education. In: English, L.; Kirshner, D. (ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education*. 3. ed. London: Routledge, p. 19-59.

Clements, D. H.; Swaminathan, S.; Hannibal, M. A. Z. & Sarama, J. (1999) Young children’s concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, Reston, v. 30, p. 192-212.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2011) Early childhood mathematics intervention. *SCIENCE*, v. 333, p. 968-970.

De Villiers, M. (1994) The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the learning of mathematics*, New Westminster, v. 14, n. 1, p. 11-18.

Duval, R. (1998) Geometry from a cognitive point a view. In: Mammana, C.; Villani, V. (ed.). Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. [S. l.]: *Springer*, p. 37-52.

Escudero, A. M., Muñoz-Catalán, M. de la C., & Yáñez, J. C. . (2021). Conocimiento especializado de un profesor de educación infantil al enseñar cuerpos geométricos. *Zetetike*, *29*(00), e021005.

Ferreira, M. C. N.; Ribeiro, M. & Ribeiro, A. J. (2017). Conhecimento matemático para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Zetetiké*, Campinas, SP, v.25, n. 3, set./dez., p.496-514.

Guillén, G. S. (2005). Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos. *Educación Matemática*, Ciudad de México, v. 17, n. 2, p. 117-152.

González, A. A. (2015). *El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas.* Un estudio de caso. Tese (doutorado). Universidade de Huelva, 210 p.

Muñoz-Catalán, M. C. & Carrillo, J. Y. *Didáctica de las matemáticas para maestros de Educación Infantil*. Madrid: Ediciones Paraninfo, 2018.

Ribeiro, M.; Badillo, E.; Sánchez-Matamoros, G.; Montes, M. & Gamboa, G. (2017) Intertwining noticing and knowledge in video analysis of self practice: the case of Carla. (T. Dooley, G. Gueudet, Eds.)*Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Anais... In: CERME 10. Dublin: Institute of Education.

Ribeiro, M.; Gibim, G. & Alves, C. (2021). A Necessária Mudança de Foco na Formação de Professores de e que Ensinam Matemática: Discussão de Tarefas para a Formação e o Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo. *Perspectivas da Educação Matemática*, v. 14, n. 34, p. 1-24.

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO DE UN PROFESOR DE INFANTIL PARA LA ENSEÑANZA DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

Pedagogical Content Knowledge of an early childhood education teacher for teaching geometric solids

Escudero-Domínguez, A.M.[a]; Muñoz-Catalán, M.C.[a]; Montes, M.A.[b, c]

[a] Universidad de Sevilla; [b] Universidad de Huelva; [c] Centro de Investigación COIDESO

Temática: 3 – MTSK en diferentes temas y etapas

Resumen. Esta investigación tiene como objetivo identificar y caracterizar el conocimiento que pone en juego un profesor de Educación Infantil al enseñar cuerpos geométricos. Para ello usamos el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) como herramienta teórica y analítica con la cual ofrecer una serie de evidencias e indicios del conocimiento didáctico del contenido de un profesor de Educación Infantil en la enseñanza de la diferenciación entre poliedros y cuerpos redondos en un aula con niños de 4 años. Tomamos parte de una sesión en la que el objetivo de aprendizaje es diferenciar cara plana de cara curva, mediante la posibilidad de apilamiento de objetos. Los resultados nos proporcionan ejemplos reales en los que se muestra la profundidad del conocimiento didáctico del contenido, así como la necesidad de trabajar las relaciones con los subdominios del conocimiento matemático.

Palabras clave. Educación Infantil, cuerpos geométricos, práctica educativa, MTSK.

Abstract. This research aims to identify and characterize the knowledge that an Early Childhood Education teacher puts into play when teaching geometric solids. For this we use the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge model (MTSK) as a theoretical and analytical tool with which to offer a series of evidences and indications of the pedagogical content knowledge of a teacher of Early Childhood Education in teaching the differentiation between polyhedra and round bodies in a classroom with 4-year-old children. We take part of a session in which the learning objective is to differentiate flat face from curved face, through the possibility of stacking objects. The results provide us with real examples in which the depth of the pedagogical content knowledge is shown, as well as the need to work on the relationships with the subdomains of mathematical knowledge.

Keywords. Early Childhood Education, Geometric solids, Educational Practice, MTSK.

INTRODUCCIÓN

La investigación acerca del conocimiento del profesor de Educación Infantil respecto de las matemáticas es todavía incipiente, pero está en auge debido al reconocimiento de la importancia de la figura del profesor en esta etapa educativa en los resultados de aprendizaje de su alumnado (Gasteiger y Benz, 2018; Lee, 2017). Además, las matemáticas que se trabajan en Educación Infantil engloban ideas profundas (Perry y Dockett, 2002).

La Geometría ayuda a la construcción del pensamiento espacial (Espina y Novo, 2019) y contribuye al desarrollo cognitivo del alumnado de Educación Infantil, ya que promueve el desarrollo de habilidades para generar razonamiento y justificación (NCTM, 2000). Sin embargo, en la etapa de Educación Infantil, muchos profesores priorizan la enseñanza de otros bloques de contenidos y no se le presta la atención que merece a la enseñanza de la

Escudero-Domínguez, A. M., Muñoz-Catalán, M. C., & Montes, M. A. (2021). Conocimiento didáctico del contenido de un profesor de infantil para la enseñanza de cuerpos geométricos. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 192–199). Congresseme.

Geometría (Clements y Sarama, 2011). Algunos investigadores como Chiang y Stacey (2015) consideran que puede ser debido a que muchos profesores presentan deficiencias en determinados conocimientos geométricos básicos, lo que hace que no se sientan seguros para enseñar esos conceptos, con la consiguiente implicación en su conocimiento didáctico del contenido. En trabajos anteriores éste ha sido nuestro foco y se han mostrado las fortalezas y limitaciones en MK de este profesor, pero la enseñanza de la Geometría se afronta desde un enfoque didáctico, en sintonía con las orientaciones sugerida por Young (1970) de priorizar el aprendizaje de la geometría tridimensional a la geometría plana. La práctica natural del pensamiento geométrico son las tres dimensiones, ya que es más cercana a la realidad que la geometría plana. En este planteamiento, el estudio de las caras de un cuerpo geométrico conduce al conocimiento de la geometría plana.

El trabajo aquí presentado forma parte de una investigación más amplia que pretende describir e interpretar el conocimiento especializado de un profesor de Educación Infantil en la enseñanza de cuerpos geométricos a la luz del modelo de *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* [en adelante MTSK] (Carrillo et al., 2018). Aquí queremos dar respuesta a la pregunta: ¿Qué conocimiento didáctico del contenido (PCK) sobre la enseñanza de cuerpos redondos y poliedros evidencia un profesor de Educación Infantil en su práctica?

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Los primeros años de escolarización constituyen los cimientos de los aprendizajes futuros (McCray y Chen, 2012), por lo que el docente tiene un papel importante. Este profesional debe revestir los contenidos de forma lúdica y ser consciente de que debe ir ampliando el vocabulario matemático de sus alumnos, partiendo de su propio lenguaje (Escudero-Domínguez, Escudero-Ávila, Aguilar-González y Vasco-Mora, 2019). Es necesario reconocer que el profesor de esta etapa educativa, en España, no es especialista en la enseñanza de ninguna materia (como lo pueda ser el de secundaria, cuya docencia va asociada, habitualmente, a una única asignatura), pero sí necesita disponer de un conocimiento sólido y cohesionado para identificar las matemáticas y poder promover un aprendizaje profundo (Muñoz-Catalán et al., 2019). En la última década ha ido creciendo la investigación acerca del conocimiento profesional en la etapa de Educación Infantil usando distintos modelos como el *Mathematical Knowledge for Teaching* (Ball, Thames y Phelps, 2008), el *Knowledge Quartet* (Rowland, Huckstep y Thwaite, 2005) y desde hace unos años el modelo MTSK (Carrillo et al., 2018). En este trabajo usamos el MTSK, ya que consideramos que la especificidad del conocimiento del profesor es propia de todos los subdominios (Carrillo et al., 2018), y las relaciones con otros subdominios nos puede ayudar a comprender la práctica en esta etapa educativa. Por ello, pensamos que MTSK es una herramienta útil para reflexionar sobre el conocimiento especializado del profesor en la etapa (Escudero-Domínguez, Muñoz-Catalán y Carrillo, en prensa).

El modelo MTSK se plantea como una herramienta teórica y analítica que permite identificar el conocimiento específico del profesor de matemáticas en diferentes momentos de su práctica docente (Carrillo, Montes, Contreras y Climent, 2017). El modelo concibe el conocimiento del profesor de manera holística, aunque para su trabajo pormenorizado se subdivide en tres dominios de conocimiento: *Conocimiento Matemático (MK), Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) y creencias/concepciones del profesor sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje*. Tanto *MK* como *PCK* se subdividen en tres subdominios de conocimiento y, cada uno de ellos, cuenta con categorías que ayudan a su identificación y caracterización (Carrillo et al., 2018). *MK* considera el *conocimiento de los temas (KoT)*, el *conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)* y el *conocimiento de las prácticas matemáticas*

(KPM). *PCK* incluye el conocimiento de la enseñanza de *las matemáticas (KMT),* el *conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)* y el *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS).* A continuación, se describen los subdominios de PCK que sirven de base para esta investigación.

El *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)* abarca el conocimiento del profesor sobre cómo enseñar un contenido matemático. Contiene el conocimiento sobre distintas estrategias, teorías de enseñanza asociadas a un determinado contenido matemático y características de distintas herramientas para enseñar matemáticas. El *conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)* contiene el conocimiento del profesor sobre cómo los alumnos aprenden un contenido matemático. Incluye el conocimiento de fortalezas y dificultades en el aprendizaje de un contenido, así como las teorías de aprendizaje asociadas a un determinado contenido matemático. También se ubican en este subdominio las formas de interacción con un contenido matemático y los intereses y expectativas de los estudiantes sobre un contenido matemático. El *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)* es el conocimiento de lo que se espera que el estudiante aprenda en un determinado nivel escolar. Este subdominio abarca lo que se espera que un estudiante sepa en ese determinado momento escolar, el nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado y la secuenciación con temas anteriores y posteriores.

METODOLOGÍA

En este trabajo nos planteamos comprender el conocimiento especializado que pone en juego un profesor de Educación Infantil, identificando elementos del *conocimiento didáctico del contenido* de un profesor de Educación Infantil sobre la enseñanza de la diferenciación entre poliedros y cuerpos redondos. Se ubica dentro de un paradigma interpretativo (Bassey, 1999) y el diseño de investigación posee las características de un estudio de caso instrumental (Stake, 2005). José (pseudónimo) es un profesor en activo con más de una década de experiencia en la etapa. Nuestro informante está comprometido con mejorar su docencia y ha recibido una formación específica en Didáctica de las Matemáticas que trata de implementar en su aula. Esta es la de anteponer el aprendizaje de la geometría de tres dimensiones a la geometría plana.

Las fuentes de obtención de los datos son la observación de aula mediante videograbación y las posteriores entrevistas semiestructuradas que sirvieron para completar la información aportada por la observación no participante. Se efectuaron ocho grabaciones durante dos periodos lectivos consecutivos en un aula de Educación Infantil de un centro público de la provincia de Sevilla (España).

En este trabajo se presenta el análisis de parte de una de las últimas sesiones videograbadas con alumnos de Infantil de 4 años, cuyo objetivo de aprendizaje es mostrar la diferenciación de cuerpos redondos y poliedros, mediante la posibilidad de apilamiento de los cuerpos. En sesiones anteriores ya había trabajado esta diferenciación mediante el criterio de hacer rodar los cuerpos. La metodología utilizada por el docente está basada en una formulación continuada de preguntas, intentando que el alumno sea el que construya el conocimiento.

El análisis de los datos comienza con la transcripción de la sesión y de las entrevistas, y se afronta desde un enfoque interpretativo (Kvale, 1996) en el que se busca comprender y caracterizar los datos desde la lente del modelo MTSK. Además de utilizar la división en subdominios y categorías (Carrillo et al., 2018), usamos los constructos evidencia e indicio de conocimiento (Flores-Medrano, 2015).

Síntesis de la sesión de clase

José, antes de realizar la ficha del libro, pasa a explicar *"que hay algunas figuras que las podemos poner unas encima de otras"*, anunciando implícitamente la idea de cara plana de un sólido, haciendo uso de materiales de la clase. En el proceso también va repasando algunos aspectos como los nombres de los cuerpos geométricos utilizados, así como algunas propiedades de estos cuando los alumnos no nombran el correcto. Comienza tomando un objeto con forma de cilindro colocado sobre una de sus bases y acomoda otro objeto con forma de prisma cuadrangular sobre la base del cilindro. Tras esto, realiza el proceso inverso, toma un prisma y encima coloca un cilindro por una de sus bases. Los cuerpos que va usando son de diferentes tamaños y tipos; en el caso del prisma, algunos de base cuadrada y otros de base rectangular. También utiliza una esfera e intenta colocarla encima de un prisma. En ese momento, el profesor evidencia que sobre la esfera no se puede poner ningún objeto. Aprovechando esto, el profesor aclara lo que les ocurre a los cilindros, pues antes solo había usado estos apoyado sobre una de sus bases y, por tanto, podía apilarse. Demuestra ambas situaciones tomando un objeto con forma de cilindro e intentando apilar objetos sobre este. Tras la explicación, pasa a explicar la ficha, en la que tienen que colorear los cuerpos sobre los cuales se puede apilar (Figura 1).

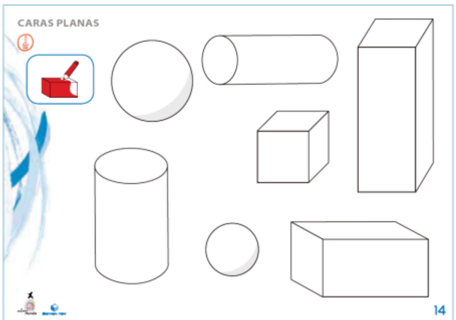


Figura 1. Ficha a trabajar

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este trabajo presentamos elementos significativos del conocimiento especializado de un profesor de Educación Infantil en relación con los cuerpos geométricos. El objetivo de José en este fragmento de sesión es mostrar la posibilidad de apilamiento de algunos cuerpos geométricos.

El profesor toma objetos de la clase con forma de prisma, cilindro y esfera, aprovechando el aula para desarrollar los contenidos estudiados, intentando matematizar el entorno mediante la visualización espacial (KMLS, expectativas de aprendizaje), sabedor de que los objetos de la clase ayudan a dar significado a los cuerpos (KoT, fenomenología). José es conocedor de que el mundo que nos rodea y con el que los alumnos interactúan, está formado, principalmente, por cuerpos más que por superficies planas, y esto se refleja en sus clases, partiendo de la geometría tridimensional y derivando de ella la geometría plana (KMT, teorías sobre enseñanza). En una entrevista posterior, dice: *"este año hemos trabajado pirámide, cubo, prisma, cilindro, esfera… y sus correspondientes formas planas que derivan de estas formas geométricas",* lo que indica su conocimiento de los estándares de aprendizaje (KMLS, secuenciación temas).

El docente conoce la importancia que posee la manipulación de los cuerpos para poder construir la imagen de los conceptos (KFLM, formas de interacción): *"el niño parte del cuerpo hacia afuera… y un niño lo tiene que vivenciar, lo tiene que tocar, que sentir, que ver".* Por ello se apoya en material manipulativo para que los alumnos observen sus propiedades (KMT, estrategias). José concede importancia al material manipulativo, ya que facilita al estudiantado el dar propiedades de estos cuerpos que si lo tuvieran que hacer con su imagen mental (KMT, recursos).

El docente conoce que a los alumnos les cuesta fijarse en las caras de los cuerpos geométricos (KFLM, dificultades), ya que conoce que los niños a esta edad no son capaces de retener muchas características de un objeto (KMLS, nivel de desarrollo esperado). Lo anterior se evidencia en la siguiente entrevista: *"ahora mismo estos niños son todavía muy chicos y no son capaces de identificar más de una cualidad o dos características de cada forma geométrica"*. Por otro lado, en esa entrevista José indica como objetivo *"intentamos que vayan observando más las figuras y que sean capaces cada vez de coger más características de los objetos"* (KMLS, expectativas). El docente piensa que en el aprendizaje geométrico los alumnos tienen que avanzar de la identificación de cuerpos como un todo, lo que se corresponde con el nivel 1 de Van Hiele, al análisis de estos, que lo sitúa en el nivel 2 de Van Hiele (Jaime y Gutiérrez, 1990) (KFLM, teorías sobre aprendizaje) y sabe que es adecuado para la etapa que los estudiantes proporcionen características de los cuerpos geométricos (KMLS, expectativas).

José toma un objeto con forma de cilindro y pregunta a los discentes su nombre, conocedor de la importancia del uso de lenguaje geométrico correcto para el trabajo de los cuerpos geométricos (KMT, estrategias; lenguaje). Asimismo, sabe que a esta edad el alumnado debe ir adquiriendo vocabulario geométrico específico y usando lenguaje correcto y preciso para cada cuerpo que manejan (KMLS, expectativas; lenguaje). Sin embargo, conoce la dificultad que presentan los alumnos para retener vocabulario geométrico (KFLM, dificultades; lenguaje) como manifiesta en varias entrevistas, por ejemplo: *"el vocabulario le cuesta mucho trabajo. Es verdad que son palabras que no están en su día a día y, entonces, pues le cuesta trabajo utilizar bien los términos"*.

Seguidamente, colocando un objeto con forma de cilindro apoyado sobre una de sus bases, les pregunta: *"¿se puede colocar algo encima del cilindro?"*. Como hemos comentado, el objetivo de José es que los alumnos vayan profundizando en las propiedades de los cuerpos geométricos (KMLS, expectativas de aprendizaje). Para ello aprovecha el hecho de apilar los cuerpos para expresar características de los cuerpos geométricos como disponer de una cara curva (KMT, estrategias), ya que es una cualidad que a los estudiantes les llama la atención y pueden experimentar fácilmente (KFLM, intereses y expectativas). Además, conoce cómo el uso de vocabulario cotidiano del niño ayuda a asimilar el concepto matemático (KMT, estrategia; lenguaje).

A continuación, toma un objeto con forma de prisma cuadrangular (donde la altura de la figura es considerablemente mayor que la longitud del lado del cuadrado de la base) y realiza el mismo procedimiento anterior (KMT, técnica). José pregunta a sus alumnos por el nombre de los cuerpos, debido a la importancia que le otorga al vocabulario geométrico, y a que conoce que al estudiantado les cuesta diferenciar cubo de prisma cuando no se trata del prisma prototípico (KFLM, dificultades), pues se fijan en la cara de mayor dimensión (KFLM, formas de interacción). Este conocimiento es movilizado en este fragmento de entrevista: "*aquí lo más significativo es el cuadrado, por tanto, ellos te lo van a asociar más a un cubo, es por, digamos, por establecer la relación lógica … o sea, más lógica para ellos al menos… de la forma plana a la forma geométrica"*. Para solventar esto, José comenta a los dicentes que *"no es un cubo porque todas sus partes no son iguales"* e intenta evocar la respuesta correcta mediante preguntas sobre las propiedades de este cuerpo (KMT, estrategias), como sigue: *"¿esto qué es? [señalando sobre una de sus caras rectangulares]"*. Los alumnos responden "*rectángulo*" y, de nuevo, el profesor insiste en el nombre, de la siguiente manera: *"Chicos, esta [señalando la caja] ¿Qué figura es? Mirad, tiene unas caras que son cuadrados y otras que son rectángulos. ¿Cómo se llama esta figura? ¿Se llama cilindro? ¿Se llama prisma?"*.

José continua la sesión tomando otro objeto con forma de cilindro (con altura de dimensión menor a la medida del diámetro de sus bases), lo que supone un indicio de su conocimiento acerca del papel de las imágenes del concepto en el aprendizaje de los estudiantes y las repercusiones que genera el manejo de un ejemplo prototípico (KFLM, teoría sobre aprendizaje). Algunos alumnos responden *"esfera"* y mediante preguntas sobre sus propiedades, el profesor trata de acercarlos a la respuesta correcta: *"¿Rueda por todos los lados?"*. Sigue tomando objetos con distintas formas (prisma rectangular, prisma cuadrangular prototípico, esfera y cilindro), lo que nos muestra que conoce los cuerpos que los discentes deben aprender en este curso escolar (KMLS, expectativas de aprendizaje) e insiste en el nombre de cada uno de ellos. Seguidamente, intenta apilarlos y comprobar el posible apilamiento. En el caso de la esfera, tras la comprobación, comenta a los alumnos *"encima de la esfera no puedo poner nada"* y pasa a tomar otro objeto con forma de cilindro, con el que afirma: *"encima de los cilindros puedo poner cosas, pero si lo pongo por las caras [señalando una de sus bases], es decir, si lo pongo por las caras que son planas, pero ¿y por aquí?"*. El profesor promueve la comparación de la esfera con el cilindro, identificando diferencias y también similitudes entre ellos (KMT, estrategias). Esto es debido a que conoce que los alumnos comprenden mejor un cuerpo geométrico nuevo a través de la comparación con otro ya conocido (KFLM, formas de interacción).

Para finalizar, José explica la ficha del libro que deben realizar *"vamos a colorear aquellas figuras que sí podemos ponerlas una encima de la otra"*. Va preguntando cuerpo por cuerpo y afirmando si tienen o no que colorearlo. En la ficha aparecen dos esferas, dos cilindros (uno apoyado sobre una de las bases y otro apoyado en la cara curva) y tres prismas (un cubo, un prisma de base cuadrada apoyado sobre una de sus bases y otro prisma de base cuadrada apoyado sobre una de sus caras laterales). Se observa como el docente conoce distintos sistemas de representación sobre cuerpos geométricos: situación real (objetos de la propia clase), gráfico (ficha del libro) y lenguaje verbal (Lesh, Post y Behr, 1987). Usa estos sistemas como vehículo para el desarrollo de la sesión, promoviendo la conversión entre sistemas (KMT, estrategias). Además, trabaja la conversión del registro manipulativo al gráfico, ayudándose del lenguaje natural, para que los alumnos expliciten este criterio de los cuerpos (KMT, estrategias).

CONCLUSIONES

Este estudio pretende avanzar en la caracterización del conocimiento especializado de un profesor de Educación Infantil enseñando cuerpos geométricos, concretamente la distinción entre poliedro y cuerpo redondo por su capacidad de apilamiento. Para ello utilizamos distintas herramientas metodológicas que nos permiten identificar y profundizar sobre ese conocimiento especializado.

Este trabajo refuerza la idea de que el modelo MTSK puede usarse para el estudio del conocimiento especializado del profesor de la etapa de Educación Infantil (Escudero-Domínguez, Muñoz-Catalán y Carrillo, 2021). En el análisis del fragmento encontramos indicadores de casi todas las categorías de cada uno de los subdominios del PCK, siendo el indicador detonante de esta sesión el que tiene que ver con su objetivo de profundizar en las propiedades de los cuerpos geométricos, concretamente el mostrar la diferencia entre los cuerpos geométricos desde el apilamiento (KMLS, expectativa de aprendizaje). Para expresar propiedades de estos (como la posesión o no de cara curva) aprovecha el hecho de apilar los cuerpos (KMT, estrategia), ya que es una cualidad que a los niños les llama la atención y pueden experimentar fácilmente (KFLM, intereses y expectativas). Además, los indicadores reflejados en el análisis dan cuenta de potenciales relaciones entre subdominios de PCK y MK que serán objeto de estudio en la investigación más amplia que estamos desarrollando.

Las investigaciones que han trabajado el conocimiento del profesor de Educación Infantil indican que deben tenerse en cuenta las características particulares de la etapa (Mosvold, Bjuland, Fauskanger y Jacobsen, 2011). Así, se trata de una etapa generadora de lenguaje, por lo que el docente debe ir ampliando el vocabulario matemático de sus alumnos, partiendo del lenguaje habitual de estos (Escudero-Domínguez, Escudero-Ávila, Aguilar-González y Vasco-Mora, 2019). El criterio de apilamiento es una muestra de ello, ya que expresa la idea de cara plana y curva, sin utilizar términos matemáticos.

Agradecimientos

Este trabajo desarrollado en el marco del proyecto: "Conocimiento especializado del profesorado de matemáticas y formación del profesorado" (RTI2018-096547-B-I00, del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades del Gobierno de España). Asimismo, está vinculado a la Red MTSK de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP), y al centro de investigación COIDESO.

Referencias

Ball, D.L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham: Open university press.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*. DOI: https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo, J., Montes, M. A., Contreras, L. C., y Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 22*, 185-205.

Chiang, P.C., y Stacey, K. (2015). Geometric concepts of two-dimensional shapes by primary school teachers in Taiwan. *Proceedings of PME 39,2*, 161-168

Clements, D. H., y Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: the case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*, 133-148. https://doi.org/10.1007/s10857-011-9173-0

Escudero-Domínguez, A., Escudero-Ávila, D., Aguilar-González, A., y Vasco-Mora, D. (2019). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en Educación Infantil para la enseñanza de Geometría. En J. Carrillo, M. Codes y L.C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 219-227). Huelva: Universidad de Huelva, Publicaciones.

Escudero-Domínguez, A., Muñoz-Catalán, M.C., y Carrillo, J. (en prensa). Caracterizando el Conocimiento Especializado de un Profesor de Educación Infantil Enseñando Prismas. En (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV*. Valencia: SEIEM.

Escudero, A. M, Muñoz-Catalán, M. C., y Carrillo, J. (2021). Conocimiento especializado de un profesor de Educación Infantil al enseñar cuerpos geométricos. *Zetetike, 29*, 1-16 – e021005. https://doi.org/10.20396/zet.v29i00.8661819

Espina, E., y Novo. M.L. (2019). Análisis de la presencia de la geometría en los proyectos editoriales de Educación Infantil. *Educación Matemática*, *31*, (3), 81-112

Flores-Medrano, E. (2015). Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). Tesis de doctorado publicada en http:// http://rabida.uhu.es/handle/10272/11503.Huelva, España: Universidad de Huelva.

Gasteiger, H., y Benz, C. (2018). Enhancing and analyzing kindergarten teachers' professional knowledge for early mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior, 51,* 109-117. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.01.002

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares y M. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar.

Kvale, S. (1996). *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing*. Londres: SAGE

Lee, J. E. (2017). Preschool Teachers' Pedagogical Content Knowledge in Mathematics. *International Journal of Early Childhood*, *49*, 229-243.

Lesh, R., Post, T., y Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. En C. Janiver (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33–40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum

McCray, J.S., y Chen, J-Q. (2012). Pedagogical Content knowledge for preschool mathematics: construct validity of a new teacher interview. *Journal of Research in Childhood Education*, *26,* 291-307.

Mosvold, R., Bjuland, R., Fauskanger, J., y Jakobsen A. (2011). Similar but different-investigating the use of MKT in a Norwegian kindergarten setting. En M. Pytlak, T. Rowland, y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1802-1811). Rzeszów: University of Rzeszów.

Muñoz-Catalán, C., Joglar, N., Ramírez, M., Escudero, A.M., Aguilar, A., y Ribeiro, M. (2019). El conocimiento especializado del profesor de infantil desde el aula de matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 63-84). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM (Trad. Castellana, Principios y estándares para la educación matemática. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Perry, B., y Dockett, S. (2002). Young children´s access to powerful mathematical ideas. In L.D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 81-112). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2005). Elementary Teachers' Mathematics Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the Case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*, 255-281.

Stake, R.E. (2005). *Multiple Case Study Analysis*. New York: Guilford Press.

Young, G. (1970): *Beginners Book of Geometry*. Chelsea Publishing. New York.

MTSK EN LA APROPIACIÓN DE UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA APLICADA SOBRE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS DE FRACCIONES

MTSK in the assumption of a didactic engineering applied on multiplicative problems of fractions

Esparza-Rodríguez, E.[a]; Lizarde-Flores, E.[b]

[a] Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos"; [b] Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos"

Temática: 3 – MTSK en diferentes temas y etapas

Resumen. La ponencia comunica los avances de una investigación que tiene como objetivo analizar los conocimientos especializados de matemáticas que los docentes de 6º de Educación Primaria ponen en juego para interpretar y aplicar una Ingeniería Didáctica sobre Problemas multiplicativos con fracciones. La investigación surge en respuesta a los problemas de enseñanza que manifiestan los docentes cuando enseñan este contenido y del reconocimiento estructural de las lecciones propuestas en los libros de texto de Matemáticas para Educación Primaria. Se han diseñado 12 Situaciones Didácticas que conforman las clases concebidas para la Ingeniería Didáctica y los temas que se abordan muestran una secuencialidad de complejización. Para ejemplificar la configuración de las sesiones se presenta la sesión 8 "Calcula el área: Fracción x Fracción" y se explican sus apartados.

Palabras clave. Enseñanza, Conocimiento, Didáctica, Matemáticas.

Abstract. The presentation communicates the advances of an investigation that aims to analyze the specialized knowledge of mathematics that teachers of 6th grade of Primary Education put into play to interpret and apply a Didactic Engineering on multiplicative problems with fractions. The research arises in response to the teaching problems that teachers manifest when they teach this content and the structural recognition of the lessons proposed in the textbooks of Mathematics for Primary Education. 12 Didactic Situations have been designed that make up the classes conceived for Didactic Engineering, and the topics addressed show a sequential complexity. To exemplify the configuration of the sessions, session 8 "Calculate the area: Fraction x Fraction" is presented and its sections are explained.

Keywords. Teaching, Knowledge, Didactics, Mathematics.

INTRODUCCIÓN

La Investigación Educativa es un ámbito del conocimiento que, desde diversos enfoques, se está desarrollando de manera considerable. La implementación de metodologías permite caracterizarla de un rigor científico, y además los resultados posibilitan la solución u orientación de problemas que los profesores enfrentan en su práctica de enseñanza.

Ante esta premisa y como parte del programa de estudio de la Maestría en Docencia para la Educación Básica, en la Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos", San Marcos, Loreto, Zac. México, se expone el avance de una investigación de tesis, que se ubica en la línea del "Conocimiento Disciplinar y Didáctico del profesor de Matemáticas"

Esparza-Rodríguez, E., & Lizarde-Flores, E. (2021). MTSK en la apropiación de una ingeniería didáctica aplicada sobre problemas multiplicativos de fracciones. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 200–207). Congresseme.

del programa del posgrado; se focaliza en la enseñanza de Problemas Multiplicativos de Fracciones en 6° grado de Educación Primaria.

A partir de la revisión de literatura y de las experiencias de prácticas docentes, así como del análisis sobre la estructura de las lecciones en los actuales libros de texto de Matemáticas, se realiza el planteamiento del problema de la investigación. Las aportaciones de algunos autores permiten reconocer dificultades que enfrentan los profesores, para la enseñanza de problemas multiplicativos de fracciones. Además, se plantea hasta donde las lecciones que se proponen en los libros de texto de Matemáticas de 6° grado, orientan al profesor y qué tareas le dejan a cargo.

La investigación se realiza con y para profesores de 6° grado de Educación Primaria, con el desarrollo de una propuesta de enseñanza que promueva en sus alumnos procesos de construcción de conocimiento matemático con un sentido conceptual y procedimental, ante una de las tareas más complejas, que es la enseñanza y aprendizaje de las fracciones en problemas multiplicativos. Para lograr consolidar una propuesta de enseñanza, que se pueda sugerir a los profesores con dificultad para enseñar problemas multiplicativos de fracciones, se define la Ingeniería Didáctica como metodología, para la cual se diseñaron 12 Situaciones Didácticas. Finalmente se muestra la sesión 8 "Calcula el área: Fracción x Fracción" con la intención de ejemplificar el diseño que caracteriza a cada de las clases concebidas. Su configuración está basada en el tipo de interacciones que el alumno puede tener con el contenido u objeto matemático que sustenta la Teoría de las Situaciones Didácticas.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Lizarde, Hernández y Loera (2015) hablan sobre "Problemas de enseñanza en las Matemáticas", que consisten en los desafíos y las dificultades que manifiestan los profesores cuando enseñan un contenido matemático. La investigación emerge del reconocimiento de problemas de enseñanza que enfrentan los profesores con respecto al contenido de problemas multiplicativos que involucran números fraccionarios, presente en el currículo de Matemáticas para nivel Primaria.

Teniendo en cuenta a Moriel-Junior, Wielewski, y Carrillo (2019), Billstein, Libeskind y Lott (2008), concuerdan que los docentes enfrentan dificultades para la enseñanza de la multiplicación y división con fracciones. Esto produce prácticas en las que se favorece la memorización de los algoritmos de estas operaciones. Hasta cierto punto, se entiende la presencia de ciertas dificultades, sobre todo con la división de fracciones, debido a que se caracteriza por ser poco intuitiva y, de acuerdo con Ma (2011) "…la división por fracciones, la operación más complicada, con los números más complejos, se puede considerar un tema en la cima de la aritmética" (p. 71) Las dificultades que enfrentan los docentes limitan las condiciones para proponer situaciones y tareas de aprendizaje oportunas y promover la construcción del conocimiento matemático de los alumnos.

Es importante señalar que los profesores de nivel primaria, además del Plan y Programas de estudios 2011, su referencia principal y material de apoyo para trabajar los contenidos de Matemáticas, es el libro de texto gratuito de "Desafíos Matemáticos". En la Figura 1, se muestra la estructura de las lecciones en las que se abordan problemas multiplicativos de fracciones en 6° grado, para el caso de División de fracción entre un número natural:

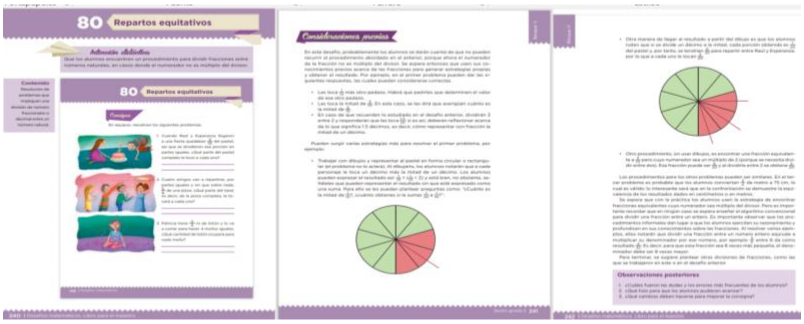


Figura 1. Lección del Libro de texto, Desafíos Matemáticos de 6° de Educación Primaria.

El contenido que se aborda es “Resolución de problemas que implica una división de número fraccionario o decimal entre un número natural” (SEP, 2011, p. 146); y tiene como intención didáctica: “Que los alumnos encuentren un procedimiento para dividir fracciones entre números naturales, en casos donde el numerador no es múltiplo del divisor.” (SEP, 2011, p.146).

Las actividades de la lección consisten en el planteamiento de tres problemas contextualizados con objetos divisibles diferentes (pizzas, pasteles y listones), en las que se encuentra la interpretación de la fracción como parte-todo. En esencia, en cada uno de los problemas sólo se cuestiona sobre el resultado de una división en el que se implica un número fraccionario que tiene que ser dividido entre un número entero. La característica de estas operaciones es que el numerador de la fracción no es múltiplo del número entero entre el cual se está dividiendo.

En las consideraciones previas, se sugiere al profesor reconocer el uso que los estudiantes pueden hacer de sus conocimientos para desarrollar los procedimientos de resolución de cada uno de los problemas. Además, plantea algunas de las respuestas o procedimientos que los alumnos pueden manifestar y utilizar, incluso se propone la posibilidad de trabajar con representaciones gráficas como el modelo circular.

En base a lo descrito anteriormente, se pude reflexionar que: las lecciones de los libros de texto sólo presentan problemas en los que se pone en juego el contenido que se explicita abordar, se trata de un único tipo de tarea a realizar. A pesar de que en éstas se realizan sugerencias, en las consideraciones previas, que describen posibles procedimientos y respuestas de los alumnos, no se hace presente el cómo favorecer la construcción y reflexión del contenido matemático y poco abona para resarcir las dificultades que enfrenta el profesor, en el análisis de la lección y en la explicitación del proceso de construcción de un conocimiento matemático por parte de los alumnos, lo cual requiere de la puesta en juego de su conocimiento especializado sobre matemáticas y su enseñanza.

Ante ello, el problema focaliza como sujetos de investigación a los profesores, al plantear las dificultades que presentan cuando enseñan problemas multiplicativos de fracciones, producidas como consecuencia de un deficiente análisis matemático del concepto, que imposibilita cargar de sentido a los procedimientos de multiplicación y división de fracciones en todos sus tipos. Esto sugiere la necesidad de proponer lecciones de clase que orienten al profesor en cómo enseñar este contenido matemático y poner atención en los conocimientos especializados de matemáticas que pone en juego para interpretarlas, entenderlas y aplicarlas.

Para lo anterior, se plantea la conveniencia de emplear el modelo MTSK, como herramienta de análisis, para reconocer y describir los conocimientos especializados que los profesores de matemáticas, pueden reflejar en la enseñanza de cualquier contenido matemático. El MTSK "Se ha diseñado pensando en la implementación para la investigación sobre el conocimiento que tenga el profesor sobre la matemática en general, de conocimientos matemáticos particulares y de su aprendizaje" (Carrillo, Escudero, y Flores, 2014, p. 16). Por lo tanto, es factible distinguir el modelo MTSK, como el marco para identificar y analizar de forma integral, los conocimientos especializados que involucran los profesores en la apropiación de una propuesta de enseñanza configurada en una Ingeniería Didáctica sobre problemas multiplicativos con fracciones.

Objetivo General

Analizar la manera en que profesores de 6° grado, ponen en juego su conocimiento especializado de matemáticas para interpretar, comprender y aplicar una Ingeniería Didáctica sobre problemas Multiplicativos con Fracciones.

Pregunta Principal de Investigación

¿De qué manera los profesores de 6°, ponen en juego su Conocimiento Especializado de Matemáticas para apropiarse y poner en práctica una Ingeniería Didáctica aplicada a problemas multiplicativos con Fracciones?

MARCO TEÓRICO

Teoría de las Situaciones Didácticas

La Teoría de las Situaciones Didácticas propuesta por Brousseau (2007), es el sustento teórico de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995). Consiste en una teoría para la enseñanza de las matemáticas a partir del análisis de las interacciones entre: docente, alumnos y saberes. Las situaciones, es el modelo bajo el cual pueden interactuar los sujetos y el saber, a través de un medio, que determina un conocimiento, Brousseau (2007) afirma que "[…] ofrecen al sujeto la posibilidad de construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso de génesis artificial" (p.16), y establece un sistema de situaciones:

-Acción: Los alumnos interactúan con el medio, demostrando la habilidad para resolver problemas poniendo en práctica los conocimientos que ya tienen, para la toma de decisiones bajo el esquema de solución que el mismo alumno diseñe. "Para un sujeto 'actuar' consiste en elegir directamente los estados del medio antagonista en función de sus propias motivaciones. Si el medio reacciona con cierta regularidad el sujeto puede llegar a relacionar algunas informaciones con sus decisiones." (Brousseau, 2007, p. 24)

-Formulación: La información que se generó con las interacciones de los alumnos con el medio, representan un conocimiento que pretende en esta fase, poner en juego la "[…] capacidad del sujeto para retomarlo (reconocerlo, identificarlo, descomponerlo, y reconstruirlo en un sistema lingüístico)" (Brousseau, 2007, p. 24) los estudiantes intercambian mensajes, discuten y reestructuran las temáticas empleadas.

-Validación: "Los esquemas de la acción y de la formulación conllevan procesos de corrección, ya sea empírica o apoyada en aspectos culturales, para asegurar, la pertinencia, adecuación, adaptación, conveniencia de los conocimientos movilizados." (Brousseau, 2007, p. 26) El alumno que participaba como informante de procedimientos, se convierte en proponente que expone la forma de su proceder y, el anterior receptor, ahora es un oponente.

-Institucionalización: Brousseau (2007), señala que los procesos desarrollados por los alumnos durante las fases anteriores, encaminan hacia la necesidad de que los conocimientos que se pusieron en juego, pasen a la formalización, permitiendo la conformación de los saberes matemáticos, es expuesto y explicado por el profesor, apoyándose y utilizando los recursos concebidos en las fases anteriores.

Problemas Multiplicativos de Fracciones

Carrillo (2016) propone las diferentes formas en las que se estructuran los problemas multiplicativos: de razón (razón, razón-reparto y razón-agrupamiento), de comparación multiplicativa (comparación-multiplicación y comparación-división) y de combinación multiplicativa (producto cartesiano-multiplicación y producto cartesiano-división) y los caracteriza de la siguiente manera:

> …la multiplicación se corresponde con aquellos problemas en los que se conoce el valor de una parte y el número de partes, y se busca el valor total. La división, por el contrario, se corresponde con aquellos problemas en los que se conoce el total y el valor de una parte y se busca el número de ellas, o se conoce el total y el número de partes y se busca el valor de una parte. (p. 39)

Llinares y Sánchez (1997), definen la fracción concretizando que proviene de Fractio, es decir, romper, "[…] por un lado se presenta como 'la división de un todo en sus partes' o 'las partes de un todo'. Por otro lado, dentro de los significados propios de aritmética, aparecen acepciones tales como 'número quebrado', 'expresión que indica una división que no puede efectuarse', etc." (p. 18). Billstein, Libeskind y Lott (2008) conceptualizan la multiplicación entre fracciones y hace referencia a la definición de multiplicación cuando opera con números naturales a través de una suma iterada o repetida: "Para motivar la definición de multiplicación de números naturales, usamos la interpretación de multiplicación como suma repetida. Bajo esa acepción, de suma repetida, podemos interpretar 3 (3/4) como sigue: $\mathbf{3\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}=2\,\frac{1}{4}}$ El modelo de área, según los mismos autores es otra manera de calcular este producto:

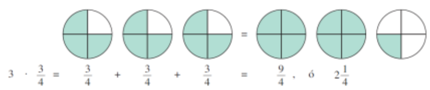


Figura 2. Modelo de áreas.

MTSK: Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

Shulman (1986) caracteriza el conocimiento de los profesores, al mencionar 7 categorías que lo conforman, una de ellas es el "Conocimiento didáctico del contenido", que es la base para el desarrollo de modelos con carácter de especificidad para analizar el conocimiento del Profesor de Matemáticas. En primer término, se encuentra el equipo de trabajo encabezado por Ball (2005), que propone un modelo para organizar y operativizar el conocimiento del profesor de matemáticas a través de investigaciones sobre la práctica que denominan Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT), conformado por dos dominios: conocimiento de la materia (MK) y conocimiento didáctico del contenido (PCK) (Ball, Hill y Bass 2005).

Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán del grupo SIDM , consideran las categorías desarrolladas por Sulman (1986), y el modelo MKT de Ball, Hill y Bass (2005), y proponen un modelo analítico que pone como objeto de estudio el conocimiento del profesor de matemáticas; el MTSK, el cual lo definen "…partimos de la base de varias asunciones, que condicionaron el modelo desarrollado. La primera de ellas es la especialización. Entendemos que la especialización del conocimiento de un profesor deriva de su profesión (profesor de matemáticas) en que la enseñanza es un elemento definitorio, la segunda asunción es la especificidad del modelo a la enseñanza de las matemáticas…" (Muñoz-Catalán, y otros, 2015, p. 1807) Se conforma por dos dominios que integran conocimientos de diferente naturaleza: Conocimiento Matemático (MK) y conocimiento didáctico del contenido (PKC).

METODOLOGÍA

La ingeniería didáctica es una metodología de investigación que consiste en "…un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático. […]" (Douady, 1995, p. 241); consta de las siguientes fases que describe Artigue (1995): 1. Análisis preliminar: El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza, el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución; 2. Diseño y análisis a priori: Desde la concepción se inicia con el proceso de validación interna de la Ingeniería Didáctica; es la parte de la investigación en la que se toman decisiones importantes sobre las variables que se van a involucrar en el diseño de las Situaciones Didácticas, además el análisis a priori permite tener un control de los significados que se están manejando. Es así, que se tiene un parte descriptiva y predictiva; 3. Experimentación: Es la realización de la ingeniería; 4. Análisis a posteriori y evaluación: Se relaciona toda la información recolectada a lo largo del proceso de análisis a priori y de la experimentación y se complementa con otros datos recolectados con la aplicación de algunos instrumentos. Las hipótesis realizadas en las primeras fases se comprueban.

Sujetos y Actividades para la investigación

La Ingeniería Didáctica está diseñada para que la apliquen 2 profesores de 6° de educación primaria, con las siguientes características: Ser un docente que esté frente a un grupo de 6° grado, tener mínimo 4 años de servicio y que haya trabajado con quinto y sexto grado en ciclos escolares anteriores.

Las actividades que se plantean realizar conforme a las fases de la metodología y al tipo de información que se quiere recuperar en coherencia con el objetivo de la investigación, se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 1. Proceso de la ingeniería y actividades a realizar

Periodo	Actividades
Octubre-diciembre 2020	Análisis preliminares
Marzo y abril de 2021	Diseño de la Ingeniería Didáctica
Mayo- junio de 2021	Análisis a priori
Mayo-junio 2021	Elaboración de las entrevistas
Junio 2021	Entrega de la Ingeniería y aplicación de entrevistas
Junio-septiembre 2021	Experimentación o aplicación de la Ingeniería Didáctica
Junio- septiembre 2021	Observación de las video clases y elaboración de entrevistas
Julio-diciembre 2021	Análisis a posteriori y evaluación

Las categorías para analizar la información recuperada, se establecen en los subdominios del modelo MTSK, con el propósito de estudiar el conocimiento especializado que los profesores de matemáticas ponen en juego para realizar cada uno de estos procesos.

RESULTADOS PARCIALES

Hasta este momento de la investigación, el avance que se puede describir es el diseño de las 12 Situaciones Didácticas que conforman la Ingeniería Didáctica, distribuidas en 13 sesiones de clase y se está consolidando el análisis a priori, dando paso a su experimentación.

Se realizó un análisis de los contenidos y aprendizajes presentes en el Plan y Programas de estudios 2011 para Educación Primaria y se tomaron como base las aportaciones de Ma (2011) para conformar el paquete de conocimientos y la secuencialidad de las clases.

Cabe mencionar que, como valoración del desarrollo secuencial, se propone abordar en la ingeniería didáctica un contenido más avanzado que no se establece para educación primaria, se trata de la división de número entero entre una fracción y la división de fracción entre fracción. El siguiente esquema refleja la secuencialidad de complejización que se les da a los temas que conforman el campo de los problemas multiplicativos de fracciones:

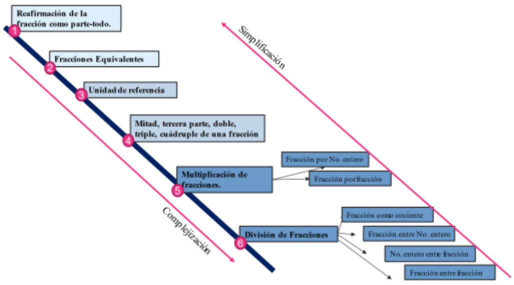


Figura 3. Complejización de los temas

Se inicia con un contenido sobre la representación de fracción como parte todo en contextos de medición de longitudes, de superficies y de capacidades, se retroalimentan los conocimientos sobre las características de las fracciones. En seguida se avanza con el tema de “Unidad de referencia” y “Mitad, tercera parte, doble, triple de una fracción” consideradas como situaciones introductorias. Se continua con la “Multiplicación de fracción por un número entero”, “Multiplicación de fracción por fracción”, se llega a la “División de fracción entre número entero”, “División de entero entre fracción” y “División de fracción entre fracción”; éstos dos últimos temas de la división, no forman parte del currículo de Educación primaria, pero con el desarrollo que se propone para el proceso de aprendizaje, permite que los alumnos lleguen a su comprensión. La ingeniería didáctica se presenta a los profesores y alumnos en forma de lecciones de libro de matemáticas, especificando apartados para cada tipo de tarea que se propone realizar. En la Figura 4, se presenta el ejemplo de la clase 8 a manera de una infografía:

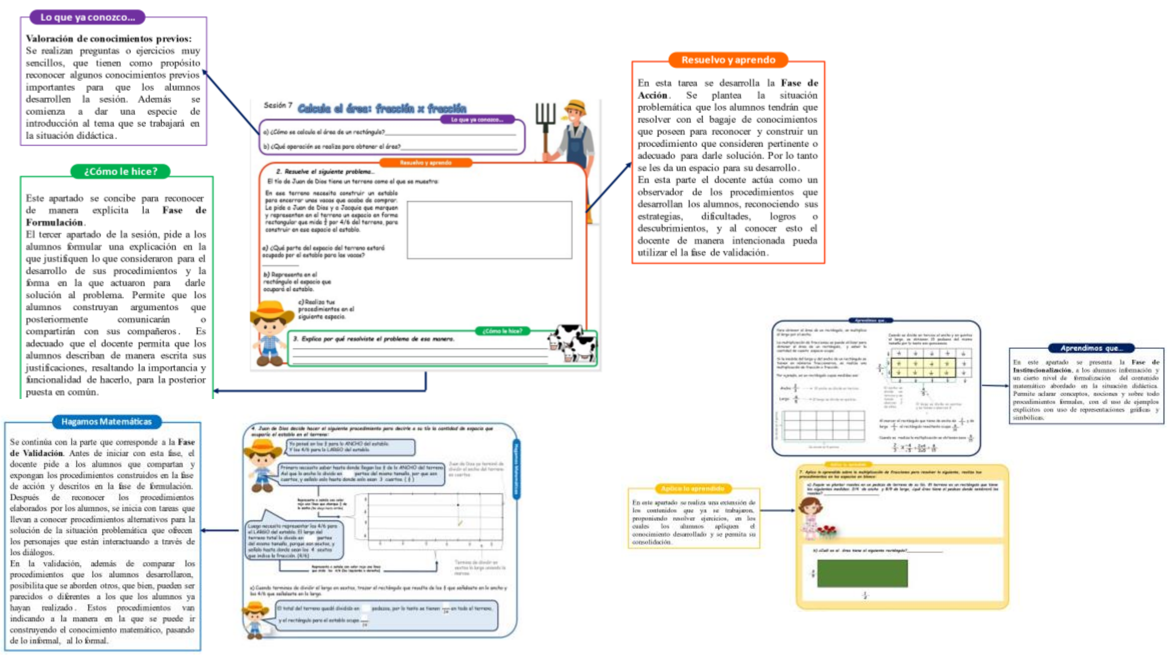


Figura 4. Infografía clase 8

CONCLUSIÓN

La ponencia da cuenta del avance que se tiene en la investigación cuyo objetivo consiste en analizar el conocimiento especializado que ponen en juego el profesor matemáticas de 6° grado, en la apropiación de una Ingeniería Didáctica que considera como contenido Matemático los problemas multiplicativos con Fracciones, ya que es, desde la literatura, uno de los contenidos matemáticos más complejos tanto para su enseñanza como para su aprendizaje. En su diseño se parte de la consideración de que la estructura de las lecciones de los actuales libros de texto de Matemáticas no favorece los procesos de construcción de conocimientos sobre el tema, lo cual genera la necesidad de que se expliciten otros tipos de tareas que mejoren el sistema de sugerencias didácticas para los profesores y, en consecuencia, contribuyan a la mejora de los aprendizajes de los alumnos.

La estructura de la Ingeniería Didáctica, al recuperar el paquete de conocimientos sobre el tema matemático que se investiga permitirá consolidarse como una propuesta de enseñanza que realmente sea un apoyo y orientación para el profesor que enfrenta dificultades en la enseñanza de este contenido, sobre todo porque favorece la explicitación sobre la gradualidad y complejización del saber y recupera un enfoque explícito de enseñanza (la Teoría de las situaciones didácticas) que en conjunto contribuyen a la construcción de un conocimiento matemático por parte de los alumnos.

Referencias

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Bogotá: Una empresa docente

Ball, D. L., Hill, H., y Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for teaching. *American educator*, 14-43

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Billstein, R; Libeskind, S. y Lott, J. (2008). *Matemáticas. Un enfoque de resolución de problemas para maestros de educación básica*. México: López Mateos editores.

Carrillo, J., Escudero, Escudero, Flores, E. (2018). El uso del MTSK en la formación inicial del profesor de matemáticas de primaria. *For-Mate. Revista de análisis matemático y didáctico para profesores*, 16-26.

Lizarde, E.; Hernández, F y Loera, S. (2015). “Problemas de enseñanza”: una alternativa para la construcción del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En *Memoria electrónica del congreso nacional de investigación educativa.* Vol 2, No. 1

Llinares, S., & Sánchez, V. (1997). *Fracciones. La relación parte-todo.* España: Síntesis

Ma. L. (2010) *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales. La comprensión de las matemáticas fundamentales que tienen los profesores en China y los EE.UU*. Chile: Academia chilena de ciencias.

Moriel_Junior, J., Wielewski, G., & Carrillo, J. (2019). Meta-análise sobre Conhecimento para Ensinar Divisão de Frações. *Bolema*, 988-1026

Muñoz-Catalán , M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. Á., y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *LA GACETA DE LA RSME*, 1801-1817.

SEP. (2014). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Sexto grado*. México: Autor.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y Enseñanza: Fundamentos de la Nueva Reforma. Profesorado. *Revista de currículum y formación del profesorado*, 9, 2, 1 – 30

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO ENVOLVIDO NA ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS PARA O ENSINO DE FUNÇÃO AFIM

Specialized knowledge involved in problem creation for teaching related function

Souza, A. C. R. [a]; Moriel-Junior, J. G. [b]

[a, b] Instituto Federal de Mato Grosso, Brasil

Temática: 3 – MTSK em diferentes temas e etapas

Resumo. O objetivo é identificar o conhecimento especializado expresso na elaboração de problemas para o ensino de função afim por meio da Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação via Resolução de Problemas. Adotamos o marco teórico Mathematics Teachers' Specialized Knowledge – MTSK numa abordagem qualitativa, analítica e documental, cujos dados foram episódios extraídos de três dissertações de mestrado que utilizaram tal metodologia, os quais analisamos a primeira etapa de preparação do problema. Nossos resultados detectaram conhecimentos especializados nas categorias de estratégia, técnica, tarefas e exemplos (4 elementos), recursos de ensino (1), definições, propriedades e seus fundamentos (1), registros de representação (1) e expectativas de aprendizagem (1). Em trabalhos futuros discutiremos o MTSK envolvido nas demais etapas, sua visão integradora e um produto educacional associado.

Palavras-chave. MTSK, Elaboração de problemas, Função afim, Resolução de problemas.

Abstract. The aim is to identify the specialized knowledge expressed in the elaboration of problems for the teaching of related function through the Teaching-Learning-Assessment via Problem Solving Methodology. We adopted the theoretical framework Mathematics Teachers' Specialized Knowledge – MTSK in a qualitative, analytical and documental approach, whose data were episodes extracted from three master's dissertations that used this methodology, which analyzed your first stage (preparation of the problem). Our results detected specialized knowledge in the categories of didatics strategies (4 elements), teaching resources (1), definitions, properties and their foundations (1), representation registers (1) and learning expectations (1). In future works we will present the MTSK involved in the ten steps of the methodology in question, its integrative vision and an associated educational product.

Keywords. MTSK, Problem creation, Related function, Problem solving.

INTRODUÇÃO

Muitos estudos têm sido realizados para caracterizar o conhecimento especializado de professores para ensinar matemática em diversas etapas educativas e em diferentes contextos (Moriel Junior & Duarte, 2020). Analisar a mobilização deste conhecimento em metodologias diferenciadas e ativas é importante visando aprimorar a formação docente com múltiplas perspectivas. É neste sentido que desenvolvemos este trabalho que é parte de um estudo mais amplo de mestrado em Educação Profissional e Tecnológica, IFMT ProfEPT, Brasil, realizado pelo primeiro autor sob orientação do segundo autor.

O objetivo é identificar o conhecimento especializado expresso na elaboração de problemas para o ensino de função afim por meio da Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação via Resolução de Problemas. Para tanto, analisamos três dissertações de Ensino de Matemática que abordam a Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas – MEAA (Onuchic, 2013) sobre o conteúdo de função afim.

Souza, A. C. R., & Moriel-Junior, J. G. (2021). Conhecimento especializado envolvido na elaboração de problemas para o ensino de função afim. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 208–215). Congresseme.

MARCO TEÓRICO

Conhecimento Especializado de Professores de Matemática

Adotamos o Mathematics Teachers' Specialized Knowledge – MTSK (Carrillo et al., 2014) como modelo teórico para descrever o conhecimento especializado que pode (ou deve) ter um professor para ensinar matemática. Ele contempla dois domínios de conhecimento com três subdomínios cada e, no centro, as crenças sobre Matemática sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática. O modelo está apresentado na Figura 1 com siglas originais em inglês (Carrillo-Yañez et. al., 2018) e as categorias respectivas serão detalhas nos resultados para otimizar o texto.

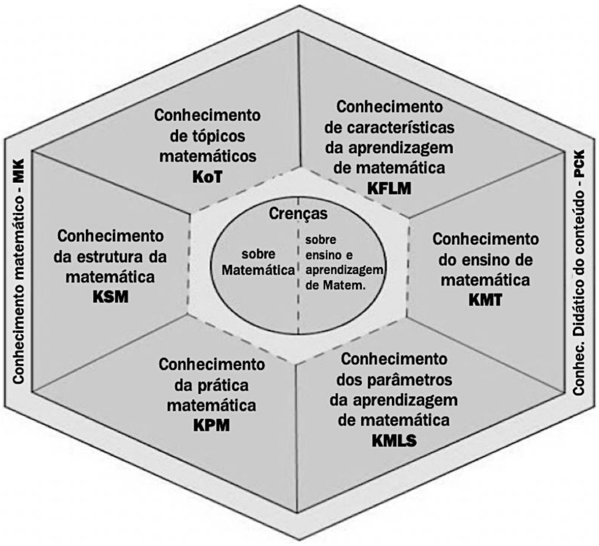


Figura 1. MTSK original traduzido (Carrilo et al., 2014; Moriel Junior & Wielewski, 2017)

Entendemos que é a partir do conhecimento do que possui um professor que ele fará o seu planejamento didático e desenvolverá as suas atividades de ensino buscando o aprendizado de seus alunos na Matemática (Gonzáles, 2014). Assim, há necessidade de analisar, dentro do contexto desta pesquisa, as especificidades desse conhecimento especializado associado (ou necessário) ao planejamento necessário para ensinar via resolução de problemas.

Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da resolução de problemas

Nos anos de 1980, o National Council of Teachers of Mathematics apresentou por meio da Agenda para Ação recomendações para o ensino da Matemática com destaque à resolução de problemas nas escolas. Isso levou diversos autores a pensar uma maneira de implementar esta proposta. Dentre as propostas que surgiram, destacamos a da pesquisadora Lourdes de La Rosa Onuchic do Brasil que uniu os conceitos de aprendizagem, avaliação e ensino e formou o termo composto ensino-aprendizagem-avaliação dando origem à Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação via Resolução de Problemas (Onuchic, 2013).

Na proposta metodológica de resolução de problema o foco é integrar a avaliação ao ensino melhorando a aprendizagem. As palavras ensino e aprendizagem estão integradas de tal forma que favoreça a construção do conhecimento pelo aluno, com o auxílio do professor como mediador durante a aplicação do planejamento. A dinâmica do processo é concomitante com o resultado final reorientando as práticas docentes quando necessário. A metodologia é sugerida em um modelo, no qual integram dez etapas, com um conceito atual de avaliação, formativa e continuada, construída durante a resolução do problema, conforme Tabela 1.

Tabela 1. Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação Através da Resolução de Problemas

Etapa 1	Preparação do problema
Etapa 2	Leitura individual
Etapa 3	Leitura em conjunto
Etapa 4	Resolução do problema
Etapa 5	Observar e incentivar
Etapa 6	Registro das resoluções na lous
Etapa 7	Plenária
Etapa 8	Busca do consenso
Etapa 9	Formalização do conteúdo
Etapa 10	Proposição e resolução de novos problemas

METODOLOGIA

Trata-se de uma pesquisa qualitativa, de cunho analítico, interpretativo e bibliográfica por (Marconi & Lakatos, 2003). A fonte de dados uma amostra de três dissertações selecionadas com os critérios: abordar o conteúdo de função afim; utilizar a metodologia de resolução de problemas proposta por Onuchic (2013); conter um ou mais relatos de experiência docente do tipo PaP-eRs conforme critérios de Bertram (2014). A obtenção dos dados foi alcançada após leituras sucessivas do material, extração de episódios das pesquisas. A análise de dados foi feita por meio do instrumento de análise iMTSK (Moriel Junior, 2021) e da análise de conteúdo para identificar conhecimentos especializados em cada uma das etapas da Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação. Neste artigo analisamos apenas as evidências (não incluindo indícios) de conhecimento na Etapa 1 - Preparação do problema que é "selecionar ou elaborar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento" (Onuchic, 2013).

A codificação dos dados se deu por meio de uma sequência alfabética. Adotamos os códigos TEC para o tipo de ensino tecnológico; EF para ensino fundamental final e EM para ensino médio, seguido de ponto final e das duas primeiras letras iniciais do nome do autor(a) do documento: "Se" para Seckler (2010); "Si" para Simon (2014), "Me" para Mello (2018). Por fim, após um traço, inserimos as páginas nas quais retiramos os trechos. Foram selecionados e analisados seis trechos, cujos resultados estão na seção seguinte.

RESULTADOS

Iniciamos apresentando os problemas utilizados para ensinar função afim extraídos dos trabalhos analisados, conforme as Figuras 2, 3 e 4 a seguir.

Problema: A partir de dados coletados pelos alunos cujas famílias plantam milho, organizamos um quadro. Se todas as plantações fossem iguais e tivessem a mesma produtividade, como poderia ser completado o quadro II abaixo?

Aluno	Hectares plantados	Sacas de milho colhidas	Média de preço da venda da saca (R$)	Gasto desde o preparo do solo até a colheita (R$)
Aluno 1	2	150	20,00	400,00
Aluno 2	3		20,00	
Aluno 3	4		20,00	
Aluno 4		450	20,00	1.200,00
Aluno 5	12	900	20,00	

Figura 2. Problema sobre uma plantação de milho extraído de Seckler (2010)

Nelson pretende viajar de férias com a família para o Nordeste. Como pretende ir de avião, pensa em alugar um carro para se deslocar nesses dias. Então pesquisou algumas possibilidades, donde selecionou as seguintes:

I - pagar uma diária de R$ 75,00, livre de quilometragem;

II – pagar R$0,50 por quilometro percorrido, sem diária.

Ajude Nelson a definir qual a melhor proposta para utilizar um carro por dois dias e percorrer 200 km.

Figura 3. Problema sobre locação de transporte para férias extraído de Simon (2014)

Em nossa cidade há três lojas credenciadas as operadoras de celular: Loja da TCHAU, Loja da ESCURO e Loja da TUM .

Um estudante do IFPR visando diminuir suas despesas com telefone móvel e manter suas necessidades atendidas fez uma pesquisa referente a planos pós-pago, conforme abaixo:

OPERADORA ESCURO

Plano	Valor Mensal		Valor por min Extra	
50 min	R$	42,99	R$	0,50
100 min	R$	68,99	R$	0,50
150 min	R$	109,99	R$	0,50

OPERADORA TUM

Plano	Valor Mensal		Valor por min Extra R$	
50 min	R$	40,00	R$	0,75
100 min	R$	66,00	R$	0,75
150 min	R$	105,00	R$	0,75

OPERADORA TCHAU

Plano	Valor Mensal		Valor por min Extra R$	
50 min	R$	39,99	R$	0,89
100 min	R$	64,99	R$	0,89
150 min	R$	100,99	R$	0,89

Em todas as operadoras são oferecidas as seguintes vantagens:

**2GB de internet;*

**Torpedos ilimitado para qualquer operadora;*

**Ligações à ilimitadas para celular de mesma operadora;*

**Whatsap ilimitado.*

Figura 7: Problema Gerador

Analisando as informações obtidas pelo estudante, responda as questões abaixo:

a) Explique como é feito o cálculo do valor a ser pago de uma fatura de telefonia celular em planos pós-pagos, conforme o disposto?

Figura 4. Problema gerador sobre custos de planos de telefonia extraído de Mello (2018)

A análise dos seis trechos, conforme Tabela 2, mostra a mobilização de três subdomínios de conhecimentos especializados segundo o MTSK.

Tabela 2. Resultados da análise com iMTSK

Trecho do documento	*Análise dos Pesquisadores*		
Manifestação	*Conhecimento de...*	*associado a...*	*que consiste em...*
EF.Se-21 Com base no levantamento feito pelos alunos, referentes aos produtos cultivados em suas propriedades, bem como das informações fornecidas pelo técnico da EMATER, foram elaboradas atividades para quatro encontros de cinco horas-aula cada um, em	Ensino de Matemática (KMT)	Estratégias, técnicas tarefas e exemplo	Uma estratégia para adquirir informações e elaborar atividades para quatro encontros de cinco horas-aula cada um, priorizando a elaboração de problemas envolvendo funções e gráficos.

que problemas sobre funções e gráficos foram criados e propostos aos alunos.			
EF.Se-58 O conteúdo dos problemas propostos vai depender da profundidade com que o assunto deve ser abordado na série em questão, dos livros-texto utilizados, dos conhecimentos pré-requisitos que os alunos já tenham.	Ensino de Matemática (KMT)	Recursos de ensino	Critérios para definição de problemas: os livros-texto utilizados, a profundidade do assunto abordado na série e os conhecimentos que os alunos já tenham.
	Parâmetros de Aprendizagem da Matemática (KMLS)	Nível de desenvolvimento conceitual e procedimental esperado	
EM.Si-44 Nesse questionário, foram feitas perguntas para obter informações sobre suas dúvidas expectativas e dificuldades encontradas na disciplina de matemática, entre outras. Com os dados desses questionários iniciou-se o segundo passo da pesquisa, que foi a elaboração das questões-problema a serem propostas aos alunos.	Ensino de Matemática (KMT)	Estratégia, técnica, tarefas e exemplos	Uma estratégia para coletar dados dos alunos e elaborar questões problemas: aplicar um "questionário para obter informações sobre dúvidas expectativas e dificuldades encontradas na disciplina de matemática"
TECMe-55 Com intuito de elaborar um problema bem abrangente, será feita uma revisão do conteúdo de função afim.	Tópicos de Matemática (KoT)	Termo	O termo Função afim
2TECMe-61 Para a preparação do problema gerador e para a explanação da aula, é pertinente uma breve observação no livro didático de Matemática utilizado no Ensino Médio do IFPR - Campus Palmas.	Ensino de Matemática (KMT)	Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos	Uma etapa de preparação da Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação: breve observação no livro didático para a preparação do problema gerador e explanação da aula
TECMe-62 Como o tema escolhido para a proposta didática foi função afim (definição, construção do gráfico, crescimento e decrescimento, coeficiente angular e linear, zeros da função), o problema gerador proposto precisaria englobar ou pelo menos propiciar a discussão sobre o tema e os itens a serem abordados.	Ensino de Matemática (KMT)	Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos	Uma característica do problema gerador: precisa englobar ou, pelo menos, propiciar uma discussão sobre o tema e os itens correlatos
	Tópicos de Matemática (KoT)	Definições, propriedades e seus fundamentos	Termos associados a função afim: definição, construção do gráfico, crescimento e decrescimento, coeficiente angular e linear, zeros da função

Percebe-se que para a elaboração do problema gerador associou-se ao Conhecimento dos Tópicos de Matemática (KoT), na categoria Definições, propriedades e seus fundamentos uma vez que apareceram termo(s) matemáticos: definição de função afim, construção do gráfico, crescimento e decrescimento, coeficiente angular e linear e zeros da função. Estes termos, nesta etapa, são utilizados para escolha ou elaboração de um problema amplo que proporcione uma discussão sobre o tema a serem abordado. Embora não tenha sido identificado explicitamente nestes dados, aspectos de contexto podem estar envolvidos, como os “fenomenológicos, significados de definições, de conceitos e de procedimentos matemáticos, juntamente com seus fundamentos teóricos correspondentes, bem como, exemplos que caracterizem aspectos do tópico abordado” (Moriel Junior, 2014, p. 4).

Outro conhecimento em destaque, na elaboração do problema gerador é o Conhecimento do Ensino de Matemática (KMT) na categoria Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos específicos em Matemática utilizadas para o ensino e a exploração do conteúdo de função afim. Conhecer característica do conteúdo no livro didático também foi incluído. Este foi o subdomínio mais presente na amostra e esteve vinculado à coleta de informações junto aos alunos, para elaborar atividades considerando o tempo em que o conteúdo seria utilizado (horas-aula), para analisar a elaboração de questões problemas a partir de dados coletados (conhecimentos prévios) em observação ao livro didático. Inclui também uma característica importante do problema gerador: precisa englobar ou, pelo menos, propiciar uma discussão sobre o tema e os itens correlatos.

A mobilização do Conhecimento dos Parâmetros de Aprendizagem de Matemática (KMLS) diz respeito às expectativas de aprendizagem (o que se espera que o aluno aprenda durante o estudo do conteúdo), um conhecimento curricular que interfere nos critérios para elaboração dos problemas geradores. Na Tabela 3, apresentamos uma visão geral dos oito conhecimentos MTSK identificados na amostra.

Tabela 3. Distribuição de MTSK identificado na preparação de problema via MEAA

Conhecimento especializado	*Categorias ou descritor*	*Preparação de problema*
Tópicos de Matemática (KoT)	Procedimentos	-
	Definições, propriedades e seus fundamentos	1
	Registros de representação	1
	Fenomenologia e aplicações	-
Estrutura de Matemática (KSM)	Conexões de simplificação	-
	Conexões de complexização	-
	Conexões auxiliares	-
	Conexões transversais	-
Prática Matemática (KPM)	Metaconhecimento relativo ao fazer matemático (definir, demonstrar, usar heurísticos, exemplificar)	-
Ensino de Matemática (KMT)	Teorias de ensino	-
	Recursos de ensino (físicos e digitais)	1
	Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos	4
Características de Aprendizagem da Matemática (KFLM)	Teorias de aprendizagem	-
	Potencialidades/ dificuldades de aprendizagem	-
	Interação do estudante com o conteúdo	-
	Interesses e expectativas	-
Parâmetros de Aprendizagem da Matemática (KMLS)	Resultados esperados de aprendizagem	1
	Nível de desenvolvimento conceitual ou procedimental esperado	-
	Sequenciação de tópicos	-

Nota: Tabela adaptada de Sánchez-Garcia et al. (2021).

Detectamos que o problema gerador deve ser feito ou elaborado com muito cuidado, pois a partir dele toda as outras etapas da metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problema se desencadeará. Conforme descreve Mello (2018), "inicia-se a explicação a partir do problema gerador, desenvolvendo todo conteúdo a partir dele, e a cada tópico do conteúdo busca-se o problema gerador" (p. 68). Esta conexão se reflete nos conhecimentos mobilizados identificados nesta etapa investigada.

CONCLUSÃO

Neste trabalho foi possível avançar na compreensão sobre qual é o conjunto de conhecimentos especializados envolvidos na elaboração de problemas para o ensino de função afim por meio da Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação via Resolução de Problemas. Neste trabalho, com a referida metodologia, e potencial analítico deste pesquisador foi possível identificar 8 conhecimentos de 3 subdomínios em 5 categorias. Isso mostra que a etapa de planejamento, de elaboração do problema gerador em tal metodologia leva em consideração conhecimentos sobre o que e como vai ser desenvolvida a atividade de ensino do conteúdo de função afim, bem como, sua adequação para a série.

Entretanto, os resultados não exaurem todas as possibilidades de elementos que podem ou devem ser utilizados nesta fase em que o professor se propõe a selecionar ou elaborar um problema a ser usado em sala de aula visando que os alunos construam novos conceitos, princípios ou procedimentos matemáticos. Por isso, mais estudos devem ser realizados, não só na abordagem documental como fizemos, mas avançar para a empírica.

Referências

Carrillo, J.; Climent, N.; Contreras, L. C.; Montes, M. Á.; Escudero, D.; e Medrano, E. F. (2014) *Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., e Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

González, N. R. (2014) *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Marconi, M. A.; e Lakatos, E. M. (2003) *Fundamentos da metodologia científica*. São Paulo: Atlas.

Mello, A. L. de. (2018) *Resolução de problemas e avaliação conceitual: uma experiência no ensino de função afim*. Dissertação de Mestrado. Pato Branco, PR: UTFPR.

Moriel Junior, J. G. (2021). Rede de Conhecimentos Especializados Ativados em Formação Docente para Responder a um Porquê Matemático sobre Divisão de Frações. *Acta Scientiae*, *23*(2), 193-224. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6205

Moriel Junior, J. G. (2014). *Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações*. Tese de doutorado. Cuiabá: Universidade Federal de Mato Grosso. http://www.ufmt.br/ufmt/unidade/userfiles/publicacoes/79e3fe1d66c40ff5d174dc92c84fc777.pdf

Moriel Junior, J. G., e Duarte, E. B. (2020). Mapeamento global da produção sobre Mathematics Teacher's Specialized Knowledge no Google Scholar até 2019. *Research, Society and Development*, *9*(11), e71191110526. https://doi.org/10.33448/rsd-v9i11.10526

Moriel Junior, J. G., e Wielewski, G. D. (2017). Base de conhecimento de professores de matemática: do genérico ao especializado. *Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas*, *18*(2), 126-133. https://doi.org/10.17921/2447-8733.2017v18n2p126-133

Onuchic, L. (2013). A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos? *Revista Espaço Pedagógico*, *20*(1). https://doi.org/10.5335/rep.2013.3509

Sánchez-Garcia, J. A.; Flores-Medrano, E.; Rebollar, L. A. H.; Juarez-Ruiz, E. (2021) ¿Cómo impacta el conocimiento que tiene un profesor acerca de la teoría APOE sobre su conocimiento especializado? *Revista multidisciplinar*, *3*(1), 55-67. https://doi.org/10.23882/DI2159

Seckler, D. M. (2010) *O ensino de função polinomial do 1º grau na oitava série do ensino fundamental: um trabalho com situações do cotidiano*. Dissertação de Mestrado. Rio Grande do Sul: Centro Universitário Franciscano.

Simon, P. R. (2014) A *metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação por meio da resolução de problemas, como alternativa pedagógica para a compreensão do conceito de função afim por alunos do ensino médio*. Dissertação de Mestrado. Santa Maria: Centro Universitário Franciscano.

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE PROFESORES DE MATEMÁTICA EN FORMACIÓN INICIAL SOBRE LA NOCIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD

Specialized knowledge of the prospective teacher of mathematics on the classic notion of probability

Cruz-Quesada, J. [a]; Alfaro-Carvajal, C. [b] y Guillen-Oviedo, H. [c]

[a,] Escuela de Matemática, Universidad Nacional, Costa Rica; [b] Escuela de Matemática, Universidad Nacional, Costa Rica, [c] Escuela de Matemática, Universidad Nacional, Costa Rica

Temática: 3 - MTSK en diferentes temas y etapas

Resumen. En este trabajo se presenta los resultados de un estudio cualitativo que tiene como propósito caracterizar el conocimiento de profesores de matemática en formación inicial de la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA) sobre la noción clásica de probabilidad. Se proponen indicadores para caracterizar el conocimiento relacionado con el Knowledge of Topics (KoT) del Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), mediante un instrumento compuesto por 6 tareas de probabilidad. Se deduce que la mayoría de los sujetos evidenciaron conocimiento de las categorías del KoT.

Palabras clave. Probabilidad, Profesores, Conocimiento, MTSK

Abstract. In this paper presents the results of a qualitative study that aims to characterize the knowledge of mathematics teachers training at the Universidad Nacional de Costa Rica (UNA) on classical probability. Knowledge indicators are proposed to characterize *Knowledge of Topics* (KoT) of *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK), through an instrument made of 6 probability tasks. It is deduced that most of the subjects showed knowledge of the categories KoT.

Keywords. Probability, Teachers, Knowledge, MTSK.

INTRODUCCIÓN

El tema de probabilidad es parte de los Programas de Estudio de Matemáticas en la educación primaria y secundaria de Costa Rica (Ministerio de Educación Pública (MEP), 2012). Los temas de probabilidad apuntan al desarrollo del pensamiento probabilístico y habilidades para afrontar el azar, lo impredecible y la incertidumbre. Además, se trabaja desde la noción clásica y frecuencial de la probabilidad.

Estos programas buscan desarrollar ciertas habilidades específicas con el enfoque clásico de probabilidad, las cuales son: (a) identificar y representar puntos y eventos muestrales de un experimento; (b) deducir propiedades básicas sobre la probabilidad; (c) conocer las limitaciones y alcances de la definición clásica; (d) calcular la probabilidad de un evento como la razón entre el número de resultados favorables entre el número de casos posibles; y (d) usar la probabilidad para favorecer en la toma de decisiones (MEP, 2012).

El docente, encargado de promover el desarrollo de estas habilidades, debe dominar el contenido matemático a enseñar, para luego poder transmitirlo al estudiantado (Batanero, 2009). Uno de los principios de la enseñanza de la matemática indicada por el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) es que los profesores deben poseer

Cruz-Quesada, J., Alfaro-Carvajal, C., & Guillen-Oviedo, H. (2021). Conocimiento especializado de profesores de matemática en formación inicial sobre la noción clásica de probabilidad. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 216–223). Congresseme.

un conocimiento amplio de las matemáticas que están enseñando, y poder aprovechar ese conocimiento en sus labores de enseñanza. Por ello, existe una variedad de modelos o teorías que buscan conceptualizar el conocimiento matemático y didáctico del docente de matemáticas. En esta dirección, Climent (2019) señala que la línea de investigación del conocimiento del profesor constituye un área importante para la comunidad científica en educación matemática.

La investigación propuesta es un aporte a la línea de investigación del conocimiento del profesor de matemáticas, específicamente, en el modelo MTSK. El objetivo de este trabajo es caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la carrera de Enseñanza de la Matemática de la (UNA) sobre la noción clásica de probabilidad, en el subdominio del KoT. Esta carrera contempla tres cursos relacionados con los conocimientos en probabilidad: (1) estadística y probabilidad; (2) inferencia estadística; y (3) didáctica de la estadística.

MARCO TEÓRICO

Esta investigación tiene dos referentes teóricos principales, el KoT un subdominio del conocimiento matemático del MTSK (Carrillo et al., 2018) y, las propuestas teóricas adoptadas en el campo de la teoría de probabilidad (Skorokhod, 2005). Por tal motivo, se realiza una conexión de los componentes teóricos del KoT y la probabilidad clásica.

De acuerdo con Carrillo et al. (2018), el KoT describe el conocimiento que posee el profesor de matemáticas sobre los temas que enseña, encierra un conocimiento profundo y amplio del contenido matemático por parte del docente. Asimismo, combina el conocimiento que se espera que los estudiantes aprendan con una comprensión más acentuada, formal y rigurosa. Este subdominio posee cuatro categorías: (1) la fenomenología y aplicaciones: (2) las definiciones, propiedades y sus fundamentos; (3) los registros de representación; y (4) los procedimientos.

La definición clásica de probabilidad o regla de Laplace fue dada por Abraham de Moivre en 1718 y luego fue depurada por Pierre-Simon Laplace en 1814 (Batanero, 2020). El enfoque clásico de probabilidad surge de experimentos aleatorios cuyos sucesos elementales sean equiprobables, y la probabilidad de ocurrencia del suceso es el número de casos favorables dividido entre el total de casos posibles (regla de la Laplace). Según Batanero (2005), esta definición es objeto de cuestionamientos, ya que es circular y únicamente ofrece una regla práctica para el cálculo de probabilidades.

Elementos del conocimiento de la noción clásica de probabilidad en el KoT

De acuerdo con Carrillo et al. (2018), la categoría de fenomenología y aplicaciones se refiere al conocimiento que posee el profesor de matemáticas sobre los contextos en los que se puede vincular un objeto matemático, así como los aspectos epistemológicos y los orígenes de este. Skorokhod (2005) indica que las aplicaciones de la noción clásica de probabilidad se dan en los juegos de azar que incluyen cartas, dados y lanzamiento de monedas. Estos experimentos aleatorios son considerados ideales, que pueden repetirse un gran número de veces bajo condiciones similares, suponiendo que las circunstancias de la realidad no varían de modo que se pueda establecer la equiprobabilidad en los posibles resultados, lejano a contextos cotidianos (Borovcnik y Kapadia, 2014; Godino et al., 1987; Gómez, 2012).

En la categoría de definiciones, propiedades y sus fundamentos, se incluye el conocimiento del profesor para describir el conjunto de propiedades adecuadas para definir un objeto matemático, así como el conocimiento para deducir y establecer principios fundamentales o propiedades referentes a un tópico (Vasco et al., 2017;

Carrillo et al., 2018). El conjunto de propiedades y características que subyacen a la definición clásica de probabilidad son: la equiprobabilidad y el cociente de casos favorables entre casos posibles. Asimismo, se consideran las siguientes propiedades: (1) la probabilidad de un evento es un número entre 0 y 1; (2) la probabilidad de un evento seguro es 1; y (3) la probabilidad de un evento imposible es 0.

Otro componente considerado en el KoT es sobre los distintos registros de representación que conoce el profesor, para un tema matemático (Escudero, 2015; Carillo et al., 2018). Para Batanero (2005), al resolver un problema sobre probabilidad se encadenan una serie de funciones semióticas de conocimiento que el docente de matemáticas debe tener presentes. Algunos ejemplos están vinculados a la representación de puntos muestrales de un experimento (diagrama de árbol, tablas, abreviaturas, pares ordenados); registros aritméticos (porcentajes, fracciones, decimales); o lenguaje natural (menos o más probable que).

Finalmente, la categoría de procedimientos incluye aquellos saberes prácticos sobre el trabajo matemático, como los algoritmos convencionales y alternativos que se ponen de manifiesto en un determinado contenido (Escudero, 2015; Liñan et al., 2016). Abarca el conocimiento sobre las operaciones habituales (¿Cómo se hace?); las condiciones suficientes para resolver (¿Cuándo se puede hacer/utilizar?); la fundamentación algorítmica (¿por qué se hace así?) y las características del objeto resultante. Batanero (2005) indica que los procedimientos en el campo de la probabilidad clásica se hallan mediante la enumeración de casos favorables y posibles para determinar su cantidad y calcular la probabilidad mediante un cociente, tomando en cuenta la equiprobabilidad de los sucesos. Otros procedimientos aludidos son la combinatoria o el análisis a priori de la estructura del experimento.

METODOLOGÍA

La investigación tiene un enfoque cualitativo, de alcance descriptivo. Las personas participantes son 16 estudiantes de cuarto año de la carrera Enseñanza de la Matemática de la UNA. Todos los participantes han aprobado el curso de estadística y probabilidad en el que se estudia la probabilidad clásica. Para la recolección de la información se elaboró un cuestionario con seis tareas sobre probabilidad clásica, el instrumento se aplicó durante el primer semestre del 2021 mediante la presencialidad remota.

Para la construcción del cuestionario, se realizaron las siguientes etapas: (1) sensibilización teórica y metodológica provenientes de investigaciones del MTSK, investigaciones sobre el enfoque clásico de probabilidad y revisión de los Programas de Estudio de Matemáticas en Costa Rica; (2) adaptación de las categorías del KoT y elaboración de indicadores de conocimiento; (3) validación del instrumento e indicadores mediante la triangulación interna; (4) validación del instrumento por juicio de expertos, revisado por seis especialistas en educación matemática y en estadística, provenientes de universidades de España, Chile y Costa Rica; y (5) elaboración de la versión final del cuestionario e indicadores de conocimiento.

Para el análisis de la información se utilizó el análisis del contenido que otorga un conjunto sistemático de procedimientos para categorizar, examinar y codificar los datos (Cohen et al., 2007). Para analizar las respuestas de los sujetos se utilizaron los indicadores de conocimiento, entendidos como frases que permiten explorar evidencias de conocimiento en las respuestas de los sujetos. Para hacer el registro de todas las respuestas, los sujetos fueron codificados empleando los números del 01 al 16 para indicar el número de sujeto y los números del 1 al 6 para indicar el número de tarea, algunas tareas se dividen en varias preguntas a, b o c. Por ejemplo, 08-6a indica la respuesta del octavo sujeto en la tarea seis de la pregunta a. Para cada sujeto se hizo una revisión exhaustiva de sus respuestas de manera que se le asignaba con 1 o 0 la presencia o ausencia, respectivamente, de los indicadores de conocimiento.

RESULTADOS

Los resultados se presentan considerando las cuatro categorías del KoT y una descripción de las tareas. En cada una de las categorías se presenta la cantidad de sujetos que evidenciaron en sus respuestas conocimiento de los indicadores planteados.

Categoría 1: fenomenología y aplicaciones

En la tabla 1, se muestran las tareas 1 y 3 del cuestionario

Tabla 1. Tareas 1 y 2 del cuestionario

Tarea 1	Tarea 2
Considere la siguiente situación hipotética: Profesora: un contexto en donde se puede aplicar la definición clásica de probabilidad es en el lanzamiento de una moneda. Existen dos posibilidades, que caiga escudo o corona, es decir, se tiene un 50% de probabilidad de obtener un escudo o una en un lanzamiento. Estudiante 1: Entonces profesora, como la otra semana tengo examen de matemáticas y únicamente hay dos posibilidades que apruebe o que repruebe, entonces tengo un 50% de probabilidad de aprobar el examen. Estudiante 2: Profe, si una persona se hace una prueba médica para detectar si tiene o no una enfermedad, al haber dos posibilidades que esté sano o que esté enfermo, entonces, la persona tiene un 50% de probabilidad de estar enfermo. ¿Son correctos los ejemplos proporcionados por los estudiantes?	¿En qué situaciones matemáticas o contextos se puede aplicar la definición clásica de probabilidad? En caso de considerar que no se puede aplicar, explique el por qué y brinde un ejemplo. Fundamente su respuesta. No debe proporcionar ejemplos descritos en este instrumento.

Se estableció un único indicador de conocimiento para esta categoría: conocer situaciones aleatorias en las que se pueden establecer puntos muestrales equiprobables. La tarea 1, presenta tres experimentos aleatorios, el contexto mencionado por la profesora es correcto, y el mencionado por los estudiantes 1 y 2, incorrectos; pues, dichas situaciones no pueden ser repetidas bajo condiciones similares, a diferencia del lanzamiento de una moneda donde sí se pueden anticipar todos los posibles resultados y asignar la misma probabilidad. En la tarea 3, los sujetos debían mencionar situaciones en la que podía situar el significado clásico.

En la tarea 1, 11 sujetos indican que las situaciones planteadas por los estudiantes 1 y 2 no son equiprobables, sin embargo, únicamente 8 sujetos evidencian conocimiento en sus respuestas para la situación del estudiante 1, y 8 sujetos para la respuesta del estudiante 2. En términos generales, los sujetos que evidencian conocimiento indicaron que la situación de aprobar o reprobar un examen podría variar por diversas razones, y que al aplicar una prueba médica para detectar si una persona tiene o no una enfermedad, no son resultados simétricos. A continuación, se presenta una respuesta representativa para esta tarea:

> *06-1:* No. El ejemplo que brinda la profesora hace referencia a eventos equiprobables. En cambio, para el estudiante 1 y 2 sus eventos no tienen la misma probabilidad de ocurrencia por diversas situaciones.

Para la tarea 3, 11 sujetos mencionaron situaciones que incluían cartas, dados, juegos de lotería, tómbolas y monedas; experimentos aleatorios de modo que sus resultados posibles fueran simétricos y finitos. A continuación, se muestra una respuesta representativa:

08-3: Un contexto donde se podría aplicar está definición sería por ejemplo al estar jugando un juego de mesa en donde esté usando un dado legal, ya que, todas las caras del dado tienen la misma probabilidad de salir. Otro caso podría darse al jugar la lotería o bingo, si la tómbola no está truncada, la definición probabilidad se cumple

Categoría 2: definiciones, propiedades y sus fundamentos

Para esta categoría se contemplaron dos tareas. En la primera, a los sujetos se les solicitó brindar una definición sobre la probabilidad clásica. Los indicadores de conocimiento propuestos para definir el objeto en estudio son: (1) conocimiento sobre el cociente del número de resultados favorables y el número de todos los resultados posibles al definir el significado clásico de probabilidad y (2) conocimiento de que los puntos muestrales del espacio muestral tienen que ser equiprobables al definir el significado clásico de probabilidad. Para el primer indicador, 11 sujetos evidencian conocimiento sobre el cociente y, para el segundo indicador, 6 sujetos aluden a la equiprobabilidad. Se destaca que 3 sujetos mencionan la propiedad de que la probabilidad es un número entre 0 y 1. En la figura 1, se presenta una respuesta representativa del sujeto 06-2 que manifiesta conocimiento para los indicadores (1) y (2):

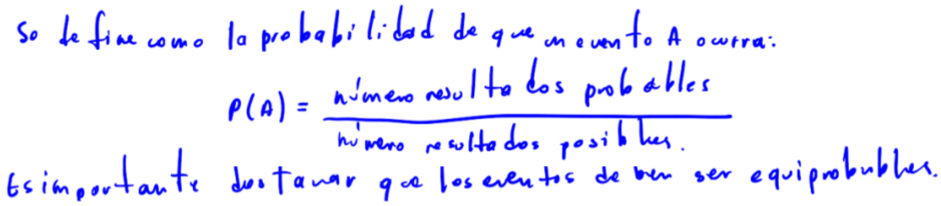


Figura 1. Respuesta del sujeto 06-2

En la segunda tarea se les pidió a los sujetos enunciar un evento seguro e imposible y calcular la probabilidad de estos. La tarea incluye 3 urnas (a, b y c), en cada urna hay bolas de color rojo y azul idénticas en tamaño y peso, lo que varía en cada urna es la cantidad de bolas rojas y azules. En la tabla 2, se presenta los indicadores de conocimiento para esta tarea y la cantidad de sujetos que evidenciaron conocimiento.

Tabla 2. Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento para la categoría 2: definiciones, propiedades y sus fundamentos

Indicador de conocimiento	Tarea 6
Conocimiento para deducir un evento seguro.	14
Conocimiento para deducir un evento imposible.	15
Conocimiento para deducir la probabilidad de un evento seguro	10
Conocimiento para deducir la probabilidad de un evento imposible	11

Como se puede apreciar en la tabla 2, hay sujetos que sí deducen eventos seguros e imposibles, pero, algunos no argumentan el por qué toman los valores de 0 y 1. A continuación, se presentan las respuestas de dos sujetos que evidencian conocimiento:

07-6b: Un evento seguro es sacar una bola de color azul o una de color rojo ya que todas las que están en cada urna son de esos colores 15/15

16-6c: Sacar una bola de color negra de cualquiera de las urnas la probabilidad de este evento es 0, ya que dentro de las urnas no existe una bola negra, sino que solo rojas y azules.

Categoría 3: registros de representación

Se revisaron las respuestas de los sujetos en las seis tareas para examinar las representaciones aritméticas o verbales utilizadas al referirse a la probabilidad de un evento. Se destaca que 15 sujetos utilizan, al menos, dos distintos registros para representar la probabilidad de un evento, el más frecuente es el uso de la representación fraccionaria. Solamente un sujeto utiliza una única representación para la probabilidad, la fraccionaria.

En la primera y segunda pregunta de la tarea 4, se les solicitó a los sujetos que representaran todos los puntos muestrales del experimento de lanzar, al mismo tiempo, una moneda y un dado de caras enumerados del 1 al 6; e indicar si conoce alguna otra forma distinta para representar los posibles resultados del mismo experimento. Para esta tarea se establecieron los siguientes indicadores de conocimiento: (1) representar todos los puntos muestrales del experimento; (2) conocer, al menos, dos formas distintas para representar todos los puntos muestrales de un experimento; y (3) interpretar los puntos muestrales del experimento dentro del registro de representación utilizado.

Todos los sujetos evidencian conocimiento para los indicadores (1) y (2) y 15 sujetos muestran conocimiento para el indicador (3), las representaciones utilizadas son: notación por extensión o pares ordenados (14 sujetos), diagrama de árbol (11 sujetos), tabla de doble entrada (5 sujetos), diagrama de Venn (1 sujeto), representación fraccionaria (3 sujetos) y dibujos (1 sujeto). En la figura 2 se presenta una respuesta que evidencia conocimiento:

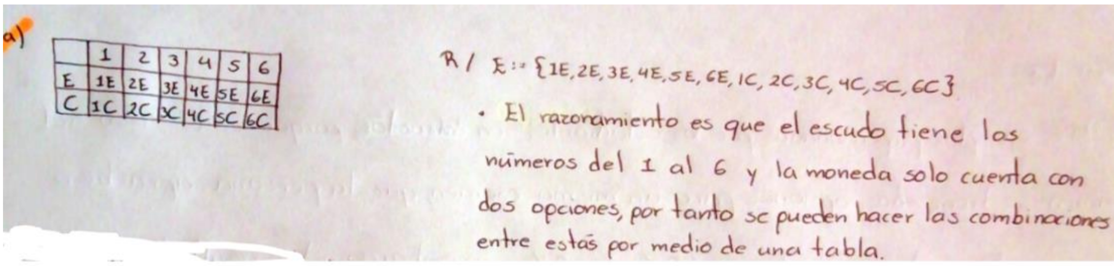


Figura 2. Representación por extensión y tabular del sujeto 09-4

Como se evidencia en la figura 2, el sujeto 09-4 utiliza una tabla de doble entrada para formar el espacio muestral, al hacer uso de esta representación le permite contar el número de puntos muestrales bajo el principio de multiplicación. Asimismo, el sujeto utiliza una representación por extensión, simboliza el espacio muestral del experimento compuesto por los dos experimentos simples, enumerando del 1 al 6 para el dado, y las letras E (escudo) y C (corona) para la moneda, para un total de 12 posibilidades.

Categoría 4: procedimientos

En la tabla 3, se muestran las dos tareas utilizadas para caracterizar el conocimiento en esta categoría

Tabla 3. Tareas 5 y 6a del cuestionario

Tarea 5	Tarea 6a
En un juego se utiliza una ruleta dividida en 4 sectores circulares de igual área, numerados con 1, 2, 3 y 5; y una urna con 3 bolas rojas (R) y 1 bola azul (A). El jugador gana si la ruleta se detiene en un número par y si saca una bola azul. Un estudiante, describe los posibles resultados: $\{1A; 2A; 3A; 5A; 1R; 2R; 3R; 5R\}$. Y determina que la probabilidad de ganar es de $\frac{1}{8}$ ¿Es correcto el procedimiento del estudiante?	En un juego consiste en sacar una bola de alguna de las tres urnas: Urna A: 2 bolas rojas y 1 bola azul Urna B: 4 bolas rojas y 3 bolas azules Urna C: 3 bolas rojas y 2 bolas azules ¿Cuál de las tres urnas tiene mayor probabilidad de ganar?

Se establecieron tres indicadores de conocimiento: (1) conocer las condiciones suficientes para aplicar la definición clásica en el cálculo de probabilidades; (2) aplicar el procedimiento del cociente de casos favorables entre casos posibles en el cálculo de la probabilidad de un evento; y (3) conocer las características del resultado en el cálculo de la probabilidad de un evento.

En la tarea 5, 11 sujetos evidencian conocimiento para el indicador (1), al manifestar que no es posible utilizar la definición clásica porque en el espacio muestral no se están considerando todos los casos posibles, o bien, que cada punto muestral no es equiprobable, y de esos sujetos, 7 procesan correctamente el algoritmo de casos favorables entre posibles, evidenciado conocimiento para el indicador (2) y 8 sujetos conocen las características del resultado dentro del contexto, lo cual muestra conocimiento para el indicador (3). Además, dos sujetos demuestran conocimiento para la categoría de registros de representación al enumerar todos los puntos muestrales del experimento por extensión. En la figura 3, se muestra una respuesta representativa del sujeto 08-5, que evidencia conocimiento para los indicadores (1), (2), (3) y el indicador (1) de la categoría de registros de representación.

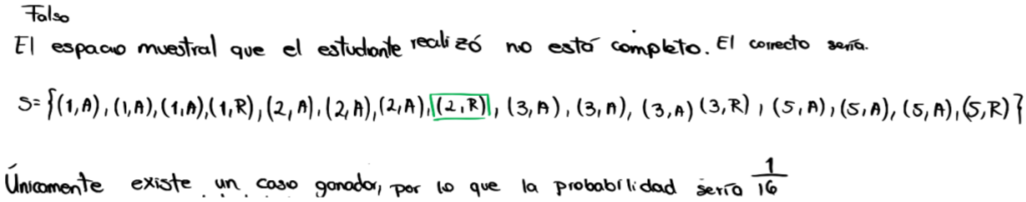


Figura 3. Respuesta del sujeto 08-5.

Para la tarea 6a, todos los sujetos evidencian conocimiento sobre las condiciones suficientes para aplicar la definición clásica (indicador 1) y sobre las características del resultado (indicador 3); 15 sujetos aplican la regla de Laplace (indicador 2). En la figura 4, se presenta una respuesta representativa del sujeto 13-6.

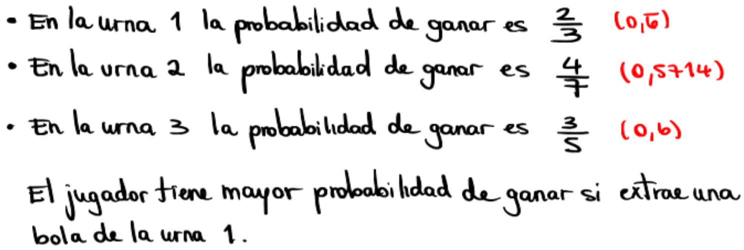


Figura 4. Respuesta del sujeto 13-6.

CONCLUSIONES

El análisis de las respuestas de los sujetos nos ha permitido determinar que evidencian conocimiento de las categorías del KoT consideradas para la noción clásica de probabilidad. En las categorías de registros de representación y de procedimientos se presentaron la mayor cantidad de evidencias de conocimiento y en la categoría fenomenología y aplicaciones hubo menos evidencias. Además, se han encontrado algunas respuestas de sujetos que han dado interpretaciones diferentes a las esperadas, pero correctas, como la independencia de eventos. Las evidencias de conocimiento halladas en este estudio pueden ser insumos para considerarse en el abordaje de la noción clásica de probabilidad en la formación inicial de profesores de matemática en la UNA y en programas formativos que contemplen estos temas.

Referencias

Batanero, C. (2009). Retos para la formación estadística de los profesores. *Actas do II Encontro de probabilidades e estatística na escola*, 7-21. https://www.academia.edu/26336328/Retos_para_la_formaci%C3%B3n_estad%C3%ADstica_de_los_profesores

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *8*(3), 247-263. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2096616

Batanero, C. (2020). Probability teaching and learning. In S. Lerman (ed), *Encyclopedia of mathematics education*, (p.p. 682-686). Springer. (Ed.). https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0

Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability. In J. Chernoff and B. Sriraman (Eds). *Probabilistic Thinking* (p.p. 7-34). Springer. https://www.springer.com/gp/book/9789400771543

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Climent, N. (2019). El conocimiento del profesor. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 107-110). Salamanca, España: Ediciones Universidad Salamanca. https://eusal.es/index.php/eusal/catalog/book/978-84-1311-073-8

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6th ed.). Londres: Routledge

Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria* (Tesis Doctoral). Universidad de Huelva, España.

Godino, J. D., Batanero, C., y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

Gómez, M. (2012). *Elementos de estadística descriptiva* (4ta ed.) San José, Costa Rica: EUNED.

Liñan, M.M., Contreras, L.C., Barrera, V. (2016). Conocimiento de los Temas (KoT). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 12 -20). SGSE: Huelva.

Ministerio de Educación Pública (MEP) (2012). *Programas de estudio de matemáticas I, II y III ciclos de la educación general básica y ciclo diversificado*. San José, Costa Rica: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles Standards and for School Mathematics*. Reston, United States: The National Council of Teachers of Mathematics.

Skorokhod, V. (2005). *Basic principles and applications of probability theory*. Springer Science & Business Media. Moscow, Russian

Vasco, D., Moriel, J. Jr. y Contreras, L.C. (2017). Subdominios del mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK). En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 29-37). Huelva: CGSE. http://redmtsk.udec.cl/wp-content/uploads/avances-utilidades-y-retos-del-modelo-mtsk.pdf

EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL CONTENIDO DE ECUACIONES MANIFESTADO EN LA EVALUACIÓN DE DOCENTES DE PRIMARIA CHILENOS

The professional Knowledge of the content of equations manifested in the evaluation of Chilean elementary teachers

Reyes-Escobar, M. [a]; Moreno A. [a]

[a] Universidad de Granada

Temática: 3 – MTSK en diferentes temas y etapas

Resumen. En este trabajo profundizamos el conocimiento profesional del contenido matemático que manifiestan los docentes en ejercicio en su evaluación docente. Se utiliza una metodología cualitativa, específicamente estudios de casos. Se analiza un portafolio de un docente que enseña ecuaciones en cuarto año básico con las categorías y subcategorías del Conocimiento Especializado del profesor de matemáticas hacia el conocimiento didáctico del contenido. Corresponde a una investigación en curso de una revisión de documentos elaborados en un portafolio, por profesores que enseñan matemáticas, en la evaluación docente de los años 2016 y 2017, donde realizan el primer módulo enfocados a dos tareas: planificación y reflexión sobre las características y dificultades de sus estudiantes. Se presentan las categorías del PCK encontradas en la tarea de planificación hacia la enseñanza de ecuaciones.

Palabras clave: Evaluación docente, conocimiento profesional, ecuaciones, conocimiento didáctico.

Abstract. In this work we deepen the professional knowledge of the mathematical content manifested by practicing teachers in their teaching evaluation. A qualitative methodology is used, specifically case studies. A portfolio of a teacher who teaches equations in fourth grade is analysed with the categories and subcategories of the Specialized Knowledge of the mathematics teacher towards the didactic knowledge of the content. It corresponds to an ongoing investigation of a review of documents prepared in a portfolio, by teachers who teach mathematics, in the teacher evaluation of the years 2016 and 2017, where they carry out the first module focused on two tasks: planning and reflection on the characteristics and difficulties of his students. The PCK categories found in the planning task towards teaching equations are presented.

Keywords. Teacher evaluation, professional knowledge, equations, specialized knowledge.

INTRODUCCIÓN

La inclusión del álgebra y la importancia que tiene este contenido, es lo que nos motiva a evaluar los conocimientos para la enseñanza del álgebra en profesores en ejercicio de educación primaria. Las nuevas bases curriculares han incorporado el álgebra en los últimos años en Chile y han establecido nuevos Objetivos de Aprendizaje (OA).

Chile comienza a ser miembro de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico desde enero del 2010. Para lograr este ingreso tuvo que modificar sus políticas de cooperación y de desarrollo con el fin de mejorar el bienestar económico y social de sus ciudadanos (Serrano, 2015). Modifica el sistema educativo y sigue lineamientos internacionales frente a las mediciones de estudiantes y docentes, tratando de eliminar la brecha existente.

Reyes-Escobar, M., & Moreno A. (2021). El conocimiento profesional del contenido de ecuaciones manifestado en la evaluación de docentes de primaria chilenos. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 224–230). Congresseme.

Dentro de las mediciones de docentes, el desarrollo profesional docente en Chile se mide a través de cinco instrumentos: portafolio, pauta de autoevaluación, entrevista por un evaluador par, informe de referencia de terceros y prueba de conocimientos disciplinares guiándose por el MBE, este marco define cuatro esferas del adecuado desempeño profesional: planificación y preparación de la enseñanza; creación de ambientes propicios para el aprendizaje; evaluación y reflexión sobre la práctica docente; evaluación sobre las tareas y responsabilidades profesionales (Assael y Pavez, 2008). El Portafolio es el instrumento fundamental de la evaluación docente por el peso que se le asigna al clasificar al profesorado en las categorías de desempeño y también porque es el que presenta el mayor poder discriminatorio (Gajardo, 2020).

Por otra parte, como lo expresan Blanton & Kaput (2005), la incorporación del álgebra en la educación básica primaria no es un asunto trivial, si se considera que, generalmente, los profesores de estos niveles no cuentan con una formación inicial exclusiva en matemáticas (Avalos y Matus, 2010), y que ello podría conducir a que su conocimiento carezca de profundidad disciplinar, imposibilitando comprender el cómo y el porqué del álgebra en primaria.

El tratamiento del álgebra en Chile se inicia mediante el estudio de patrones y desigualdades, para luego iniciar el desarrollo de ecuaciones y expresiones algebraicas mediante el análisis de situaciones asociadas al quehacer diario de los estudiantes. La enseñanza del Álgebra requiere que los docentes anticipen en su planificación: diferentes maneras de comprender e interpretar la variable, dificultades del significado del signo igual, estrategias para las diversas representaciones, obstáculos y errores frecuentes que presentan los estudiantes durante las situaciones de aprendizaje, con el fin de mejorar el proceso de enseñanza. En álgebra conviven diferentes representaciones que ayudan a hacer presentes los objetos matemáticos abstractos (Molina, 2014). Entre ellas se encuentran, principalmente el lenguaje verbal, el simbolismo algebraico y los sistemas de representación tabular, gráfico, numérico, pictóricos y manipulativos.

El contenido de ecuaciones involucra los siguientes objetos matemáticos: situaciones problemas, elementos lingüísticos, conceptos, propiedades y procedimientos. En las planificaciones realizadas por los docentes hacia la enseñanza de ecuaciones en cuarto año básico, se analiza en qué medida aparecen estos objetos: plantean situaciones problemas de ecuaciones; respecto a los elementos lingüísticos, hay que desarrollar un lenguaje natural, una representación pictórica, y lenguaje simbólico; referido a los conceptos, igualdad, operaciones inversas y ecuaciones; las propiedades conmutativa, asociativa, distributiva; y referente a los procedimientos, construir expresiones algebraicas, representar ecuaciones, valorar expresiones algebraicas y verificar la igualdad.

De acuerdo a la problemática de las preguntas de investigación el objetivo de este estudio de caso es: Caracterizar el conocimiento del contenido de álgebra escolar puesto de manifiesto por un docente de enseñanza básica de cuarto año a partir de sus planificaciones en su evaluación docente, hacia el contenido de ecuaciones.

Existen líneas de avance del MTSK relacionadas con: análisis de procesos de construcción de conocimiento especializado en formación inicial y continua; diseño de materiales y tareas para la formación del profesorado basado en el MTSK, implementación y evaluación; conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas; construcción del MTSK; y el MTSK y otros modelos teóricos de didáctica de la matemática.

Relacionados con esta temática abordaremos las investigaciones en la línea de análisis de procesos de construcción (Climent, 2020) de conocimiento especializado en formación continua y aquellas investigaciones que utilizan el MTSK profundizando en el conocimiento del profesor de primaria.

METODOLOGÍA

La metodología utilizada es transversal, descriptiva, cualitativa, y exploratoria para llevar a cabo la investigación y para tener un cuidadoso análisis se utilizará un software cualitativo. Se trata de una investigación transversal, ya que se realiza en un momento determinado entre los años 2016 y 2017 donde se recoge información de un grupo de docentes en ejercicio. El alcance de la investigación es de tipo descriptivo porque se realiza una recolección de información desde las planificaciones y reflexiones escritas por los docentes en torno a un objetivo de aprendizaje (OA). Tiene un enfoque cualitativo porque se realizan categorías de análisis, desde los criterios del MTSK. Posee un carácter exploratorio porque es una problemática que no está claramente definida y existen pocas investigaciones del conocimiento didáctico de docentes en ejercicio.

En el Conocimiento Didáctico del Contenido (MTSK) encontramos tres subdominios: KMT el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, que entrelaza el conocimiento sobre cómo aprenden los estudiantes con el conocimiento del contenido el KFLM es el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas desde la perspectiva de la estrategias para enseñar y el KMLS es el conocimiento de los estándares de aprendizajes de las matemáticas, aludiendo a los objetivos, contenidos, orientaciones metodológicas, criterios de evaluación y recursos establecidos para que el profesor se guíe en su labor de enseñanza. En esta investigación vamos a profundizar en el Conocimiento Didáctico del Contenido y en los conocimientos de cada subdominio (Carrillo, 2013).

Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT): En este subdominio encontramos el conocimiento que tiene el profesor de las vías, recursos y formas de enseñar matemáticas. Así, encontramos el conocimiento que posee de diferentes estrategias y teorías, institucionales o personales de enseñanza de las matemáticas. Y este subdominio incluye las siguientes categorías: Teorías personales o institucionalizadas de enseñanza; recursos materiales y virtuales; y estrategias, técnicas y tareas.

Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)**:** Este subdominio refleja el conocimiento que el profesor posee y ha desarrollado acerca de cómo se aprenden y piensan los contenidos matemáticos, así como de las formas que tienen los alumnos de interactuar con cada contenido. Y este subdominio incluye las siguientes categorías: Teorías de aprendizaje, Fortalezas y dificultades, Formas de interacción de los alumnos y Concepciones de los estudiantes.

Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS): En este subdominio intentamos desarrollar una visión más amplia respecto de la noción de Conocimiento Curricular desarrollada en anteriores modelos. Su contenido abarca, por supuesto, los diferentes grados de profundidad en que un profesor pudiera conocer el currículo oficial, respecto de las matemáticas, vigente en el país en que imparte su docencia, y su concreción, en caso de existir, en un territorio concreto del mismo. Y este subdominio incluye las siguientes categorías: Contenidos Matemáticos, Conocimiento del Nivel de Desarrollo Conceptual y Procedimental y Secuenciación de diversos Temas.

La Evaluación Docente tiene cinco instrumentos de evaluación: portafolio, pauta de autoevaluación, entrevista por un evaluador par, informe de referencia de terceros y prueba de conocimientos disciplinares que se miden con criterios del Marco de la Buena Enseñanza que define los conocimientos y las habilidades mínimas que los docentes deberían cumplir (Roa-Tampke, 2017). Para nuestra investigación nos centramos en el primer instrumento que es un portafolio redactado por docentes con tres módulos: el primer módulo de unidad pedagógica que contiene tres tareas: planificación, evaluación y reflexión; el segundo módulo de una clase grabada de 40 minutos; y el tercer módulo de trabajo colaborativo. Para el desarrollo de esta investigación se analizan dos tareas del primer módulo: planificación y reflexión.

La clasificación de los portafolios se realiza en tres pasos: primero eligiendo el eje de contenido se opta por el eje de Patrones y Álgebra del año 2016 y 2017, se realiza una segunda clasificación por curso y finalmente una tercera clasificación por OA. Por lo tanto, los estudios de casos están relacionados a la cantidad relevante de portafolios por cursos y por OA y nos dará una panorámica del conocimiento didáctico del profesorado relacionado hacia el contenido de ecuaciones.

RESULTADOS

En el ámbito de las categorías de análisis se utiliza lo pertinente del modelo de los criterios por dominios del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas(MTSK) categorizando en la evaluación docente las planificaciones del eje de Patrones y álgebra y como se evidencia el Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático(PCK) del OA 14, de cuarto básico hacia el contenido de Ecuaciones. Se analiza un portafolio de cuarto año que es un producto escrito referente a un contenido matemático, conformada por tres planificaciones y reflexiones en torno al OA 14. Las planificaciones consisten en la descripción de la implementación de una unidad pedagógica de ocho horas, y la reflexión es analizar la experiencia de implementación de su propia práctica pedagógica.

Para realizar este primer estudio de casos, se revisan las planificaciones del módulo uno, a modo de ejemplo y presentamos dominios, subdominios, categorías, subcategorías y descriptores para el análisis de la unidad pedagógica. Cada uno de estos subdominios contempla una serie categorías y subcategorías que van a ir perfilando el conocimiento en cada uno de ellos; y estas categorías las usamos como una herramienta analítica del conocimiento cuando observamos las planificaciones y reflexiones que realizan los docentes hacia su portafolio. La revisión se realiza de acuerdo a las categorías del MTSK relacionadas con los tres subdominios: KMT, KFLM y el KMLS para el análisis. A continuación, presentamos los descriptores de las categorías de cada subdominio del PCK:

Categorías del KMT y sus descriptores **:** *D1.-Teorías personales e institucionalizadas de la enseñanza*: D1.1.- La organización de las definiciones, representaciones, procedimientos, ejemplos y tareas como teoría personal de enseñanza del concepto de ecuaciones.; D2.-*Recursos materiales y virtuales*: D2.1-La enseñanza de experimentos sencillos con una balanza de barra o un balancín simple para lograr equilibrio con varios objetos agregando o sacando la misma cantidad de objetos iguales en ambos lados y D2.2-La enseñanza utilizando: balanza, fichas de algeblock, software relacionados a la enseñanza de ecuaciones; *D3.-Actividades, tareas, ejemplos, ayudas*: D3.1.-Una estrategia para la enseñanza de las representaciones de ecuaciones, D3.2.-Una estrategia sobre analogías entre la igualdad y balanza, D3.3.-Una estrategia para la enseñanza sobre el uso de ejemplos y contraejemplos, D3.4.-Una estrategia para la enseñanza sobre situaciones cotidianas, D3.5.-Criterios para la selección de ejemplos y tareas en la enseñanza de ecuaciones y D3.6.-La traducción entre lenguaje formal y lenguaje cotidiano como parte de la estrategia de enseñanza.

Categorías del KFLM y sus descriptores: *E.1.-Formas de aprendizaje*: E.1.1.-Incluye el conocimiento de estructuras o teorías personales o institucionalizadas sobre el desarrollo cognitivo del estudiante para el contenido de ecuaciones; *E.2.-Fortalezas y dificultades*: E.2.1.-Las dificultades que presentan los estudiantes para comprender el concepto de igualdad, E.2.2.-Las dificultades que presentan para entender el signo de igualdad y desigualdad , E.2.3.-Las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de ecuaciones, E.2.4.-Las dificultades de los estudiantes al trabajar con números incógnitos, E.2.5.-Las dificultades que presenta la comprensión de las letras, E.2.6-Las fortalezas de los estudiantes al evaluar expresiones algebraicas y E.2.7-La facilidad de los estudiantes para representar ecuaciones; *E.3.-Formas de interacción de los alumnos con el conocimiento*: E.3.1-Las técnicas utilizadas para formular ecuaciones, E.3.2.-Los procedimientos alternativos de los estudiantes para modelar las resoluciones de ecuaciones y E.3.3.-El vocabulario cotidiano de los estudiantes en el contexto de las ecuaciones; *E.4.-Concepciones de los estudiantes sobre la matemática*: E.4.1.-El conocimiento sobre las expectativas e intereses de los alumnos con respecto a las matemáticas y el abordaje de ecuaciones.

Categorías del KMLS y sus descriptores: F.1.-*Conocimientos que se requieren enseñar o expectativas de aprendizaje:* F.1.1-Lo estipulado como aprendizaje de los estudiantes sobre ecuaciones simples con el número incógnito y F.1.2-Lo estipulado como aprendizaje de los estudiantes sobre resoluciones de problemas de ecuaciones simples; *F.2.-Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado*: F.2.1-Nivel de desarrollo conceptual de los estudiantes sobre conceptos asociados a igualdad, F.2.2-Nivel de desarrollo conceptual de los estudiantes sobre conceptos asociados a desigualdad, F.2.3-Nivel de desarrollo procedimental de los estudiantes sobre conceptos asociados a igualdad y desigualdad; *F.3.-Secuenciación de los distintos temas* : F.3.1-Ecuaciones simples que involucren adiciones con un número incógnito, F.3.2-Ecuaciones simples que involucren sustracciones con un número incógnito, F.3.3-Formulan ecuaciones con términos antecesor y sucesor, y F.3.4-Resuelve problemas, modelando las soluciones con ecuaciones de un paso que involucran números, en forma concreta o pictórica, manteniendo la igualdad.

Las categorías de análisis se realizan con el software MaxQda se generan las categorías a priori códigos, grupos de códigos que nos permiten visualizar de una manera objetiva lo realizado por los docentes en sus tareas de planificaciones. Se realiza la codificación con el análisis de las planificaciones relacionadas con el OA 14 de Ecuaciones. Este instrumento facilitó la codificación de categorías de forma simple y ordenada, haciendo referencia a la redacción de planificaciones.

Antes de categorizar los resultados es importante tener una visión general de los que establecen las bases curriculares para este nivel y este OA, hay planes y programas de estudio para cada nivel estructurados por unidad. Cada unidad presenta objetivos de aprendizaje con ejemplos de actividades y ejemplos de evaluación. Los ejemplos de actividades tienen para cada objetivo indicadores de evaluación sugeridos, ejemplos de actividades, en cada actividad presenta observaciones al docente, actitudes y habilidades involucradas. Los ejemplos de evaluación presentan indicadores y criterios de evaluación sugeridos.

Las actividades sugeridas en el programa de cuarto año básico para el OA 14, (Ministerio de Educación, 2018): Resuelven ecuaciones simples que involucran adiciones y sustracciones determinando el número que falta; realizan experimentos sencillos con una balanza; determinan con una balanza, en forma pictórica y simbólica; resuelven un problema, en forma concreta o pictórica con una balanza; crean adivinanzas con los números incógnitos; formulan ecuaciones que involucren los términos "sucesor" y "antecesor; resuelven problemas de la vida cotidiana modelando las resoluciones con ecuaciones.

A continuación, se presentan las figuras con categorías y códigos de cada descriptor.

Sistema de códigos

Código	Segmentos cod...
F.3.-Secuenciación de los distintos temas	9
F.2.-Conocimiento del nivel conceptual y procedimental	11
F.1.-Conocimientos que se requieren enseñar o expectativas de	11
E.4.-Concepciones de los estudiantes sobre la matemática	0
E.3.-Formas de interacción de los alumnos con el conocimiento	3
E.2.-Fortalezas y dificultades	7
E.1.-Formas de aprendizaje	5
D3.-Actividades, tareas, ejemplos, ayudas	13
D2.-Recursos materiales y virtuales	5
D1 Teorias personales e institucionalizadas	4

Figura 1. Índice de frecuencia de categorías

La figura 1 muestra las frecuencias de categorías por subdominios, la mayor corresponde al subdominio KMLS (31), la segunda al KMT (22) y la tercera al KFLM (10) porque es a través de los ejemplos mencionados en la planificación con lo que logran que los estudiantes puedan internalizar el concepto de igualdad, de ecuaciones y de incógnita. Se destaca en este subdominio los diferentes grados de profundidad en que un profesor pudiera conocer el currículo oficial, respecto de las matemáticas, el resultado encontrado en este portafolio, donde las siguientes categorías tuvieron una mayor frecuencia en estas planificaciones.

Ejemplos de cada categoría de los distintos subdominios con los párrafos de planificaciones del portafolio relacionados al mayor nivel de frecuencia para los códigos.

Vuelven a leer el ejercicio del inicio de la clase y observan como la docente, por medio de preguntas, representa el problema por medio del uso del modelo de barra, especificando las cantidades del total de lápices y de los de color rojo, mientras que se asocia a la cantidad de lápices azules como la incógnita.

Figura 2. D.3.- Actividades, tareas, ejemplos, ayudas(KMT)

Se aprecia en la figura 2 una estrategia para la enseñanza expresada en la planificación y que está relacionada a las representaciones de ecuaciones, contenido matemático que se requiere enseñar en donde se puede visualizar en el ejemplo la utilización de balanzas en forma concreta y pictórica, también utiliza material concreto para representar la igualdad con fichas de colores.

¿Hay alguna operación básica que podamos resolver? ¿Cómo puedo calcular el valor de X? ¿Cómo conservo la igualdad? ¿Cuál es el valor de la incógnita? ¿Cuál sería la respuesta?

Observan:

$12 + x = 27$

$12 + x - 12 = 27 - 12$

$(12 - 12) + x = 27 - 12$

$0 + x = 15$

$x = 15$

R: En la caja hay 15 fichas rojas.

Figura 3. E.2.- Fortalezas y dificultades (KFLM)

La figura 3 relacionada a las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de ecuaciones, presenta un ejemplo en la planificación con inverso aditivo, porque es una de las mayores dificultades que arrastran los estudiantes, la docente explica cómo solucionar una ecuación sumando el inverso aditivo 12 en ambos lados de la igualdad para encontrar el valor de la incógnita, y el estudiante comprende estos procesos.

Inicio:

Los niños/as escuchan un problema matemático:

Un vendedor tiene en una caja un total de 58 lápices, de los cuales hay cierta cantidad de color rojo y la otra de color azul. Si se sabe que la caja contiene 19 lápices rojos, ¿cuántos lápices azules tiene para vender el caballero?

Responden: ¿Cuántos lápices hay en total? ¿Cuántos tipos de lápices tiene? ¿Cuántos lápices hay de cada uno? ¿Qué es lo que nos preguntan? ¿Qué valor debemos hallar? ¿Cómo lo podemos saber?

Figura 4. F.2.-Conocimiento del Nivel de Desarrollo Conceptual y Procedimental (KMLS)

La figura 4 relacionada al descriptor lo estipulado como aprendizaje de los estudiantes sobre resoluciones de problemas de ecuaciones simples, porque es a través de los ejemplos asociados a la igualdad corresponden a enunciados verbales y conceptuales, con lo que logran que los estudiantes puedan internalizar el concepto de igualdad, de ecuaciones y de incógnita.

Referencias

Assaél, J., & Pavez, J. (2016). La Construcción e Implementación del Sistema de Evaluación del Desempeño Docente Chileno: Principales Tensiones y Desafíos. *Revista Iberoamericana De Evaluación Educativa*, *1*(2). Recuperado a partir de https://revistas.uam.es/riee/article/view/4665

Ávalos, B., & Matus, C. (2010). La Formación Inicial Docente en Chile desde una Óptica Internacional. *Informe Nacional del Estudio Internacional* IEA TEDS-M.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for research in mathematics education*, *36*(5), 412-446.

Carrillo, J., Contreras, L.C., & Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, & I. Segovia (Eds.). *Investigación en Didáctica de la Matemática* (pp. 193- 200). Granada, España: Comares.

Climent, N (14 de noviembre 2020) Investigando sobre el conocimientos del profesor de matemáticas,[archivo de video] Dra. Nuria Climent Rodríguez

Gajardo Ibáñez, L., González González, D., & Gajardo Guevara, L. (2020). La evaluación docente en Chile: la actitud del profesorado hacia los instrumentos que evalúan el desempeño profesional docente.

Molina, Marta (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* 17(3), pp. 559-579.

Ministerio de Educación (2018). Bases Curriculares Primero a Sexto básico. Santiago, Chile: Ministerio de Educación http://www.docentemas.cl/docs/MBE2008.pdf, accessed 15 July 2013.

Roa-Tampe, K. A. (2017). La evaluación docente bajo la óptica del desarrollo profesional: el caso chileno. *Educación y Educadores*, 20(1), 41-61.

Serrano, C. (2 de febrero de 2015). Mejoras en educación. La Tercera. Recuperado de http://www.latercera.com/noticia/opinion/ideas-y-debates/2015/01/895-614967- 9-mejoras-en-educacion.shtml.

EL KOT DEL PROFESOR ACERCA DE FUNCIÓN CUADRÁTICA: DISEÑO DE UN CUESTIONARIO PARA INVESTIGACIÓN

Teacher's knowledge of topics of quadratic function: Design of an instrument for research

Rojas-Seals, V. [a]; Espinoza-Vásquez, G. [b]

[a] Universidad de Concepción; [b] Universidad Alberto Hurtado

Temática: 3 – MTSK en diferentes temas y etapas.

Resumen. En el estudio del KoT, los cuestionaros se muestran como una herramienta útil para acceder a este subdominio. Este trabajo pretende mostrar el proceso de construcción de un cuestionario para acceder al KoT sobre la función cuadrática. Se presentan las etapas de su construcción y las estrategias para el diseño de las preguntas para abarcar todas las categorías de este subdominio. Como resultado se tiene un instrumento con 12 ítems validado por expertos en matemática y en el modelo MTSK.

Palabras clave. Función cuadrática, educación secundaria, conocimiento de los temas, construcción de cuestionarios.

Abstract. In the KoT study, questionnaires are shown as a useful tool to access this subdomain. This work aims to show the process of building a questionnaire to access the KoT on the quadratic function. The stages of its construction and the strategies for the design of the questions are presented to cover all the categories of this subdomain. As a result, we have an instrument with 12 items validated by experts in mathematics and in the MTSK model.

Keywords. Quadratic function, secondary education, knowledge of topics, questionnaire building

INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN

Este trabajo se enmarca en el desarrollo de una tesis de magister que aborda la función cuadrática, estudiada desde la perspectiva del MTSK, centrándose en el Conocimiento de los Temas (KoT). La motivación de este estudio proviene de dos fuentes: el propio objeto matemático *función cuadrática* y el interés por profundizar en el conocimiento del profesor. Al respecto, un avance en esta línea es el trabajo titulado "Análisis del espacio de trabajo matemático personal e idóneo de profesores frente al concepto de función cuadrática" (Céspedes, Del Pino y Rojas, 2019), abordado desde el constructo del Espacio de Trabajo Matemático ETM (Kuzniak, 2011), en donde se estudió el quehacer matemático (ETM personal) de tres profesores en ejercicio, comparándolo con su propuesta de enseñanza (ETM idóneo potencial). Según Kuzniak (2011), el ETM personal corresponde a la organización del conocimiento matemático par abordar una tarea, mientras que el ETM idóneo es la organización que hace el profesor sobre los aspectos matemáticos de un tema para que sus estudiantes puedan comprometerse con determinadas tareas. La condición de potencial se refiere a la etapa previa a la enseñanza efectiva.

Los resultados en el trabajo de Céspedes *et al*. (2019) muestran que los profesores hacen uso de su ETM personal al enseñar la función cuadrática y no realizan diferencias significativas entre éste y su ETM idóneo potencial cuando diseñan situaciones de enseñanza para este objeto, quedando estrechamente relacionado el conocimiento que

Rojas-Seals, V., & Espinoza-Vásquez, G. (2021). El KOT del profesor acerca de función cuadrática: diseño de un cuestionario para investigación. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 231–238). Congresseme.

tiene el profesor sobre la función cuadrática a su propuesta de enseñanza. En este mismo sentido, y de acuerdo con la actual priorización curricular en el currículum chileno (MINEDUC, 2020), la función cuadrática cobra relevancia al tratarse de una parte esencial para ser trabajado en el nivel segundo medio (15-16 años), por tanto, se espera que el profesor conozca y domine dicho tema.

En otras investigaciones en torno al conocimiento especializado del profesor de matemática es posible encontrar trabajos centrados en Álgebra y en funciones (e.g. Vasco, Climent, Escudero-Ávila, Montes y Ribeiro, 2016; Espinoza-Vázquez, Zakaryan y Carrillo, 2018), así como en la parábola (e.g. Lara, 2016; Del Río, 2018; Advíncula, Beteta, León, Torres y Montes, 2021), sin embargo, a la fecha no se han realizado estudios con foco en la función cuadrática. Pese a ello, este objeto ha sido estudiado desde otras perspectivas. Por ejemplo, Hau-Yon y Zapata (2019), investigan el conocimiento didáctico del contenido sobre la función cuadrática en estudiantes para profesor de matemática. Por su parte, Escudero (2017) utiliza el modelo de conocimientos didácticos matemáticos (CDM) para mostrar conocimientos del profesor de matemática que son necesarios para el trabajo algebraico con funciones lineales y cuadráticas.

Por otro lado, Almonacid (2018) estudia el ETM personal de estudiantes de humanidades en la modelización de funciones cuadráticas, así como Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2015) estudian las dificultades de estudiantes de ingeniería al articular registros gráficos y algebraicos de funciones lineales y cuadráticas. Estas últimas investigaciones son parte de los antecedentes sobre el conocimiento de los estudiantes que podremos esperar al momento de estudiar el conocimiento especializado en relación a la función cuadrática.

En el ámbito de las investigaciones con MTSK, Carrillo (2020) destaca que la tarea de describir en profundidad los subdominios y categorías del MTSK está entre los desafíos propuestos para avanzar con el desarrollo del modelo, así como aplicar el modelo a diferentes temas y diseñar cuestionarios que permitan acceder y profundizar en el conocimiento del profesor de matemáticas. En esta la línea, respecto al diseño de cuestionarios, Advíncula *et al*. (2021) notan que, en general, el proceso de desarrollo de los instrumentos para obtener información no es transparente para el lector y que no existe una sistematización en el diseño de estas herramientas que recogen información en trabajos relacionados a explorar el conocimiento de profesores de matemática. Por ello se proponen explicitar con detalle la elaboración de un cuestionario basado en el MTSK para indagar conocimiento acerca de la función cuadrática y, además, dar algunas pautas para el diseño de cuestionarios que puedan ser utilizadas independiente del tema, como la importancia de profundizar en el conocimiento del objeto matemático y la triangulación tanto de los investigadores como por parte de expertos externos.

Ante lo anterior, en este escrito pretendemos compartir el proceso de creación de un cuestionario que permitiese acceder al conocimiento del profesor sobre la función cuadrática desde la perspectiva del KoT. Asimismo, compartimos los instrumentos resultantes con el fin de fijar pautas y elementos comunes que puedan ser de ayuda para futuras investigaciones.

MARCO DE REFERENCIA

Nuestro referente teórico es el modelo MTSK (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge,* Carrillo *et al*., 2018), que se presenta como un modelo analítico para estudiar el conocimiento del profesor, que pretende ayudar a comprender cómo funciona y se estructura el conocimiento del profesor de matemática (Vasco *et al*., 2016).

El MTSK se compone de los dominios de conocimiento: *Mathematical Knowledge* (MK) y *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), cada uno con tres subdominios. El modelo también contempla las creencias del profesor sobre la matemática, sobre la enseñanza y sobre el aprendizaje de ésta como elementos que inciden en el conocimiento del profesor y sus prácticas.

El MK incluye los subdominios de conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de la estructura matemática (KSM) y conocimiento de la práctica matemática (KPM). Por su parte el PCK incluye los subdominios de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS).

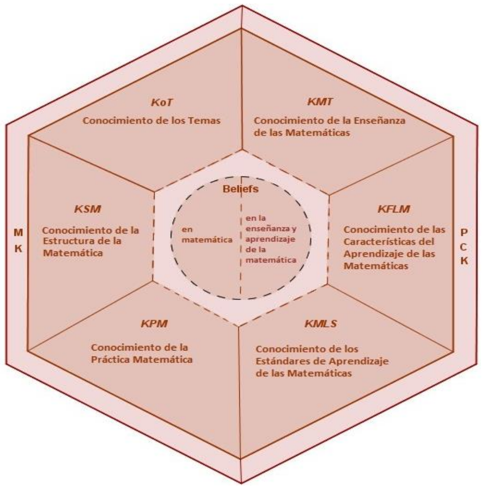


Figura 1. Modelo MTSK

Debido a que nuestro objetivo es indagar en el subdominio KoT, definiremos brevemente este subdominio y sus categorías.

Según Carrillo *et al.* (2018), el KoT describe qué y de qué manera conoce el profesor de matemática el tema que enseña, es decir, conocimiento en detalle del contenido matemático y su significado. Este subdominio incluye lo que el estudiante debe aprender, aunque posee más profundidad, formalidad y rigurosidad.

Las categorías que permiten describir este subdominio son Fenomenología y aplicaciones, es decir, conocimiento de situaciones y modelos que se atribuyen a un tema así como sus usos y aplicaciones; Definiciones, propiedades y fundamentos, en la que se incluye la elección pertinente de propiedades para caracterizar objetos matemáticos y sus definiciones alternativas; Procedimientos asociados a un tema, es decir, conocimiento de cómo, cuándo y por qué hacer algo en particular, algoritmos, sus condiciones y principios; y, por último, Registros de representación pertinentes al tema, por ejemplo gráfico, algebraico, aritmético, pictográfico, en lenguaje natural.

Incluimos, además, el conocimiento de ciertos ejemplos en la categoría de Fenomenología y aplicaciones, entendiendo el rol de los ejemplos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática y su capacidad de dar cuenta respecto a la calidad y riqueza del KoT del profesor (Liñan, Contreras y Barrera, 2016).

CONSTRUCCIÓN DEL CUESTIONARIO

Una de las primeras etapas en la construcción de un instrumento que nos permitiese obtener información a cerca del conocimiento del profesor sobre la función cuadrática fue la realización de un estudio sobre este objeto con el fin de conseguir la sensibilidad teórica (Strauss y Corbin, 2002). En este sentido, el análisis del objeto desde la perspectiva matemática, y a la luz de las categorías del KoT, permitió perfilar qué tipo de conocimiento se esperaría evidenciar como parte del conocimiento especializado y generar las preguntas del cuestionario.

De acuerdo con Fernández (2007), las etapas de construcción del cuestionario parten por la delimitar el tema, que en este caso es la función cuadrática como incluida en las bases curriculares chilenas (MINEDUC, 2020). La siguiente etapa consistió en redactar preguntas. Para ello se partió de las definiciones de las categorías del KoT, las que se relacionaron al análisis ya realizado del objeto. Se trata de preguntas abiertas que buscan que el profesor informante pueda desarrollar libremente la respuesta y proporcionar la mayor cantidad de información sobre el aspecto específico del tema.

Tabla 1: Categorías del KoT asociadas a cada pregunta del cuestionario.

Categorías	**Aspecto de la función cuadrática**	**Preguntas**
Definiciones, Propiedades y Fundamentos.	Definición de la función cuadrática, de conceptos relacionados a ella y sus relaciones. Definición en lenguaje natural a partir de lo simbólico. Propiedades del dominio y recorrido Inyectividad y epiyectividad de la función Función inversa Puntos en que la gráfica de la función cuadrática intersecta ambos ejes coordenados Interpretación de los parámetros a, b y c de la forma algebraica sobre el dominio y recorrido. Soluciones de $f(x) = k$. Puntos $(x, f(x))$ necesarios para determinar la forma algebraica de $f(x)$ cuadrática. Concavidad, máximos y mínimos en todo o parte de su dominio.	1, 3, 6, 7, 8, 12
Registros de Representación.	Representaciones y notaciones usuales. Identificar la forma algebraica y gráfica. Definición en lenguaje natural a partir de lo simbólico. Transformaciones entre registros de representación. Identificar eje de simetría. Identificar gráfico de la función Elementos relevantes de la gráfica de la función. Puntos de intersección con los ejes coordenados	2, 3, 4, 5, 6
Procedimientos.	Procedimientos asociados a transformaciones de registros de representación. Determinar el eje de simetría. Determinar a partir del registro gráfico cartesiano si corresponde a una función cuadrática Determinar dominio y recorrido, imagen y pre imagen	4, 5, 6
Fenomenología y Aplicaciones.	Fenómenos reales que se pueden modelar mediante una función cuadrática. Ejemplos "clásicos" sobre función cuadrática	9, 10, 11

Nota: Fuente propia de la investigación.

Posteriormente, el proceso de revisión de las preguntas nos condujo a clasificarlas de acuerdo a las categorías del KoT y precisar si se trataba de conocimiento de Definiciones o Propiedades en el caso de la categoría Definiciones, propiedades y sus fundamentos. La Tabla 1 muestra la clasificación de los ítems según las categorías del KoT y los aspectos de la función cuadrática a la que se refiere cada uno. Esta clasificación permitió observar relaciones preliminares entre los Registros de representación y los Procedimientos, al encontrar estos últimos en la producción de ciertas representaciones o transformaciones entre ellas. El proceso de refinamiento de las preguntas da como resultado un cuestionario con 12 ítems, algunos de ellos con diferentes secciones. Debido a que se busca indagar en todas las categorías del KoT, no fue posible acortar la extensión del cuestionario.

Validación e Implementación piloto

Una vez finalizado el cuestionario, se invitó a dos expertos en el modelo MTSK y a un matemático profesional a revisar la pertinencia de las preguntas y si ellas eran coherentes con la categoría y aspecto de la función cuadrática que se esperaba conseguir. A estos revisores se les hizo llegar, junto con el cuestionario, una tabla de especificaciones de las preguntas (Tabla 2 anexa). En esta tabla se incluye el número de la pregunta, la categoría a la que se alude y el aspecto de la función cuadrática que se quiere indagar. Los tres revisores estuvieron de acuerdo con la categorización y los objetivos de las preguntas. Los comentarios y sugerencias de los tres revisores fueron menores y se consideraron para hacer los ajustes respectivos.

Durante el proceso de validación y calibración de las preguntas, para ver si estas apuntaban y permitían recoger información sobre conocimientos en las categorías específicas, se realizó una aplicación piloto con dos profesores que imparten clases en el nivel donde se enseña la función cuadrática. El cuestionario fue completado por los profesores en menos de 100 minutos, lo que permitió establecer el tiempo estimado para responder. Luego de esta implementación se sostuvo una conversación con los profesores para obtener sus apreciaciones respecto de la redacción de las preguntas, el tiempo necesario para responder y los aspectos que se pudiesen incluir o eliminar de la función cuadrática. Estos comentarios fueron considerados para ajustar los tiempos y modo de aplicación final, pues no se propusieron modificaciones a las preguntas.

COMENTARIOS FINALES

Como parte de los resultados del piloto, se pudo observar que los ítems permiten acceder al conocimiento de las categorías del KoT contempladas, sin embargo, al tratarse de preguntas abiertas, puede ser necesaria una entrevista posterior para confirmar presencia de conocimiento especializado en las respuestas de los informantes.

La elaboración de cuestionarios requiere de profundizar, como investigador, en el tema de modo que, según el objetivo trazado, sea posible acceder al conocimiento del profesor. En este caso se contempló el acceso al KoT, sin embargo, creemos que es posible diseñar cuestionarios para los otros subdominios, en tanto se tengan definiciones precisas de sus categorías y una operacionalización del modelo al tema de estudio.

Referencias

Advíncula, E., Beteta, M., León, J., Torres, I. y Montes, M. (2021) El conocimiento matemático del profesor acerca de la parábola: diseño de un instrumento para investigación. *Uniciencia, 35*(1), 190-209. doi: 10.15359/ru.35-1.12

Almonacid, A. (2018) *Modelización de Funciones Cuadráticas. Espacio de Trabajo Matemático personal de estudiantes de humanidades.* (Tesis de Magíster). Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.

Carrillo, J. (2020). Panorámica de la investigación con MTSK en el mundo. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*. Universidad de Huelva, Huelva.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D. y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. doi: 10.1080/14794802.2018.1479981

Céspedes, F., Del Pino, N. y Rojas, V. (2019). *Análisis del espacio de trabajo matemático personal e idóneo de profesores frente al concepto de función cuadrática.* (Tesis de pregrado). Universidad de Concepción, Concepción.

Escudero, P. (2017) *Identificación de conocimientos didáctico-matemáticos, en la faceta epistémica, del profesor de educación secundaria, sobre funciones lineales y cuadráticas.* (Tesis de Magíster). Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.

Díaz, M., Haye, E., Montenegro, F. y Córdoba, L. (2015). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *UNION,* (41), 20-38.

Del Río, C. (2018). *La parábola como objeto mate- mático desde el enfoque ontosemiótico en el curso de Matemáticas de grado décimo del Instituto Mistrató Risaralda* (Tesis de Maestría), Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.

Espinoza-Vázquez, G., Zakaryan, D. y Carrillo, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *21*(3), 301- 324. doi: 10.12802/relime.18.2133

Fernández, L. (2007). ¿Cómo se elabora un cuestionario? *Butlletí LaRecerca*, *8*, 1-9. http://www.ub.edu/idp/web/sites/default/files/fitxes/ficha8-cast.pdf

Hau-Yon, F. y Zapata, M. (2019). Conocimiento didáctico del contenido de la función cuadrática en estudiantes para profesor de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII*. SEIEM, Valladolid.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathematique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9–24.

Lara, I. (2016). *La parábola como lugar geométrico: Una formación continua de profesores de profesores basada en la teoría de registros de representación semiótica* (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.

Liñan, M.M., Contreras, L.C. y Barrera, V. (2016). Conocimiento de los Temas (KoT). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva*. Seminario llevado a cabo en Huelva, España.

MINEDUC. (2020). *Priorización Curricular Matemática.* Santiago, Chile. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Bases-curriculares/177735:Priorizacion-Curricular-Matematica-1-basico-a-4-medio

Strauss, A. y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada* (Trad. Eva Zimmerman). Editorial Universidad de Antioquia.

Vasco, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M. y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento Especializado de un Profesor de Álgebra Lineal y Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema, Río Claro (SP), 30*(54), 222-239. doi: 10.1590/1980-4415v30n54a11

Apéndice: Categorías del KoT asociadas a cada pregunta del cuestionario.

Pregunta		Categorías	Aspecto de la función cuadrática
1	1.1	Definiciones, Propiedades y Fundamentos.	Definición de la función cuadrática y de conceptos relacionados a ella.
	1.2	Definiciones, Propiedades y Fundamentos.	Relaciones entre los conceptos definidos.
	1.3	Definiciones, Propiedades y Fundamentos.	Definir la función cuadrática.
2		Registros de Representación.	Diferentes representaciones y notaciones de la función cuadrática.
3		Registros de Representación; Definiciones, Propiedades y Fundamentos.	Identificar la función cuadrática de forma algebraica y gráfica. Definición en lenguaje natural a partir de lo simbólico.
4	a)	Registros de Representación; Procedimientos.	Transformar el registro de gráfico cartesiano a otros. Procedimientos asociados a transformaciones de registros de representación.
	b)	Registros de Representación; Procedimientos.	Determinar la existencia del eje de simetría en el registro gráfico de la función cuadrática. Procedimientos asociados a determinar el eje de simetría.
5	a)	Registros de Representación; Procedimientos.	Determinar a partir del registro gráfico cartesiano si corresponde a una función. Procedimientos asociados a determinar si la gráfica corresponde a una función.
	b)	Registros de Representación	Determinar a partir del registro gráfico cartesiano si corresponde a una función cuadrática.
6	a)	Procedimientos.	Determinar dominio de una función cuadrática
	b)	Procedimientos.	Determinar recorrido de una función cuadrática.
	c)	Definiciones, Propiedades y Fundamentos.	Propiedades involucradas al determinar dominio y recorrido de la función.
	d)	Procedimientos.	Determinar imagen a partir de una pre-imagen.
	e)	Procedimientos.	Determinar la pre-imagen a partir de una imagen
	f)	Definiciones, Propiedades y Fundamentos; Procedimientos asociados.	Propiedad de inyectividad de una función cuadrática y los procedimientos asociados a ella.
	g)	Definiciones, Propiedades y Fundamentos al determinar si la función es epiyectiva; Procedimientos asociados.	Propiedad de epiyectividad de una función cuadrática y los procedimientos asociados.

	h)	Definiciones, Propiedades y Fundamentos al determinar si la función posee inversa.	Propiedad de inversa de la función cuadrática.
	i)	Registros de representación; Procedimientos.	Transformaciones entre registros algebraico, gráfico y otros. Procedimientos asociados a dichas transformaciones.
	j)	Registros de Representación.	Elementos relevantes de la gráfica de la función cuadrática.
	k)	Procedimientos; Definiciones, Propiedades y Fundamentos.	Puntos en que la gráfica de la función cuadrática intersecta ambos ejes coordenados.
7	a)	Definiciones, Propiedades y Fundamentos.	Interpretación de los parámetros a, b y c de la forma algebraica de la función cuadrática.
	b)	Definiciones, Propiedades y Fundamentos.	Incidencia de dichos parámetros en dominio, recorrido y representación gráfica de la función cuadrática.
8	a)	Definiciones, Propiedades y Fundamentos.	Ecuación y solución de la ecuación $f(x) = k$, con $f(x)$ cuadrática.
	b)	Definiciones, Propiedades y Fundamentos.	Soluciones de $f(x) = k$, con $f(x)$ cuadrática.
	c)	Definiciones, Propiedades y Fundamentos.	Puntos $(x, f(x))$ necesarios para determinar la forma algebraica de $f(x)$ cuadrática.
9		Fenomenología y Aplicaciones.	Fenómenos reales que se pueden modelar mediante una función cuadrática.
10		Fenomenología y Aplicaciones.	Ejemplos "clásicos" sobre función cuadrática.
11		Fenomenología y Aplicaciones.	Modelo cuadrático que permite modelar una situación.
12	a)	Definiciones, Propiedades y Fundamentos. Procedimientos asociados.	Concavidad, máximos y mínimos de una función cuadrática en todo su dominio.
	b)	Definiciones, Propiedades y Fundamentos. Procedimientos asociados.	Concavidad, máximos y mínimos de una función cuadrática en un dominio acotado.

Nota: Fuente propia de la investigación. En la categoría "Definiciones, Propiedades y Fundamentos" se ha destacado la palabra "Propiedades" cuando la pregunta del cuestionario apunta exclusivamente a este aspecto de la categoría.

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO PARA O ENSINO DE FUNÇÕES: UMA ANÁLISE BIBLIOGRÁFICA PRELIMINAR

Specialized Knowledge for Teaching Functions: a Preliminary Literature Review

Vianna-Júnior, H. C. [a]; Moriel-Junior, J. G. [b]

[a] Instituto Federal de Mato Grosso; [b] Instituto Federal de Mato Grosso

Temática: 3 – MTSK em diferentes temas e etapas

Resumo. O objetivo é identificar conhecimentos especializados docentes para o ensino de Funções na Educação Básica presentes em produções científicas na base *Web of Science* entre 2015 e 2020. Adotamos o *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK como marco teórico em uma abordagem de síntese da literatura qualitativa e documental de três artigos que contemplam a temática em questão. Os resultados preliminares apontam evidências de conhecimentos especializados em os subdomínios do MTSK, mas não todas as categorias. Os conhecimentos identificados contemplam as categorias de definições, propriedades e seus fundamentos, fenomenologias e aplicações, registros de representação, procedimentos, conexões de simplificação, conexões auxiliares, exemplificar, teorias de ensino e estratégias, técnicas, tarefas e exemplos, potencialidades e dificuldades de aprendizagem e sequenciação de tópicos.

Palavras-chave. Funções, Ensino de Matemática, Conhecimento especializado docente, MTSK.

Abstract. The objective is to identify teachers' specialized knowledge for the teaching of Functions in Basic Education present in scientific productions in the Web of Science database between 2015 and 2020. We adopted the Mathematics Teachers' Specialized Knowledge – MTSK as a theoretical framework in a synthesis approach of qualitative and qualitative literature documentary of three articles that address the theme in question. Preliminary results point to evidence of specialized knowledge in the MTSK subdomains, but not all categories. The identified knowledge includes the categories of definitions, properties and their foundations, phenomenologies and applications, representation records, procedures, simplification connections, auxiliary connections, examples, teaching theories and strategies, techniques, tasks and examples, potentials and learning difficulties and topic sequencing.

Keywords. Functions, Teaching Mathematics, Specialized Teacher Knowledge, MTSK.

INTRODUÇÃO

A investigação sobre o conhecimento de professores de Matemática ganhou foco a partir da década de 1980 com um movimento de reformas educacionais em âmbito internacional (Fiorentini et al., 2002). Esta temática continua sendo uma das tendências de investigação importantes em Educação Matemática (Pazuch & Ribeiro, 2017) considerando que o professor é parte fundamental no processo educativo (Rodríguez-Flores et al., 2018) e que o domínio matemático é necessário, mas não o suficiente para ensinar e fazer aprender Matemática (McCrory et al., 2012). Neste artigo, focalizamos o conteúdo de Funções que tem uma série de aplicações na vida cotidiana, seus conceitos são abordados durante toda educação básica de forma implícita ou explícita (Ardenghi, 2008) se estendendo a cursos superiores (Araujo, 2018). Seus conceitos podem ser observados em diversas áreas como Biologia, Física, Química, Geografia e Economia (Lima, 2013).

Devido a importância das produções científicas sobre o conhecimento do professor de Matemática no ensino de Funções para a melhoria da aprendizagem escolar, nos questionamos quais são os avanços científicos obtidos na temática nos últimos anos.

Vianna-Júnior, H. C., & Moriel-Junior, J. G. (2021). Conhecimento especializado para o ensino de funções: uma análise bibliográfica preliminar. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 239–246). Congresseme.

Neste sentido, o presente trabalho tem como objetivo analisar conhecimentos especializados docentes para o ensino de Funções na Educação Básica presentes em produções científicas na base *Web of Science* entre 2015 e 2020. Este artigo apresenta resultados parciais da pesquisa de mestrado desenvolvida pelo primeiro autor sob a orientação do segundo autor[1] e está inserida nos esforços do grupo de pesquisa *TSK Group* do IFMT, *campus* Cuiabá[2].

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

O *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* - MTSK (Carrillo et al., 2014) é um modelo teórico que descreve um conjunto de conhecimentos especializados que pode ou deve ter um professor para ensinar e fazer aprender Matemática (cf. Figura 1), de modo que sua especificidade faz sentido apenas para a atividade de tais profissionais (Araujo, 2018; Carrillo-Yañez et al., 2018; Espinoza-Vásquez et al., 2018).

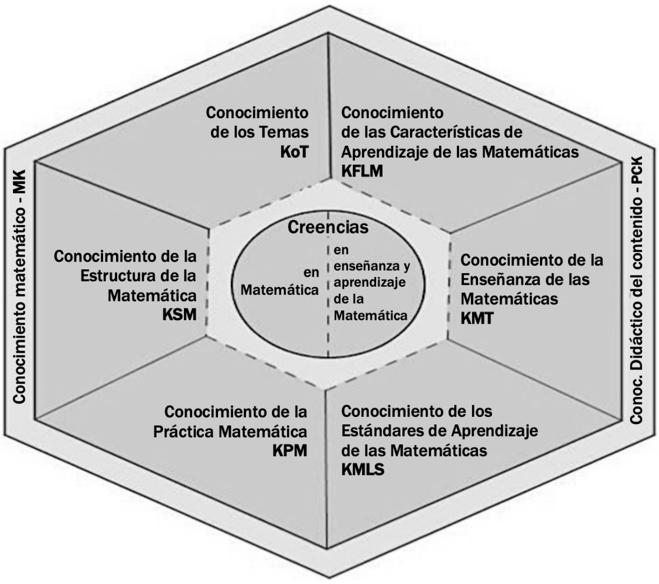


Figura 1. Modelo MTSK (Carrillo et al., 2014; Moriel-Junior e Wielewski, 2017)

O MTSK é composto por dois domínios e cada um desses domínios contém três subdomínios. O Conhecimento Matemático contém os seguintes subdomínios e categorias: O Conhecimento dos Tópicos Matemáticos – KoT integra o conhecimento que se espera que o estudante aprenda, suas categorias são procedimentos, definições propriedades e seus fundamentos, registros de representação e fenomenologias e aplicações. O Conhecimento da Estrutura Matemática – KSM corresponde ao conhecimento que o professor tem sobre a conexão entre diferentes tópicos na Matemática e entre tópicos de Matemática e outras matérias, contendo as categorias conexões de simplificação, conexões de complexidade, conexões auxiliares e conexões transversais e o Conhecimento da Prática Matemática – KPM se refere ao metaconhecimento relativo ao fazer matemático (definir, demonstrar, usar heurísticos e exemplificar). Já o Conhecimento Didático do Conteúdo contém os subdomínios do Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática – KFLM que abarca as características de aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Se incluem neste subdomínio as categorias teorias de aprendizagem, potencialidades e dificuldades de aprendizagem, interações do estudante com o conteúdo e aspectos emocionais de

[1] Contou com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) e fomento da FAPEMAT (FAPEMAT.0204484/2017, Edital Universal 42/2016).
[2] http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/529979

aprendizagem matemática. O subdomínio do Conhecimento do Ensino da Matemática – KMT contém o conhecimento sobre recursos, materiais, modos de apresentar o conteúdo e potencial que podem ter para a instrução, contendo as categorias teorias de ensino, recursos de ensino e estratégias, técnicas, tarefas e exemplos. Por fim, o Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem de Matemática – KMLS se refere ao conhecimento que o professor tem a respeito do nível estipulado conceitual com que se espera que o aluno aprenda em um determinado nível escolar. Nele se encontram as categorias de resultados esperados de aprendizagem, nível de desenvolvimento conceitual ou procedimental esperado e sequenciação de tópicos.

METODOLOGIA

Tipo de pesquisa. a abordagem metodológica desse estudo é uma síntese qualitativa da literatura adaptada de Guimero e Pazuch (2020). É uma pesquisa teórico-bibliográfica, visando compreender e discutir a revisão da literatura científica sobre um determinado tema (Vilaça, 2010). Quanto aos objetivos, é um trabalho analítico-descritivo, realizado a partir de um levantamento e uma revisão da produção científica sobre o conhecimento docente para o ensino de Funções (Romanowski & Ens, 2006).

Contexto da pesquisa e fonte de dados. A fonte de informações utilizada para a presente pesquisa é a base de dados *Web Of Science,* combinando palavras-chave que contemplem a temática em questão e utilizando o operador "AND" para encontrar os documentos. Buscamos por artigos científicos indexados na base no período entre 2015 e 2020. O recorte se deve a quantidade de produções indexadas na base. Quanto aos critérios de delimitação das amostras, além da exclusão por período, excluímos também os trabalhos que não tratassem do conhecimento do professor de Matemática para o ensino de Funções na educação básica.

Obtenção de dados. A primeira parte da coleta serviu para definir o *corpus* de análise. Para tanto, realizamos buscas na *Web of Science* utilizando os descritores: "*Teacher Mathematics Knowledge AND Teaching Functions"* e *"Teacher Mathematcs Knowledge AND concept functions"*. Em seguida, realizamos a leitura de títulos, resumos e palavras-chave para delimitar o *corpus* de análise. Foram encontradas 154 publicações das quais foram excluídas 48 por período e 100 que não tratavam do conhecimento docente para o ensino de Funções na Educação Básica. Logo, o corpus de análise foi composto por 6 trabalhos. Neste artigo apresentamos os resultados parciais da pesquisa, contemplando 3 deles, listados na Tabela 1. A e C Costa Rica e Artigo B Chile

Tabela 1. Características do *corpus* analisados neste artigo

Código	*Referência*	*Objetivo (tradução nossa)*	*Sujeitos*
Artigo A	Rodriguez-Flores et al. (2016)	Descrever o processo de ensino, identificar os componentes e determinar indicadores sobre o conhecimento do conteúdo do professor ao ensinar os conceitos básicos de função	1 professor do Ensino Médio, Costa Rica
Artigo B	Espinoza-Vásquez et al. (2017)	Identificar conhecimentos especializados sobre o conceito de função e estratégias de ensino	1 professor do Ensino Médio, Chile
Artigo C	Rodriguez-Flores et al. (2018)	Caracterizar o conhecimento especializado do conteúdo do professor de Matemática ao ensinar os conceitos de função	1 professor do Ensino Médio, Costa Rica

Por fim, extraímos dos trabalhos listados trechos (frases, parágrafos) que pudessem expressar conhecimento especializado de professores de matemática, configurando assim nossas unidades de análise.

Análise de dados. Os trechos selecionados dos artigos são as unidades de análise em que se buscou evidências ou indícios de conhecimento especializado segundo Moriel-Junior & Carrillo (2014). Tais conhecimentos foram classificados de acordo com o domínio, subdomínio e categoria ou indicador do modelo MTSK (Carrillo et al., 2014). Para isso, utilizamos o instrumento de análise iMTSK de Moriel-Junior (2021), conforme Figura 2.

Dados	Análise do pesquisador		
Manifestação do sujeito	O sujeito manifestou conhecimento...	associado a...	que consiste em...
Trecho do episódio (Fonte, linha ou página)	[subdomínio]	[categoria]	[síntese do conhecimento][a]
[Exemplo] A aula de resolução de problemas termina quando eu sistematizo o conceito de Princípio fundamental da contagem a partir das soluções dos alunos sobre combinar calças e camisas. (Professora, 3-5)	*do ensino de matemática (KMT)*	*Teorias de ensino*	*uma das etapas da metodologia 'resolução de problemas' para ensinar o 'Princípio fundamental da contagem': sistematização do conceito 'a partir das soluções dos alunos sobre [o problema de] combinar calças e camisas'*

Nota: a. Inicia-se com um artigo (definido ou indefinido) ou um numeral (indicando a quantidade de conhecimentos), seguido pelo elemento central do conhecimento identificado (que não é uma ação), validando-o com citação dos dados. Cada trecho pode conter um ou mais conhecimentos, de um ou mais subdomínios e categorias, indicando suas conexões.

Figura 2. Instrumento de análise iMTSK de Moriel-Junior (2021).

RESULTADOS

O conjunto das produções analisadas até o presente momento da pesquisa informa sobre o conhecimento de três professores do ensino secundário no Chile e Costa Rica, similar ao Ensino Médio brasileiro. Neste conjunto foi possível identificar evidências em todos os subdomínios, mas não em todas as categorias ou indicadores (cf. Tabela 2). Predominam elementos de conhecimento dos tópicos matemáticos em relação aos demais, algo que também é geralmente visto em pesquisas em outros conteúdos.

Tabela 2. Distribuição do conhecimento MTSK identificado no *corpus*

Subdomínios Matemáticos	Categorias	Artigo A	Artigo B	Artigo C
KoT	Definições, propriedades e seus fundamentos	1	1	1
	Fenomenologias e aplicações	2	1	1
	Registros de representações	3	3	5
	Procedimentos	2	-	1
KSM	Conexões de simplificação	-	-	1
	Conexões auxiliares	1	-	-
	Conexões de complexidade	-	-	-
	Conexões transversais	-	-	-
KPM	Definir, demonstrar, usar heurísticas, exemplificar	1	-	-

Subdomínios Didáticos	Categorias	Artigo A	Artigo B	Artigo C
KMT	Teorias de ensino	-	1	1
	Recursos de ensino (físicos e digitais)	-	-	-
	Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos	2	1	2
KFLM	Teorias de aprendizagem	-	-	-
	Potencialidades e dificuldades de aprendizagem matemática	1	-	-
	Interação do estudante com o conteúdo	-	-	-
	aspectos emocionais de aprendizagem matemática	-	-	-
KMLS	Resultados esperados de aprendizagem	-	-	-
	Nível de desenvolvimento conceitual ou procedimental esperado	-	-	-
	Sequenciação de tópicos	-	-	1

A seguir, descrevemos qualitativamente por categorias os conhecimentos que identificamos.

Definições, propriedades e seus fundamentos. Os professores dos artigos A e C utilizam as Relações para definir uma Função (toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função), introduzindo os conceitos de domínio, contradomínio, imagem e pré-imagem. Tal definição é apresentada como uma relação de dependência nos artigos A e B, que consiste em "uma relação que tem duas condições importantes, cada elemento do primeiro conjunto corresponde a um único elemento do segundo conjunto" (Rodríguez-Flores et al., 2016, p. 11) e uma relação em que "cada elemento do conjunto de entrada corresponde a um único conjunto de saída" (Espinoza-Vásquez et al., 2017, p. 3291).

Fenomenologias e aplicações. Uma aplicação de Função no cálculo do valor de uma corrida de taxi aparece no artigo A para "introduzir os conceitos de variável dependente e variável independente" (Rodríguez-Flores et al., 2016, p. 8). No mesmo artigo, o professor apresenta uma aplicação de Função no cálculo do salário de um vendedor de revistas em que, o salário depende da quantidade de revistas vendidas e dita o "problema para introduzir o conceito de imagem e pré-imagem" (Rodríguez-Flores et al., 2016, p. 12). No artigo B, uma aplicação é reconhecida no funcionamento de uma máquina de lavar roupas, que consiste em uma máquina que "realiza a função de lavar" (Espinoza-Vásquez et al., 2017, p. 3291). No artigo C, há um exemplo de problema físico aos estudantes, que consiste em uma aplicação de Função na qual "o peso esperado P de uma baleia se relaciona com o seu comprimento L" (Rodríguez-Flores et al., 2018, p. 99).

Registros de representação. No artigo C o professor representa uma Função por diagrama de Venn, de forma algébrica e por meio de gráficos, o que consiste em diferentes formas de representar uma função, destacando que "podemos especificar uma relação graficamente por meio de diagramas de Venn ou por meio de uma lista de pares ordenados que definem a relação, gráfico" (Rodríguez-Flores et al., 2018, p. 100). No artigo B, "o professor desenha uma máquina de lavar no quadro branco" (Espinoza-Vásquez et al., 2017, p. 3293) que consiste em um registro pictórico de Função, que será utilizada como uma técnica de ensino por analogia do subdomínio do ensino. Ainda neste artigo, aparecem outras representações (algébrica e verbal) quando em um determinado trecho o professor diz aos estudantes "isso (a função) vai adicionar dois a tudo o que vier [ele escreve "f (x) = x + 2"]. Tudo o que entra na função, na máquina, eu adiciono dois a ela" (Espinoza-Vásquez et al., 2017, p. 3293). Por sua vez, no artigo C o professor utiliza as representações algébrica, numérica, verbal, diagrama de Venn, tabular e gráfica, o que consiste em diferentes formas de representar uma Função, das quais "o uso das representações verbal, algébrica e numérica foi frequente” (Rodríguez-Flores et al., 2018, p. 101). Em um dos exemplos o professor utilizou “os sistemas de representação icônicos e algébricos e estabeleceu relação entre eles e incluiu o sistema tabular quando trabalhava o conceito de contradomínio” (Rodríguez-Flores et al., 2018, p. 101). Para os conceitos de Função, imagem e pré-imagem utilizou “os sistemas de representação tabular e gráfico” (Rodriguez-Flores et al., 2018, p. 101).

Procedimentos. No artigo A, o professor ensina como determinar a imagem de uma Função substituindo o valor da pré-imagem na lei de formação, o que consiste em um procedimento no qual “Se substitui a variável independente pelo valor que estão me dando e já encontramos uma imagem” (Rodríguez-Flores et al., 2016, p. 12). E também um procedimento para determinar o gráfico de uma Função que tem o domínio finito “Sempre que o domínio for dado por um conjunto finito de elementos, o gráfico da função será apenas a localização dos pares ordenados” (Rodríguez-Flores et al., 2016, p. 14). No artigo C, é explicado aos estudantes um procedimento para montar os pares ordenados que “sempre manterá esta ordem "x" vírgula "y", primeiro a pré-imagem depois a imagem” (Rodríguez-Flores et al., 2018, p. 100).

Conexões de simplificação. No artigo C, o professor faz uma conexão entre tema de Funções e o tema de Equações para resolver o problema (corrida de taxi) que se reduz a “uma pequena equação” (Rodríguez-Flores et al., 2018, p. 98).

Conexões auxiliares. Uma conexão entre o tema de Funções com o cálculo da área de uma circunferência é feita pelo professor no artigo A para mostrar as variáveis dependente e independente em que “a área é a variável dependente, então r [raio] seria a variável independente” (Rodríguez-Flores et al., 2016, p. 10).

Definir, demonstrar, usar heurísticos e exemplificar. No artigo A, um diagrama é apresentado pelo professor aos estudantes para mostrar uma relação que não corresponde a uma Função, algo que consiste em um contraexemplo de relações em que um número do conjunto do domínio se relaciona com mais de um elemento. “O 3 está associado a dois elementos” (Rodríguez-Flores et al., 2016, p. 12).

Teorias de ensino. Ao iniciar o conteúdo de Funções, o professor do artigo B busca aproximar o conteúdo do cotidiano dos estudantes e utiliza uma analogia de Função com uma máquina de lavar. “a função funciona como uma espécie de máquina. Um exemplo pode ser uma máquina de lavar. Uma máquina de lavar realiza uma função (Espinoza-Vásquez et al., 2017, p. 3291). Já o professor do artigo C introduz o conteúdo a partir de uma resolução de problema, em que os alunos formam grupos para resolvê-lo e depois são convidados para ir ao quadro apresentar as respectivas soluções. “O problema proposto estava dentro do contexto de interesse de seus alunos e faz parte dos eixos transversais propostos no Currículo - resolução de problemas” (Rodríguez-Flores et al., 2018, p. 97).

Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos. Três tarefas aparecem no artigo A, a tarefa do taxi, em que o valor da corrida depende da quilometragem rodada e a utiliza para estabelecer “uma lei de formação e a estimação de distâncias percorridas a partir do dinheiro disponível” (Rodríguez-Flores et al., 2016, p. 8), a do salário de um vendedor de revistas, em que o salário depende do número de revistas vendidas “para introduzir o cálculo de imagem e pré-imagem” (Rodríguez-Flores et al., 2016, p. 12) e “uma tarefa em um contexto de interesse dos estudantes para identificar os elementos de uma Função” (Rodríguez-Flores et al., 2018, p. 100), referente a nota dos estudantes em uma avaliação, que poderiam variar entre 0 e 10, sendo que um estudante não poderia obter notas distintas na mesma avaliação. Ao trabalhar o domínio alvo de uma Função, o professor do artigo

B, usa um exemplo com números. “o que quer que entre na função, na função, eu adiciono dois a ela” (Espinoza-Vásquez et al., 2017, p. 3293). No artigo C, para facilitar a compreensão de variável dependente e independente, o professor apresenta “Um exemplo diferente já da parte física, diz ele, o peso esperado P em toneladas de uma baleia adulta se relaciona com o seu comprimento L” (Rodríguez-Flores et al., 2018, p. 99).

Potencialidades e dificuldades de aprendizagem. No artigo A, o professor conhece uma dificuldade que os estudantes têm em formar pares ordenados e então como formá-los pela ordem pré-imagem (x) e imagem (y). “Por aí me perguntava um amigo que não entendia dois conceitos (par ordenado e gráfico), porque falava de formar um par ordenado onde falava de abscissa e ordenada” (Rodríguez-Flores et al., 2016, p. 12).

Sequênciação de tópicos. Quando o professor do artigo C explica o conceito de pares ordenados, ele destaca que os mesmos serão utilizados posteriormente ao estudarem o plano cartesiano. “Mais adiante veremos o plano cartesiano, e para localizar pontos no plano cartesiano” (Rodríguez-Flores et al., 2018, p. 100), que consiste em um conceito que será necessário em tópicos futuros.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos os resultados preliminares de um estudo mais amplo, tendo como objetivo identificar conhecimentos especializados docentes para o ensino de Funções na Educação Básica presentes em produções científicas na base *Web of Science* entre 2015 e 2020. Os dados analisados apontam que os conhecimentos docentes presentes nas pesquisas contemplam todos os subdomínios do MTSK, mas não todas categorias. Os conhecimentos especializados contemplam as categorias de *definições, propriedades e seus fundamentos* (relação de dependência, domínio, contradomínio, imagem e pré-imagem), *fenomenologias e aplicações* (corrida de taxi, vendedor de revistas e calculo do peso de uma baleia), *registros de representação* (verbal, algébrico, numérico, tabular, diagrama de Veen, gráfico e pictórico), *procedimentos* (substituição de variáveis, formar pares ordenados e esboçar gráficos), *conexões de simplificação* (determinar a imagem através de uma equação), *conexões auxiliares* (área da circunferência em função do raio), *exemplificar* (uma relação que não corresponde uma Função), *teorias de ensino* (analogias e resolução de problemas), *estratégias, técnicas, tarefas e exemplos* (tarefas sobre corrida de taxi, vendedor de revistas e nota dos estudantes, exemplo numérico para atingir o domínio-alvo da função e exemplo do cálculo do peso de uma baleia), *potencialidades e dificuldades de aprendizagem* (dificuldades em reconhecer os eixos do plano cartesiano) e *sequenciação de tópicos* (conceitos de pares ordenados que serão necessários para estudar o plano cartesiano).

Os resultados podem interessar a professores em formação inicial e/ou continuada e a pesquisadores da área da educação Matemática. Quanto às limitações deste trabalho, destacamos que a análise não contemplou todo o *corpus* e não aprofundou na descrição da conexão entre os conhecimentos, algo que é tão ou mais importante do que somente identificar e unifica-los em categorias MTSK. Para a continuidade do estudo pretendemos suprir estas limitações.

Referências

Araujo, W. R. D. (2018). *Conhecimento especializado do professor de matemática sobre função no contexto de uma experiência prévia de lesson study*. Dissertação de mestrado, Campinas, Brasil: Universidade Estadual de Campinas.

Ardenghi, M. J. (2008). *Ensino e aprendizagem do conceito de função: pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil*. Dissertação de mestrado, São Paulo, Brasil, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Espinoza-Vásquez, G., Zakaryan, D., & Carrillo Yáñez, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *21*(3), 3288–3295. https://doi.org/10.12802/relime.18.2133

Fiorentini, D., Nacrato, A. M., Ferreira, A. C., Lopes, C. S., Freitas. M. T. M., & Miskulin, R. G. S. (2002). Formação de professores que ensinam Matemáitca: Um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. *Educação em revista*, *36*, 137-160.

Lima, L. de. (2013). *A aprendizagem significativa do conceito de função na formação inicial do professor de matemática*. Dissertação de mestrado, Fortaleza, Brasil, Universidade Federal do Ceará.

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M. D., & Senk, S. L. (2012). Knowledge of Algebra for Teaching: A Framework of Knowledge and Practices. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(5), 584–615. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.5.0584

Moriel-Junior, J. G. (2021). Rede de Conhecimentos Especializados Ativados em Formação Docente para Responder a um Porquê Matemático sobre Divisão de Frações. *Acta Sci*, *23*(1), 193-224. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6205

Moriel-Junior, J. G., & Carrillo, J. (2014). Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar matemática com o modelo MTSK. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.)*, Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 465-474). Salamanca: SEIEM. http://funes.uniandes.edu.co/6087/1/Moriel2014ExplorandoSEIEM.pdf

Moriel-Junior, J. G., & Wielewski, G. D. (2017). Base de conhecimento de professores de matemática: do genérico ao especializado. *Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas*, *18*(2), 126-133. https://doi.org/10.17921/2447-8733.2017v18n2p126-133

Pazuch, V., & Ribeiro, A. J. (2017). Conhecimento profissional de professores de matemática e o conceito de função: Uma revisão de literatura Professional knowledge of mathematics teachers and the concept of function: a literature review. Educação Matemática Pesquisa: *Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *19*(1), 465-496. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i1p465-496

Rodríguez-Flores, A., Picado-Alfaro, M., Espinoza-González, J., & Rojas-González, N. (2018). El conocimiento especializado de un profesor de matemáticas: Un estudio de caso sobre la enseñanza de los conceptos básicos de función. *Uniciencia*, *32*(1), 89-107 https://doi.org/10.15359/ru.32-1.6

Rodríguez-Flores, A., Picado-Alfaro, M., Espinoza-González, J., Rojas-González, N., & Flores-Martínez, P. (2016). Conocimiento común del contenido que manifiesta un profesor al enseñar los conceptos básicos de funciones: Un estudio de caso. *Uniciencia*, *30*(1). https://doi.org/10.15359/ru.30-1.1

Romanowski, J. P., & Ens, R. T. (2006). As pesquisas denominadas do tipo "estado da arte" em educação. *Diálogo Educ*., Curitiba, *6*(19), 37-50

Vilaça, M. L. C. (2010). Pesquisa e ensino: considerações e reflexões. *Revista do Curso de Letras da UNIABEU Ninópolis*, *1*(2), 59-74.

MÉTODO DE LA INVERSA: EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UNA PROFESORA UNIVERSITARIA

Inverse method: the specialized knowledge of a university professor

Regolini, M. [a]; Climent, N. [b]

[a] Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina; [b] Universidad de Huelva, España

Temática: 3 – MTSK en diferentes temas y etapas

Resumen. Esta investigación pretende contribuir al conocimiento especializado del profesor universitario de Álgebra Lineal. Se desarrolla un estudio de caso instrumental y mediante el MTSK se analizan episodios de una clase correspondiente al método de la inversa. El objetivo es describir relaciones entre los subdominios Conocimiento de los temas, Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas y Conocimiento de la enseñanza de la matemática que sustenta la práctica de una profesora. La variedad de ejemplos que aborda pone de relieve su conocimiento del contenido matemático ligado tanto a su conocimiento sobre la enseñanza como al conocimiento de los errores que habitualmente cometen los estudiantes y las dificultades que se les presentan.

Palabras clave. MTSK, Álgebra lineal, Docente auxiliar, Universidad, Método de la inversa.

Abstract. This research aims to contribute to the specialized knowledge of the university professor of Linear Algebra. An instrumental case study is developed and are analyzed through the MTSK episodes of a class corresponding to the inverse method are analyzed. The objective is to describe relationships between the subdomains Knowledge of mathematical topics, Knowledge of Features of Learning Mathematics and Knowledge of Mathematics Teaching. The variety of examples that she addresses highlights her knowledge of mathematical content linked both to her knowledge of teaching and to her knowledge of the mistakes that students habitually make and the difficulties they face.

Keywords. MTSK, Linear algebra, Teaching assistant, University, Inverse method.

INTRODUCCIÓN

Diversos investigadores han focalizado sus estudios en el conocimiento del profesor (entre ellos, Shulman, 1986; Ball, Thames y Phelps, 2008; Godino, 2009; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz–Catalán, 2013) dirigiendo la mirada sobre aspectos particulares con la intención de comprenderlo. Esto ha originado una amplia variedad de perspectivas sobre el conocimiento del profesor de matemática, de las cuales, en este artículo, se aborda la correspondiente al Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, sigla MTSK de Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge (Carrillo et al., 2013).

Algunas investigaciones recientes que tienen al modelo MTSK por marco de referencia están centradas en relaciones específicas entre los diferentes subdominios (Zakaryan et al., 2018; Vasco-Mora y Climent, 2021). Esto es factible dada la impronta del modelo MTSK, como herramienta analítica, que permite examinar con detenimiento el conocimiento del profesor de matemática, el cual está conformado por una compleja red de relaciones (Carrillo et al., 2018). Por ejemplo, Zakaryan et al. (2018) han profundizado en relaciones entre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas y

Regolini, M., & Climent, N. (2021). Método de la inversa: el conocimiento especializado de una profesora universitaria. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 247–254). Congresseme.

el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas de una profesora de secundaria en el contenido de semejanza de triángulos.

Este artículo tiene un doble propósito, contribuir al modelo MTSK e identificar relaciones entre elementos de conocimiento matemático especializado del profesor universitario. Para ello, nos planteamos como objetivo describir relaciones entre el conocimiento de una profesora sobre la enseñanza de la matemática, el conocimiento de las características de su aprendizaje y el conocimiento de los temas, cuando aborda la resolución algebraica de sistemas de ecuaciones lineales a través del método de la inversa.

La importancia de analizar el conocimiento de un profesor sobre la enseñanza de un contenido determinado posibilita comprender, entre otros, cómo escoge los ejemplos –que le permitirán destacar aspectos relevantes del tema, considerando las limitaciones u obstáculos que pudieran surgir–, las estrategias y los recursos didácticos que utiliza para mejorar la enseñanza y no su mero uso. Pero, estudiarlo, de manera conjunta, con el conocimiento sobre las características del aprendizaje de las matemáticas contribuye a comprender cómo el profesor interpreta las producciones de sus estudiantes, identifica y anticipa los errores habituales, aprovechando las fortalezas y dificultades en el aprendizaje de los tópicos (Carrillo et al., 2018).

ASPECTOS TEÓRICOS

El MTSK es un modelo teórico que permite estudiar el conocimiento que posee el profesor de matemáticas, considerando lo que tiene de específico ese conocimiento sobre la matemática como objeto de enseñanza y aprendizaje. Dos de sus tres dominios se refieren al *Conocimiento*, diferenciados entre *Matemático* (MK[1]) y *Didáctico del Contenido* (PCK) y, el tercero comprende las *Creencias sobre las Matemáticas y sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas*, situado en el centro del modelo, al considerar que son las que permean los dominios de conocimiento. (Figura 1)

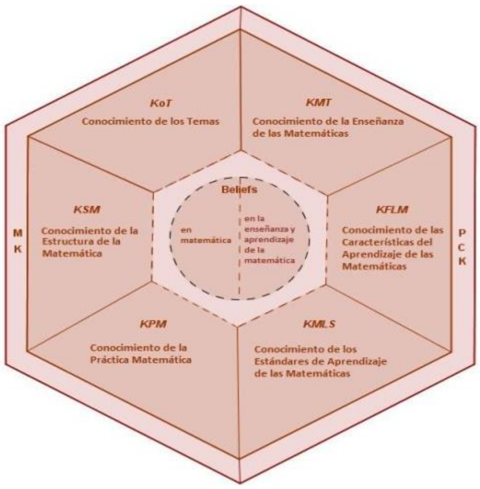


Figura 1. Modelo MTSK

En el MK se distinguen los subdominios *Conocimiento de los Temas* (KoT), *Conocimiento de la Estructura de la Matemática* (KSM) y *Conocimiento de la Práctica Matemática* (KPM). El PCK está formado por los subdominios *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* (KMT), *Conocimiento de las Características del*

1 Corresponde a sus siglas en inglés. A lo largo del documento, se utilizará esta forma en otras expresiones similares, salvo que se indique lo contrario.

Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas* (KMLS) (Carrillo et al., 2018).

Este artículo está focalizado en los subdominios *Conocimiento de los Temas*, *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* y *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas*, por lo que se ejemplifican alguna de sus categorías luego de presentar una breve descripción de los mismos.

El **KoT** abarca el conocimiento del profesor sobre los conceptos matemáticos y los procedimientos con fundamentación teórica, las diversas maneras de representación del contenido y los fenómenos atribuibles a un tema. Por ejemplo, el profesor sabe que, si una matriz cuadrada posee inversa entonces es única (dentro de la categoría *Definiciones, propiedades y sus fundamentos*).

El **KMT** se refiere al conocimiento que posee el profesor sobre la matemática asociado a la enseñanza. Entre otros, el profesor conoce que para que los estudiantes distingan cuándo la solución de un sistema de ecuaciones lineales podrá ser obtenida por la regla de Cramer, deberá utilizar diversos ejemplos. Entre ellos, sistemas lineales cuadrados –con al menos uno cuya matriz de coeficientes tenga determinante igual a cero– y rectangulares (correspondiente a la categoría *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*) (Regolini y Climent, 2021).

El **KFLM** alude al conocimiento del profesor sobre la matemática como objeto de aprendizaje. Particularmente, el profesor sabe que los estudiantes para calcular el determinante de una matriz de orden 3x3 prefieren emplear la regla de Sarrus a cualquier otro método (referido a la categoría *Formas de interacción con un contenido matemático*) (Regolini y Climent, 2021).

METODOLOGÍA

La investigación, desarrollada bajo un diseño de estudio de caso instrumental (Stake, 2007), es de tipo cualitativa e interpretativa (Lincoln y Guba, 1985) ya que persigue la comprensión del conocimiento especializado de una profesora que dicta clases en una Facultad de Ciencias Económicas en Argentina. Al momento del estudio Josefina –seudónimo–, Licenciada en Administración de Empresas, contaba con siete años de experiencia en la enseñanza del Álgebra Lineal. La profesora ha sido seleccionada por su buena predisposición para cooperar en la investigación y ser integrante del equipo docente donde la primera autora de este trabajo cumple el rol de profesora responsable.

La principal fuente de datos proviene de las clases grabadas en vídeo, utilizando el método de observación no participante (Cohen y Marrion, 2002) que se complementan con entrevistas semiestructuradas y el diario de clase de Josefina. Para esta comunicación, todos los datos se refieren a la resolución algebraica de sistemas de ecuaciones lineales a través del método de la Inversa.

La información recogida ha sido transcripta, dividida en unidades y estudiada a través de un análisis de contenido (Bardin y Suárez, 1996), considerando las definiciones de los diferentes subdominios y categorías del modelo MTSK. Esto ha permitido estudiar el conocimiento de la profesora cuando aborda la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de la inversa. De las transcripciones se han seleccionado episodios que ofrecen indicios o evidencias en la acción y declaración de la profesora que aluden a diferentes tipos de conocimiento identificados, principalmente, en los subdominios KoT, KFLM y KMT y la relación entre éstos.

RESULTADOS

Los episodios seleccionados para este trabajo, dan cuenta de la manera en que Josefina enseña a resolver sistemas de ecuaciones lineales.

La profesora sabe que algunos sistemas cuadrados podrían ser resueltos empleando la inversa de la matriz de coeficientes y que, para ello, necesitará emplear contenidos ya abordados (rango máximo, métodos para calcular la inversa, cómo se realiza el producto matricial, entre otros). Por su experiencia en la materia, conoce que este método suele ocasionar algunas dificultades a sus estudiantes.

Antes de comenzar a enseñar el procedimiento propiamente dicho, la profesora busca que los estudiantes presten especial atención a las condiciones establecidas en el enunciado del método de la inversa, apoyándose en su conocimiento sobre dificultades que advierte en los estudiantes referidas a la forma en que se vinculan con el contenido matemático y, a las que hace referencia tanto en su diario de clase [*"que el estudiante previo a aplicar el método de resolución, analice las condiciones del mismo"*] como en una entrevista [*"una dificultad que se suele hacer presente es intentar calcular la inversa de la matriz de coeficientes de SEL* –abreviatura que utiliza para referirse a los sistemas de ecuaciones lineales– *cuadrados pero sin tener la precaución de analizar si la matriz posee inversa"*] (KFLM–*Fortalezas y dificultades*).

Después de leer la consigna *"En caso de que sea posible, resuelva los sistemas de ecuaciones lineales [...] empleando la matriz inversa de la matriz de coeficientes y que justifique la respuesta"* y la sugerencia *"calcular la inversa aplicando cada uno de los métodos estudiados a fin de obtener mayor desenvolvimiento con ellos"* Josefina pregunta a sus estudiantes sobre *"¿qué cuestiones deberíamos analizar?"* intentando establecer, de manera general, que el sistema tiene que ser cuadrado y su matriz de coeficientes invertible, dando muestras de su conocimiento sobre ¿Cuándo se puede hacer? (KoT–*Procedimientos*), que reafirma indicando que este método no será empleado en sistemas de ecuaciones lineales rectangulares como tampoco, en aquellos cuya matriz de coeficientes cuadrada no posea inversa (KoT–*Definiciones, propiedades y sus fundamentos*) (**Unidad 1**).

J[2] : ¿Qué sistemas tengo que descartar desde un comienzo?

As: Los rectangulares.

J: ¿Por qué?

A: Porque no se les va a poder calcular la inversa a la matriz de coeficientes, no todas tienen inversa.

J: Porque las únicas matrices que tienen chance de tener inversa son las cuadradas o sea que a los sistemas rectangulares los vamos a descartar. Y ¿qué otra cosa? ¿Todos los sistemas cuadrados los voy a poder resolver por el método de la inversa?

As: No.

A: No, los compatibles determinados, los que tengan determinante distinto de cero.

J: En realidad, que su determinante sea distinto de cero, pero tiene que ver con que exista la inversa de la matriz de coeficientes. (**Unidad 1**)

---

2 J se refiere a Josefina, A alude a un alumno (aunque se trate de diferentes alumnos) y As indica varios alumnos.

En la Unidad anterior, hay indicios de que la profesora es capaz de apreciar imprecisiones en las argumentaciones de sus alumnos. Por ejemplo, la expresión del estudiante *"Porque no se les va a poder calcular la inversa a la matriz de coeficientes, no todas tienen inversa"* se puede interpretar como que algunas matrices rectangulares podrían tener inversa cuando, en realidad, esto nunca sucede (KFLM–*Fortalezas y Dificultades*).

Josefina, mientras dialoga con la clase, expresa el sistema de ecuaciones lineales mediante una ecuación matricial, especificando que es cuadrado. Supone la existencia de la inversa de la matriz de coeficientes y expresa la solución a través de un producto matricial (KoT–*Registros de representación*) ofreciendo indicios de que conoce ¿Por qué se hace así? y ¿Cómo se hace?) (ambos KoT– *Procedimientos*) y (KoT– *Registros de representación*). (**Unidad 2**).

J: Entonces si nosotros tenemos un sistema de ecuaciones lineales cuadrado

$$\boxed{A\ .\ X = B \qquad \text{cuadrado ✓}}$$

J: Y vamos a decir, si existe la matriz inversa de la matriz de coeficientes ¿qué podemos hacer? Podemos plantear que X va a ser igual ¿a qué cosa? A X lo voy a poder expresar ¿cómo? ¿Para qué me sirve la inversa? O me quedo ahí, digo tiene solución y nada más. X ¿a qué va a ser igual?

A: A la inversa de A por B.

J: Bien, a la inversa de A por B.

$$\boxed{X = A^{-1}\ .\ B}$$ (**Unidad 2**)

El uso de los cuatro sistemas de ecuaciones lineales de la guía de ejercicios revela su KMT (*Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*) ya que con ellos puede exhibir a sus estudiantes las diversas situaciones que se podrían presentar al intentar resolver un sistema empleando el método de la inversa.

Josefina clasifica cada sistema de ecuaciones lineales en rectangular o cuadrado, sin argumentar lo que toma en consideración. No obstante, se advierten indicios de que la profesora conoce que tanto un sistema lineal como su matriz de coeficientes pueden ser cuadrado o rectangular y que, dichas clasificaciones se corresponden entre sí –un sistema cuadrado tiene su matriz de coeficientes cuadrada– (KoT–*Definiciones, propiedades y sus fundamentos*). Estos indicios corresponden a evidencias de su conocimiento en una clase previa, de acuerdo a lo presentado en Regolini y Climent (2021).

En dos ejercicios, Josefina muestra saber que la solución del sistema de ecuaciones lineales –si existiera– no podrá ser obtenida utilizando la inversa de la matriz de coeficientes (KoT–*Procedimientos ¿Cuándo se puede hacer?*). En uno, porque el sistema es rectangular [*"¿Qué pasa con el inciso d? ¿Qué es lo primero que nos llama la atención de este ejercicio? ¿Qué pasa con este sistema de ecuaciones lineales? Es rectangular, ¿Puedo resolverlo por el método de la inversa? No puedo resolverlo por el método de la inversa porque es rectangular*"] y en el otro, porque a pesar de ser un sistema lineal cuadrado, su matriz de coeficientes no es invertible [*"¿Qué pasa con el inciso b? cuya expresión matricial es:* $A_{3x3}\ .\ X_{3x1} = B_{3x1}$ *(...) El sistema de ecuaciones lineales es cuadrado, pero sólo con esto no me alcanza. ¿Qué tengo que analizar? Si existe o no inversa. En este caso, optamos por el camino del rango porque ya lo teníamos calculado. ¿Qué pasó con el rango de A? ¿A qué era igual? A dos. Entonces*

¿Va a existir la inversa de A? No, porque el rango no es máximo. ¿A este sistema lo puedo resolver por el método de la inversa? No puedo resolverlo porque $\nexists A^{-1}$. *Aquéllos que le calcularon el determinante –se refiere al determinante de A– ¿cuánto les dio? Cero.*][3].

En el párrafo anterior, se advierten indicios de que Josefina sabe que la matriz de coeficientes, de un sistema de ecuaciones lineales cuadrado, será invertible si su rango es máximo o su determinante es distinto de cero (KoT–*Procedimientos: ¿Cuándo se puede hacer?*) y también, indicios de que conoce la relación que existe entre estos valores –que una matriz cuadrada tenga rango máximo es equivalente a que su determinante sea diferente de cero– (ambos, KoT–*Definiciones, Propiedades y sus fundamentos*).

Josefina evidencia conocer que sus alumnos, en muchas situaciones, se pierden en lo que están realizando y no saben si han llegado a la solución (KFLM–*Fortalezas y dificultades*) cuestión que ha sido manifestada por la profesora en una entrevista [*"les recalco cuál es el objetivo (resolver el SEL) para que los ejercicios no queden a la mitad, que no se queden sólo en la resolución de la matriz inversa, sino que la empleen para resolver el SEL"*]. Pero, en la clase, estos indicios se convierten en evidencia (**Unidad 3**).

J: Recién ahí lo que hice es calcular la inversa, ¿el ejercicio terminó?

A: No.

J: No, tengo que resolver el sistema usando la inversa. ¿Qué tengo que plantear ahora para poder resolver el sistema empleando la inversa?

A: El producto matricial.

J: Bien. Vamos a tener X, que era de orden 3x1 es igual a

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \frac{-2}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

J: Ahora ¿qué hago para llegar a la solución del sistema? O ¿llego hasta ahí?

A: No

J: No, multiplico, lo tengo que resolver. […] entonces me va a quedar

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

J: Llego a la solución del sistema de ecuaciones lineales. ¿A qué cosa? Que x es igual a menos seis, y es igual a tres y, z es igual a dos. Porque lo que tengo planteada es una igualdad de matrices. (**Unidad 3**)

En la unidad de información anterior, se evidencia que Josefina sabe que la solución obtenida corresponde a una matriz columna (KoT–*Procedimientos: Característica del*

3 En ambos casos, las expresiones entre corchetes sólo corresponden a la profesora, ya que se han eliminado las intervenciones de los estudiantes.

resultado) y, además, que de la igualdad matricial puede identificar, coloquialmente, el valor de cada una de las variables (KoT–*Definiciones, propiedades y sus fundamentos*).

CONCLUSIONES

El análisis efectuado ahonda en el conocimiento matemático que sustenta la práctica de una profesora universitaria de Álgebra Lineal, cuando enseña a resolver sistemas de ecuaciones lineales por el método de la inversa, desde la perspectiva del MTSK.

Al igual que en Zakaryan et al. (2018), nos ha permitido indagar acerca de relaciones específicas del conocimiento del profesor sobre la enseñanza y las características del aprendizaje de las matemáticas y en nuestro caso, ligado a su conocimiento de los temas.

En Josefina se advierte que su KoT sobre procedimientos (cuándo, cómo, por qué y características del resultado) parece sustentar su KFLM que se centra en dificultades de los estudiantes, respecto a que suelen no tomar en consideración las condiciones o propiedades del procedimiento, y en su KMT en cuanto a ejemplos cuya variedad pone de relieve qué sistemas de ecuaciones lineales podrán ser resueltos por el método de la inversa y cuáles no, presentando todas las situaciones posibles.

Si bien en una investigación previa, al analizar el conocimiento matemático especializado que evidencia Josefina en una clase correspondiente a la regla de Cramer (Regolini y Climent, 2021), su enseñanza no consideraba hacer explícito el porqué del procedimiento, en esta ocasión sí se hace explícito, quizá porque ese porqué va evidente en el propio procedimiento.

Este estudio contribuye a la identificación sobre relaciones de conocimiento entre los subdominios KoT, KFLM y KMT. Sin embargo, consideramos que las mismas requieren ser profundizadas en próximas investigaciones y, también, con otros métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Con el fin de indagar si emergen relaciones entre otros subdominios del MTSK, aportando así a una mejor comprensión del conocimiento matemático del profesor universitario.

Referencias

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Bardin, L. y Suárez, C. (1996). *Análisis de contenido* (2ª ed.). Akal.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz–Catalán, M. C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. In B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), Proceedings of the VIII CERME (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores–Medrano, E., Escudero–Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar–González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Cohen, L y Marrion, L. (2002). *Método de investigación cualitativa*. Madrid: La Muralla.

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión*, 20, 13-31.

Lincoln, Y. S. y Guba, E. G. (1985). *Naturalistic Inquiry*. Beverly Hills, Ca: Sage Publications.

Regolini, M. C. y Climent Rodríguez, N. (2021). Una mirada a la regla de Cramer desde el conocimiento especializado del profesor universitario. *Revista Tangram*, *4*(02), 2595-0967.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. (4a ed.) Morata.

Vasco-Mora, D. y Climent, N. (2021). The specialised knowledge and beliefs of two University lecturers in linear Algebra. En S. Zehetmeier, D. Potari, y M. Ribeiro (eds.), *Professional Development and Knowledge of Mathematics Teachers* (pp. 104-123).

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E., y Carrillo J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, 36(2), 105-123.

UNA PROPUESTA DE MODELO DE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO SOBRE EL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL EN PRIMARIA

A proposal for a specialized knowledge model on the decimal numbering system in primary school

Olvera, C. [a]; García, E. [a]; Escudero-Ávila, D. [b]

[a]Universidad Autónoma de Querétaro; [b]Sin adscripción actual

Temática: 3 – MTSK en diferentes temas y etapas

Resumen. El objetivo de este estudio es caracterizar el conocimiento especializado del profesor de primaria sobre el Sistema de Numeración Decimal (SND). Para lograr dicho objetivo y desarrollar una metodología pertinente para su exploración y el diseño de tareas matemáticas que permitan recoger datos sobre lo que conocen los profesores, se propone el diseño de una propuesta teórica de análisis a partir del modelo MTSK, que describe y organiza el contenido en sus aspectos disciplinares y didácticos, situando el Sistema de Numeración Decimal, su comprensión y enseñanza, en el nivel de primaria.

Palabras clave. SND, MTSK, profesor, primaria.

Abstract. The objective of this study is to characterize the specialized knowledge of elementary school teachers about the Decimal Numbering System (DNS). To achieve this objective and to develop a relevant methodology for its exploration and the design of mathematical tasks that allow collecting data on what teachers know, we propose the design of an analysis guide based on the MTSK model, which describes and organizes the content in its disciplinary and didactic aspects, situating the Decimal Numbering System, its understanding and teaching, at the elementary school level.

Keywords. DNS, MTSK, teacher, primary.

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje del sistema de numeración decimal -en adelante SND- es clave en la formación escolar e implica una comprensión profunda como objeto matemático y como objeto cultural. En este sentido precisa una enseñanza que ayude al alumno a comprender su estructura y a reflexionar en sus características, que no sea dosificada ni reducida a resolver ejercicios (Terigi y Wolman, 2007).

Se presenta una propuesta teórica que parte de una problemática sobre el aprendizaje de las matemáticas en el contexto educativo mexicano. De acuerdo con resultados de la prueba PISA 2018 existe un rezago educativo en el área de matemáticas, pues solo el 1% de los alumnos alcanza una competencia matemática alta a pesar de que Matemáticas y Español son las asignaturas con más carga horaria en el currículo escolar. Uno de los propósitos generales de la enseñanza de las matemáticas en educación básica, expresado en el Plan de Estudios sobre los aprendizajes clave para la Educación Integral SEP (2019) es que los alumnos desarrollen una actitud positiva y crítica hacia las matemáticas, para desarrollar confianza en sus propias capacidades.

En relación con lo anterior y con el hecho de que el SND es base para la construcción de otros conocimientos, la apropiación y comprensión del mismo por parte de los alumnos influye en la adquisición de otros contenidos matemáticos. En la interacción de

Olvera, C., García, E., & Escudero-Ávila, D. (2021). Una propuesta de modelo de conocimiento especializado sobre el sistema de numeración decimal en primaria. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 255–262). Congresseme.

losalumnos con el SND el docente es el mediador quien, a través de sus conocimientos, anticipa y guía el proceso de aprendizaje de los alumnos.

De acuerdo con el documento de perfiles y parámetros para el ingreso a la educación básica (SEP, 2019) se establece que "un buen docente conoce a sus alumnos y sabe cómo aprenden y lo que deben aprender, organiza y evalúa el trabajo educativo y realiza una intervención didáctica pertinente" (p. 12). Es así que el conocimiento para la enseñanza debiera, por tanto, abarcar el aspecto disciplinar y didáctico.

El plan de estudios vigente para la licenciatura en educación primaria en México, expresa en sus competencias profesionales del perfil de egreso, que los docentes deben establecer relaciones entre los conceptos y el logro de los aprendizajes, y desarrollar estrategias para que los alumnos se apropien de ellos. En matemáticas, específicamente en aritmética, uno de los propósitos de la enseñanza es que los futuros docentes conozcan las propiedades de los números y sus relaciones, y que desarrollen estrategias donde sus alumnos se puedan apropiar de los conceptos y nociones (DOF, 2018). Sin embargo, debido al carácter multidisciplinar de la formación docente, esto no es suficiente, pues además de conocer sobre las propiedades del SND en los dos cursos de aritmética que provee el plan de estudios, el docente debe desarrollar estrategias, seleccionar recursos, diseñar tareas y hacer intervenciones, por ello es preciso que el docente conozca cómo se organiza y estructura un contenido matemático en el currículo de primaria. Otro factor en relación con lo anterior, es que algunos de sus formadores no están especializados en la enseñanza de las matemáticas, lo que limita la profundidad con que se aprende el contenido matemático, dejando en la vocación de cada docente la decisión de cómo y cuánto profundizar en su conocimiento (Medrano et al., 2017).

Por tanto, interesa centrarse en el análisis de lo que conocen los profesores sobre el SND, los aprendizajes que han adquirido, derivados de su formación académica y su experiencia en las aulas. El propósito principal de la propuesta que presentamos es conocer el conocimiento que tiene el profesor de primaria sobre el SND y caracterizarlo.

Para lograr este propósito consideramos necesario partir de un análisis teórico sobre el conocimiento que se pretende caracterizar. Es por ello que en este reporte nos centraremos en mostrar una propuesta construida a partir de referentes teóricos de la didáctica de las matemáticas y del currículum vigente en Educación Básica en el contexto mexicano. Esta caracterización teórica se aborda desde el modelo para el conocimiento especializado MTSK Mathematics Teacher's Especialised Knowledge (Carrillo-Yañez et al., 2018), el cual se utilizará para analizar el conocimiento de los profesores de primaria respecto a su enseñanza de las matemáticas sobre el SND. La estructura del modelo MTSK organiza el conocimiento matemático considerando aspectos disciplinares y didácticos, razón principal de nuestra elección.

EL MTSK COMO MODELO DE ANÁLISIS

El modelo MTSK permite analizar el conocimiento matemático y didáctico matemático del docente. Para identificar y definir el conocimiento que subyace en la enseñanza de un contenido es necesario conocer cómo se define y estructura dicho contenido. El modelo MTSK provee una especie de mapa que permite identificar de forma amplia los aspectos relacionados con un contenido matemático. Este modelo se ha utilizado en primaria en estudios como: la enseñanza de las rectas en geometría de una maestra de quinto grado (Liñán-García, 2017) y la enseñanza de los números racionales en sexto grado por parte de un profesor de matemáticas que trabaja en primaria (Rojas et al., 2015). De modo que la enseñanza de los contenidos matemáticos particulares es un tema de interés y por medio del modelo se ha podido analizar sobre dichos contenidos. El SND es un sistema posicional de base diez, compuesto de diez símbolos (0,1,2, 3, 4, 5, 6 7, 8,9) que forman cantidades que se leen de derecha a izquierda, comenzando por el mayor, es multiplicativo y aditivo, es decir las cantidades que se forman son la suma de cada cifra multiplicada por su potencia según su posición (Cid, Godino y Batanero, 2003).

Una vez que se reconoce la estructura y propiedades de este sistema, puede explorarse también su construcción histórica para llegar a la convención que usamos hoy en día, la cual tomó por lo menos tres milenios. Los momentos clave en la construcción historia del SND fueron; la biyección, los agrupamientos y la escritura (Ifrah, 1987). El SND tiene su origen en la India, después se expandió al mundo árabe y Europa y se hizo popular gracias a la practicidad y economía en su escritura por ser un sistema posicional. Lo anterior permite reflexionar sobre el proceso de abstracción presente en la construcción del SND, y que resulta difícil para los alumnos, especialmente si este se dosifica y se reduce a instrucciones y resolución de algoritmos (Terigi y Wolman, 2007), pues el SND como objeto social deriva en conocimientos y concepciones por parte de los alumnos antes de entrar a la escuela, las cuales se confrontan con su enseñanza formal.

Como se ha mencionado pretendemos mostrar una propuesta de caracterización teórica del conocimiento matemático y didáctico asociado al SND en términos de los dominios y subdominios del modelo MTSK. En consecuencia, se ha construido una guía del conocimiento especializado del SND, con el propósito de afinar nuestra mirada sobre el conocimiento del profesor de primaria y diseñar una metodología que permita explorar este conocimiento.

Es preciso recordar que la descripción del SND se da en términos del conocimiento en primaria. Sus propiedades y elementos pueden ser exploradas en mayor profundidad y dar lugar a otras reflexiones, sin embargo, el análisis que se presenta se acota a la enseñanza en primaria. En este sentido, describiremos a continuación la propuesta teórica construida para caracterizar el conocimiento especializado del profesor de primaria sobre el SND, con la intención de discutirla con la comunidad de expertos.

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO ASOCIADO AL SND

Este dominio se refiere al conocimiento profundo del sistema de numeración decimal, los contenidos, conceptos que lo integran, su estructura, propiedades, reglas de operación, sus relaciones inter conceptuales y cómo se organiza en torno a la práctica matemática. A continuación, se describe cada subdominio y las categorías que lo integran.

Conocimiento de los temas KoT

Implica un conocimiento amplio para el caso del SND. Se espera que el profesor conozca las definiciones, conceptos, fenómenos, procedimientos, saber cómo se organiza el SND en el currículo de primaria. Los temas que lo componen, los conceptos y definiciones pertinentes al SND y cuáles fenómenos ayudan a producir conocimiento. Lo conforman las siguientes categorías.

Fenomenología: Los modelos atribuibles a un tema visto como fenómenos que pueden generar conocimiento matemático del SND, tales como la agrupación y descomposición aditiva que consiste en descomponer una cantidad en cada uno de los agrupamientos que la conforman y la potencia que los multiplica. La lectura y escritura de números permite conocer las reglas orales y escritas del sistema y sus irregularidades (Terigi y Wolman, 2007). Por ejemplo, al escribir 10 000 (diez mil) se puede observar que después de los millares, los nombres de los agrupamientos están compuestos por los anteriores.
Propiedades: Que el docente conozca la propiedad multiplicativa y aditiva del SND, es decir que las cantidades que se forman en el SND, son la suma de cada uno de los

agrupamientos y la potencia que los multiplica (4358=4x1000+3x100+5x10+8). Conocer el valor de posición implicado en el sistema, pues cada número en una cantidad tiene un valor absoluto y otro de acuerdo a su posición, por ejemplo, en 320, el 3 vale a su vez 300 (Cid, Godino y Batanero, 2003).

Conceptos y definiciones: Se espera que el profesor conozca que el sistema de numeración decimal es un sistema aditivo, multiplicativo y posicional y los conceptos que se relacionan con su estructura (Cid, Godino y Batanero, 2003; Bedoya y Orozco, 1991; Broitman, 2014).

- Los dígitos: numerales consecutivos que sirven para formar cantidades de manera infinita, repitiéndolos, gracias al valor de posición, en el SND son diez
- Los agrupamientos: integración de diez elementos que a su vez se integra en otro, también se llaman unidades de orden
- El cero: numeral que expresa la ausencia de un agrupamiento, fue integrado por diversas culturas
- Valor de posición: valor de un número de acuerdo a la posición que ocupa en una cantidad (en el 32 el tres vale 3 y 30)
- Base: indica el total de elementos agrupados donde se vuelve a iniciar el conteo, el SND es base 10

Registros de representación: El SND tiene dos representaciones, oral y escrita. La oral tiene irregularidades en la serie del 11 al 15, y repite los agrupamientos en los números mayores de mil como (diez mil= 10 000). La relación entre ambas representaciones está dada por el valor de posición (Cid, Godino y Batanero, 2003). Esto nos permite expresar oralmente doscientos quince, pero escribir 215.

Procedimientos: El conocimiento por parte del profesor de que las propiedades del SND permiten el funcionamiento de los algoritmos convencionales y heurísticos. El conocimiento de procedimientos que ayudan a la comprensión de otros, como apoyarseen la oralidad del SND al enunciar cantidades para construir la notación desarrollada.

Conocimiento de la estructura matemática KSM

El conocimiento de las relaciones inter conceptuales de los conceptos y propiedades del SND, por ejemplo, la relación entre el valor de posición de un número y los agrupamientos de decenas, centenas y millares. Estas conexiones consideran la temporalidad que permite secuenciar un tema, y la delimitación para saber hasta donde son viables las relaciones entre contenidos. A continuación, se describen las conexiones de conocimientos avanzados y elementales que se presentan en el SND.

Conexiones de complejización: Relación entre los agrupamientos o unidades de orden y el valor de posición. La relación entre potencia y raíz. La resolución de las operaciones básicas implica relaciones con las propiedades del SND (Marín, 2000), como el valor de posición, y el manejo de los agrupamientos. Se requiere el dominio de una propiedad para abordar otra, dominar la serie numérica permite trabajar en la recursividad de la misma.

Conexiones de simplificación La expresión matemática de una suma de diferentes maneras como antecedente a la descomposición aditiva (45=10+10+10+10+5 o 45= 4x10+5x1 o 45= 40 +5). El manejo de la serie oral y escrita por parte de los alumnos en los primeros grados es posible gracias a los aprendizajes adquiridos en educación infantil como la enumeración, el conteo y la correspondencia del total de una colección con su cardinal, antes de agrupar en diez es preciso conocer qué significa el valor total de un número (Miranda et al., 2018).

Conocimiento de la práctica matemática KPM

Destaca la importancia de que el profesor no solo conozca resultados matemáticos establecidos, sino formas de proceder para llegar a ellos, saber cómo se explora y genera el conocimiento matemático. Para este subdominio se han construido dos categorías:

Prácticas ligadas a la matemática en general: El conocimiento matemático que subyace en su enseñanza, característico de la matemática, diferente a otras áreas de conocimiento como: la argumentación. Esto se refiere a que el docente a través de sus conocimientos pueda explicar cómo funcionan algunos procedimientos relacionados con el SND, como la práctica de "llevar uno". En matemáticas, el aprendizaje está vinculado fuertemente con la reflexión y el análisis.

Pensamiento inductivo: Dar ejemplos, hacer tanteos, casos particulares y modificar algunas condiciones, ver qué sucede. Como muestra, llegar al concepto de valor de posición, comenzando con la suma de agrupamientos, después multiplicar por un mismo número diferentes agrupamientos por ejemplo 3x100 y 3x10, de modo que se observa que siendo el mismo número su valor puede cambiar según el agrupamiento que lo multiplica.

Prácticas ligadas a una temática matemática: Conocimiento por parte del profesor respecto a que la enseñanza del SND en educación primaria está ligada a su uso (SEP, 2019). Se aprende la serie mientras se cuentan colecciones, se conocen los agrupamientos al tiempo que se forman agrupamientos de diversas cantidades de objetos, se escriben cifras y se comparan de acuerdo a diversos criterios, se aprende del valor de posición en la resolución de algoritmos, la descomposición aditiva permite reflexionar sobre la propiedad multiplicativa del SND.

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO PCK

Hemos mostrado la organización del SND en cuanto al conocimiento matemático, ahora se describirá el conocimiento del SND en el ámbito de la didáctica del profesor la cual se remite más allá de la enseñanza.

Conocimiento de las características de aprendizaje de los alumnos KFLM

No se refiere a las características personales de los estudiantes, sino aquellas derivadas de la interacción por parte del alumno con el objeto de conocimiento. Se tienen las siguientes categorías.

Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático: Conocimiento de las dificultades epistemológicas como la comprensión en el uso del cero, qué implica el cero en una cantidad y cómo opera el cero en una suma o en una resta, que el docente conozca sobre el cero en la historia del SND, porqué fue creado debido a una necesidad de representar la ausencia de algo, ya que era insuficiente con los símbolos que se tenían (Broitman, 2014). Conocimiento de los errores de escritura en las cantidades, a causa de la diferencia entre oralidad y escritura del sistema, la dificultad para comprender el valor de posición. Entre las fortalezas están, las habilidades y estrategias de los alumnos de apoyarse en la regularidad de la serie numérica para aprenderse los números.

Formas de interacción con un contenido matemático asociadas a su aprendizaje: Conocimiento de las estrategias que desarrollan los alumnos al enfrentarse con tareas matemáticas del SND. El aprendizaje del SND es secuenciado, ello implica aprender conceptos y luego ponerlos a prueba para construir otros, por ejemplo, el valor de los números enteros respecto de su posición, cambia al aprender sobre los decimales. Otros aspectos de acuerdo con Lerner y Sadovsky (1994) son, que los alumnos consideran que la cantidad de cifras corresponde con su magnitud, es decir entre más cifras tiene es mayor, que los números no se escriben como se escuchan y yuxtaponen las cantidades, escriben 304 para 34.

Intereses y expectativas de los estudiantes sobre el abordaje de un contenido matemático: Conocimiento de lo que los alumnos piensan sobre las matemáticas, si creen que deben memorizar las reglas de operación de los algoritmos como el valor de posición, en vez de reflexionar cómo funcionan, creer que el SND de la escuela no tienen que ver son su vida real y futuras situaciones. A partir de estas ideas y concepciones el docente interviene para mostrar el enfoque cultural y social de las matemáticas y del SND (Terigi y Wolman, 2007).

Teorías formales y/o personales asociadas al aprendizaje de un contenido matemático: Que el profesor conozca resultados de investigación sobre el conteo, la enumeración, la serie numérica, el agrupamiento. Teorías de la construcción del número como los principios del conteo de Gelman y Gallistel (1978) citado en Miranda et al. (2018), que le ayuden a identificar dificultades y errores en el aprendizaje de la serie en los primeros grados e intervenir su enseñanza.

Conocimiento de la enseñanza matemática KMT

Se refiere al conocimiento de recursos, materiales, modos de presentar el contenido, uso de ejemplos, analogías adecuadas, todo ello en relación con el SND, y cómo este incide en la enseñanza, no se incluyen técnicas de control de grupo o de enseñanza general del docente. Para este subdominio se han considerado tres categorías:

Teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático: El conocimiento que puede tener un profesor de que la enseñanza del SND será progresiva en todos los grados de primaria y toma aspectos de teorías de aprendizaje del SND. Conocer que debe considerar elementos del SND como la base, los dígitos de la serie y la potencia que se establecen en el KoT para fundamentar la enseñanza de los agrupamientos y el valor de posición (Bedoya y Orozco, 1991).

Recursos materiales y/o virtuales de enseñanza asociados a un contenido matemático: conocer cómo, en qué momento, con relación a qué contenido usar materiales como: regletas, cubos de dienes, dados, dominós, ábacos saber cuáles son las limitaciones y potencialidades de estos materiales con respecto al SND. En este caso el uso del dinero (moneda mexicana) por su similitud con los agrupamientos del SND (Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología de la Nación, 2004)

Estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático: Conocimiento del diseño y uso de diferentes tareas matemáticas con la finalidad de abordar el SND. El conocimiento del profesor de estrategias y tareas acordes al grado y nivel de comprensión de los alumnos y el concepto que se desea potenciar; la integración de diversas colecciones para trabajar la serie en primeros grados. Descomposición aditiva, contar y organizar grandes cantidades de objetos para trabajar las unidades de orden en grados intermedios. Lectura de datos como, las estadísticas de población mundial, la extensión territorial, para escribir y leer números de más de 5 cifras en los últimos grados. Uso del cálculo mental para reflexionar sobre las propiedades del SND.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas KLMS

Conocimiento de lo que está estipulado que aprenda un estudiante. Conocimiento de la organización del currículo de primaria en torno al SND, los estándares de matemáticas, lo que se espera en determinado nivel escolar, los contenidos y cómo se estructuran, el nivel de aprendizaje adecuado para su enseñanza. Se consideran las categorías:

Nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado para un contenido en un determinado momento escolar: Se espera que el profesor conozca el desarrollo gradual del SND en los 6 grados de primaria, y por ende las habilidades que debe potenciar en sus estudiantes. El programa de estudio Aprendizajes Clave para la Educación Integral (SEP, 2019 trabaja con el SND y sus características respecto a la serie numérica, los agrupamientos hasta 100 y la base en los primeros grados. El valor de posición, los agrupamientos y la descomposición aditiva se presentan en tercer grado. Las características del SND en relación con otros sistemas numéricos se ven en quinto grado. Para sexto grado se debiera tener un conocimiento general del SND que permita operar con él eficientemente.

Secuenciación de diversos temas: El conocimiento del profesor de la secuencia que siguen los temas relacionados con el SND en cuanto al programa de estudios divide el libro, las lecciones abordan el conocimiento de la serie, regularidad y agrupamientos, operaciones de conteo y suma de agrupamientos., libro para el maestro, libro para el alumno. Conocer la organización temporal y temática de las actividades que se proponen en cada uno. En primer y segundo grado (SEP, 2019) el aprendizaje clave a desarrollar es: "lee, escribe y ordena números hasta 100 y 1000", el cual se desarrolla en los primeros trayectos formativos del libro.

En el plan de estudios 2011 vigente (SEP, 2011), el aprendizaje esperado que se desarrolla de tercero a sexto es "lee, escribe y produce números de hasta cuatro cifras". Las lecciones abordan el valor de posición, la descomposición aditiva en unidades, decenas, centenas y millares, la lectura y escritura de números hasta cuatro cifras, además de la recta numérica en tercer grado. En cuarto se introducen los decimales. En quinto se hace una comparación entre los sistemas de numeración egipcio, romano y maya con el nuestro, y en sexto se trabaja con lectura y escritura de grandes cantidades y el principio de densidad de los decimales.

CONCLUSIONES

La construcción del MTSK del SND se construyó considerando el desarrollo de este contenido en la educación primaria a lo largo de los seis años de formación, de acuerdo a los programas de estudio vigentes, y con elementos de la didáctica de las matemáticas que refieren al aprendizaje del SND. Por tanto, la propuesta teórica presentada es una guía para identificar el conocimiento que posee el profesor de primaria (Carrillo-Yañez et al., 2018), considerando que cada elemento del MTSK se sitúa en y para la enseñanza en educación primaria. Es así que algunas categorías no se incluyen en la propuesta, por ejemplo, las demostraciones matemáticas, debido a que no es un conocimiento que se trabaja en primaria. En una etapa posterior de la investigación, se utilizará este modelo teórico del SND como guía para el diseño metodológico en una fase empírica de obtención de datos con profesores. De acuerdo con Ponte (2012) los profesores aprenden a partir de su actividad y de la reflexión sobre ella, por lo tanto, los conocimientos matemáticos y la experiencia diaria en el aula es fundamental.

Referencias

Diario Oficial de la Federación (DOF). Acuerdo N°14/07/18 por el que se establecen los planes y programas de estudio de las licenciaturas para la formación de maestros de educación básica. Diario oficial de la federación, Estados Unidos Mexicanos, Presidencia de la República, México, 3/08/2018.

Broitman, C., Grimaldi, V., y Ponce, H. (2014). *El valor posicional, reflexiones y propuestas para su enseñanza*. Ciudad autónoma de Buenos Aires, Santillana

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Cid, E., Godino, D., J., y Batanero, C., (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros, manual para el estudiante*. Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada.

George, I. (1987). *Las cifras. Historia de una gran invención*. Alianza Editorial.

Lerner, D., y Sadovsky., P (1994). *El sistema de numeración: un problema didáctico*. En Parra, C., y Salz, I., (1994). Didáctica de las matemáticas: Paidós.

Liñán-García, M. (2017). Conocimiento especializado en geometría en un aula de 5° de primaria. [Tesis doctoral] Universidad de Huelva, España.

Marín, A., (2000). Principios y estándares para la educación matemática del National Council of Teachers of Mathematics (traducción al castellano de la versión americana). Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN CIENCIA Y TECNOLOGÍA DE LA NACIÓN. 2004. *Juegos en matemática EGB1 el juego como recurso para aprender material para maestro*. Buenos Aires.

Miranda, F., Rodríguez, E. J., López, F., y Romero, P. (2018). ¿Cómo Cuentan cuando Cuentan? Cardinalidad en Niños de Preescolar. *Acta de Investigación Psicológica*, *8*(3), 25–35. https://doi.org/10.22201/fpsi.20074719e.2018.3.03

Bedoya, E. y Orozco, M. (1991). El niño y el sistema de numeración decimal. *Comunicación, Lenguaje y Educación, 3*(11-12), 55-62.

Osuna, C., y Diaz., K.M., (2020). El logro de los aprendizajes en Matemáticas en PISA, ENLACE, y PLANEA en Adolescentes mexicanos. Un análisis retrospectivo. *Archivos analíticos de políticas educativas*, 28 (28).

Ponte, J.P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesor de matemáticas. En N. Planas (Ed.). Teoría, crítica y práctica de la educación matemática (pp.83-98). España: Editorial Graó.

Rojas, N., Flores, P., y Carrillo, J. (2015). Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *29*(51), 143–166. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a08

SEP (2011). *Plan y programas de estudio 2011.* Obtenido de https://www.gob.mx/sep/documentos/programa-tercer-grado-espanol?state=published

SEP (2019). Aprendizajes Clave para la Educación Integral, Educación Primaria 3°. *Obtenido de* https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/biblioteca/primaria/3grado/1LpM-Primaria3grado_Digital.pdf

Terigi, F., y Wolman, S. (2007). Sistema de numeración: Consideraciones acerca de su enseñanza. *Revista Iberoamericana de educación*, *43*, 59-83.

COMO REPRESENTAR REDES DE CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

How to Represent Specialized Knowledge Networks of Mathematics Teachers

Moriel-Junior, J. G. [a]

[a] Instituto Federal de Mato Grosso, Brasil

Temática: 3 – MTSK em diferentes temas e etapas

Resumo. O aumento de pesquisadores interessados no marco Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK) e a escassez de ferramentas metodológicas para o trabalho rigoroso de pesquisa associado nos levou ao objetivo deste artigo que é descrever alguns modos de representar redes de conhecimento especializado de professores de Matemática. Adotamos o MTSK e as teorias sobre a construção de mapas conceituais e de redes de conhecimento em uma pesquisa qualitativa, descritiva e exploratória. Analisamos uma amostra intencional não-probabilística de rede ou mapa de conexões entre conhecimentos MTSK extraídas de 6 produções científicas. Os resultados forneceram características emergentes em sete focos: Formato de rede; Abrangência em termos de subdomínios; Descrição de conceitos; Qualidade do conhecimento MTSK; Modos de apresentar e distinguir conceitos; Conectores de conceitos; Síntese textual-explicativa da rede.

Palavras-chave. Rede de conhecimento, Mapa conceitual, Ferramentas metodológica, Rede MTSK.

Abstract. The increase in researchers interested in the Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK) framework and the scarcity of methodological tools for the associated rigorous research work led us to the purpose of this article, which is to describe some ways to represent specialized knowledge networks of mathematics teachers. We adopted the MTSK and theories on the construction of concept maps and knowledge networks in a qualitative, descriptive and exploratory research. We analyzed an intentional non-probabilistic sample of network or map of connections between MTSK knowledge extracted from 6 scientific productions. The results provided emerging features in seven focuses: Network format; Coverage in terms of subdomains; Description of concepts; MTSK knowledge quality; Ways of presenting and distinguishing concepts; Concept connectors; Textual-explanatory synthesis of the network.

Keywords. Knowledge Network, Concept Map, Methodological tools, MTSK Network.

INTRODUÇÃO

A pesquisa científica sobre conhecimento especializado de professores de Matemática com o *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK) tem aumentado significativamente em diferentes partes do mundo (Moriel-Junior e Duarte, 2020). Depois da publicação oficial do MTSK (Carrillo et al., 2014), houve novos pesquisadores começando a utilizá-lo, ano após ano, indo de 19 autores em 2014 a 315 em 2019, considerando os 323 trabalhos identificados na base *Google Scholar* (Moriel-Junior e Duarte, 2020). O aumento da disseminação deste marco teórico, gera a necessidade de ferramentas metodológicas que apoiem a aproximação de novos pesquisadores no trabalho de pesquisa rigoroso com o MTSK. Neste sentido, existem por exemplo, o *Quadro de Diferenciação de Conexões KoT e KSM* (Vasco et al., 2017) e o *iMTSK* (Moriel-Junior, 2021), um instrumento de análise de conhecimentos docentes especializados aplicável não só para a Matemática, como também Biologia, Física, Química e outras.

Moriel-Junior, J. G. (2021). Como representar redes de conhecimento especializado de professores de matemática. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 263–270). Congresseme.

Entretanto, mais importante do que identificar indícios e evidências de conhecimentos (Escudero et al., 2015; Moriel-Junior e Carrillo, 2014), é compreender profundamente como tais elementos são inter-relacionados pelos professores para educar em diferentes etapas educativas. Assim, o objetivo deste artigo é descrever alguns modos de representar redes de conhecimento especializado de professores de Matemática. Este artigo[1] faz parte dos esforços do grupo de pesquisa *TSK Group*[2] do Brasil liderado pelo autor e está inserido na Rede Ibero-americana de Investigadores MTSK.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Conhecimento especializado de professores de Matemática

O *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* - MTSK (Carrillo et al., 2014) é um modelo teórico que descreve um conjunto de conhecimentos especializados que pode ou deve ter um professor para ensinar e fazer aprender Matemática. Ele é representado hexagonalmente com dois domínios (matemática e didático), seis subdomínios e as crenças nucleares (Carrillo-Yañez et al., 2018). Os subdomínios incluem conhecimentos:

- de Tópicos matemáticos, contemplando os objetos matemáticos em si, incluindo quatro categorias: Fenomenologia e aplicações; Definições, propriedades e seus fundamentos; Registros de representação; Procedimentos (quando, como, por que fazer e as características do resultado).
- da Estrutura de Matemática, abrangendo conexões entre os objetos que estruturam a Matemática, incluindo quatro categorias: Conexões de simplificação; Conexões de complexização; Conexões auxiliares; Conexões transversais.
- da Prática Matemática, relativo aos modos de produzir a matemática em si mesma, ao metaconhecimento relativo ao fazer matemático, incluindo os indicadores associados a definir, demonstrar, usar heurísticas e exemplificar (Sánchez-García et al., 2021).
- das Características de Aprendizagem da Matemática, com foco no aluno, incluindo quatro categorias: Teorias de aprendizagem formais ou pessoais; Potencialidades e dificuldades de aprendizagem matemática; Modos do estudante interagir com o conteúdo; Aspectos emocionais da aprendizagem matemática.
- do Ensino de Matemática, incluindo três categorias: Teorias de ensino formais ou pessoais; Recursos de ensino físicos e digitais; Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos.
- de Parâmetros de Aprendizagem da Matemática, incluindo três categorias: Resultados esperados de aprendizagem em determinada etapa educativa; Nível de desenvolvimento conceitual ou procedimental esperado; Sequenciação de tópicos.

Redes de conhecimentos e sua construção

Reunir uma grande quantidade de componentes cognitivos e apresentá-los graficamente suas inter-relações não é algo simples. Isso pode ser denominado de redes de significações (Schlemmer e Neto, 2008), cartografia cognitiva ou redes de conhecimento (Okada, 2008). Sua construção pode ser chamada de mapeamento conceitual e feita por meio de distintas técnicas, processos, softwares e formatos (Okada, 2008). O tipo mais difundido é o Mapa Conceitual (MC), desenvolvido nos anos 1970 por Joe Novak e colaboradores

[1] Contou com apoio da FAPEMAT (FAPEMAT.0204484/2017, Edital Universal 42/2016).
[2] Sediado no IFMT, *campus* Cuiabá. Acesso em http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/529979

para determinar o progresso de estudantes em seu conhecimento de ciências (Novak e Gowin, 1984). Estudos mostram que a construção de MC tem correlação com as fases da aprendizagem significativa (Moreira, 2006; Rodrigues e Cervantes, 2015).

Os MC são "representações gráficas bidimensionais do conhecimento de uma pessoa (ou grupo de pessoas) sobre um assunto" (Cañas e Carvalho, 2005, p. 10). São compostos por conceitos (geralmente incluídos dentro de círculos ou caixas) ligados por arcos que estabelecem a relação entre eles, formando assim as proposições. No estilo Novakiano, as principais características do MC são: há hierarquia entre conceitos, os mais gerais ficam no topo e os específicos na parte inferior; uma unidade de conhecimento é formada por um par de conceitos unidos por uma frase de conexão, preferencialmente, os mais curtos possíveis; conceitos e frases deve ser interpretados do referido contexto; proposições devem fazer sentido por si só quando lidas separadamente do mapa; o conceito usado na raiz do mapa explicita o foco principal do mapa (Cañas e Carvalho, 2005). É comum o uso do *software* CmapTools na construção de MC.

No caso da pesquisa com MTSK, o investigador é quem elabora o MC para representar o conhecimento de outrem (um grupo ou sujeito da pesquisa, como licenciando, professor ou formador) sobre um determinado assunto (a partir de dados primários ou secundários) dentro de um determinado contexto (como formação, planejamento ou prática docente).

Há uma crítica quanto ao predomínio do uso de construções bidimensionais em mapas conceituais, mesmo havendo desenvolvimento suficiente de tecnologia para a utilização de um espaço pluridimensional com conexões tridimensionais, exploração a partir de hipertexto, realidade aumentada, modelos fractais e outros (Schlemmer e Neto, 2008).

METODOLOGIA

Esta é uma pesquisa qualitativa, descritiva e de caráter exploratório sobre modos de representar redes de conhecimento especializado de professores de Matemática. As fontes de dados foram produções científicas que atendessem os critérios: (i) o objetivo inclui identificação evidências e indícios de conhecimentos com o MTSK; (ii) apresenta rede ou mapa de conexões entre os conhecimentos identificados. Segundo estes critérios, foi selecionada uma amostra intencional não-probabilística de 6 trabalhos, dada a limitação deste artigo, a saber: Escudero (2015); Aguilar (2016); Moriel-Junior e Moral (2017); Zakaryan e Ribeiro (2017); Reyes-Camacho (2018); Moriel-Junior (2021). Para obtenção de dados extraímos uma imagem da rede de conexões mais ampla possível de cada trabalho e realizamos leituras do texto. Na análise dos dados realizamos comparações sistemáticas das imagens e textos entre si e com a literatura revisada, originando categorias emergentes sobre características principais dos tipos de redes MTSK.

RESULTADOS

Identificamos na amostra diferentes modos de representar graficamente as conexões entre conhecimentos MTSK. Há uma multiplicidade de nomenclaturas atribuídas pelos autores a cada representação, que podem ser encontradas nas Figuras a seguir.

Metade da amostra se aproxima de um MC novakiano (Figuras 1, 2 e 3) e a outra afasta-se (Figuras 4, 5 e 6). Neste último grupo há uma simulação de tridimensionalidade quando se usa sobreposições de elementos geométricos (Figura 5) ou uma escala de protagonismo do conhecimento (Figura 6). Isto parece ser um avanço contra a crítica ao predomínio de construções bidimensionais euclidianas (Cañas e Carvalho, 2005). Um ponto importante é que não é relevante o aspecto quantitativo de contagem de conhecimentos na amostra analisada, embora haja uma codificação enumerada de subdomínio nas Figuras 1 e 4. Predominando, portanto, o enfoque qualitativo nos mapeamentos analisados.

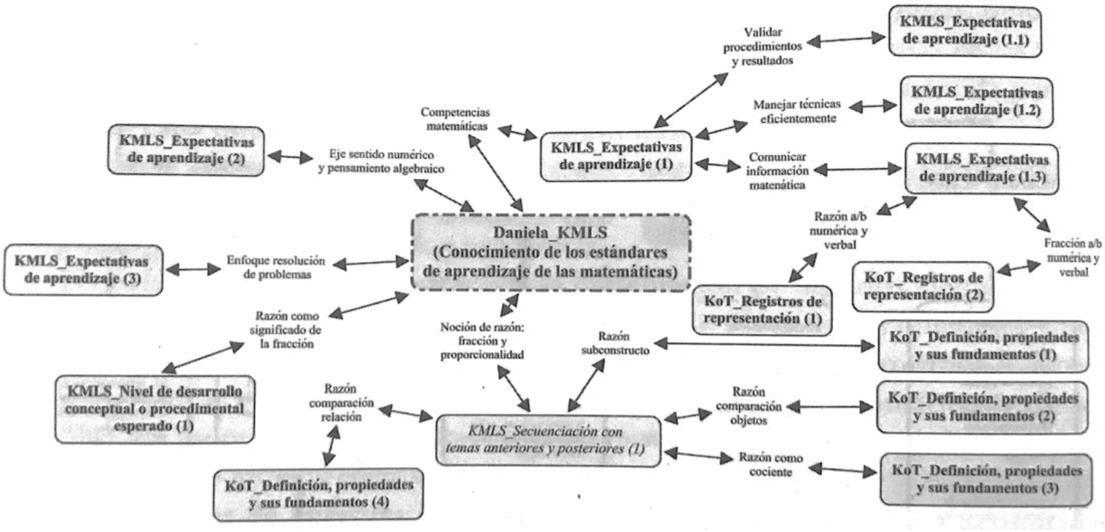


Figura 1. "Relações entre domínios, subdomínios, categorias e indicadores MTSK" (Reyes-Camacho, 2018, p. 94)

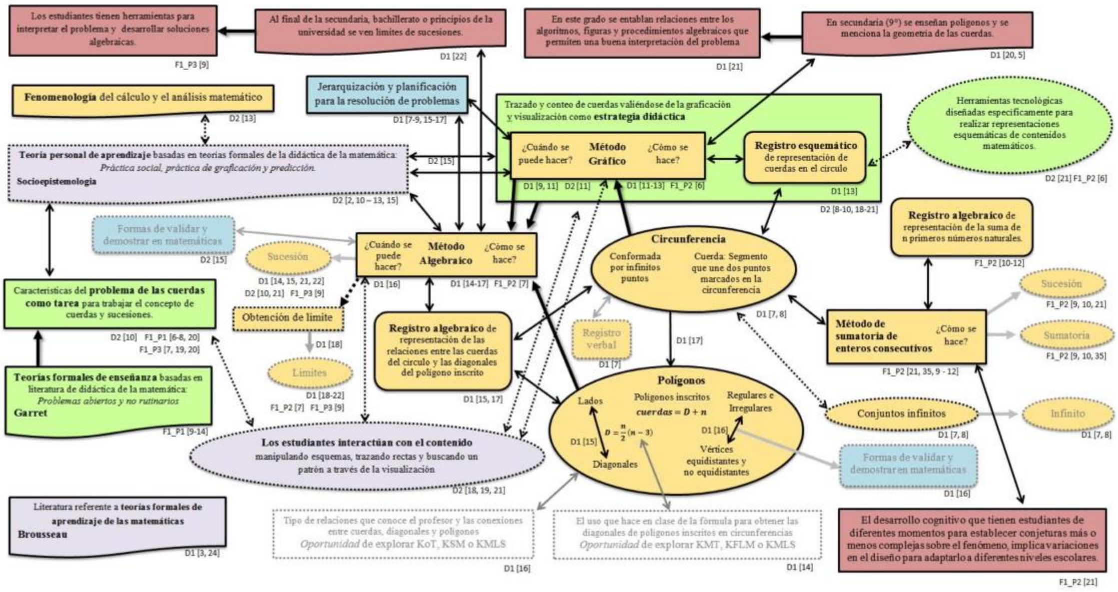


Figura 2. "Fotografia completa do MTSK" do sujeito (Escudero, 2015, p. 169)

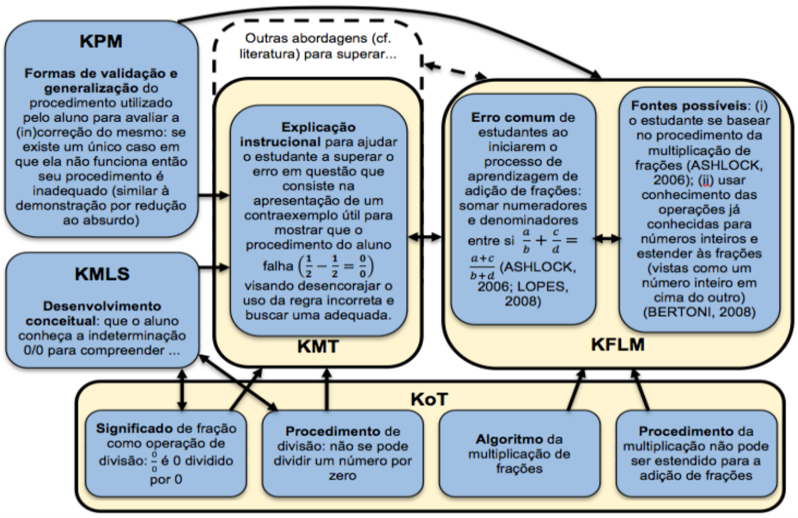


Figura 3. "Esquema de relações entre conhecimentos" (Moriel-Junior e Moral, 2017, p. 10)

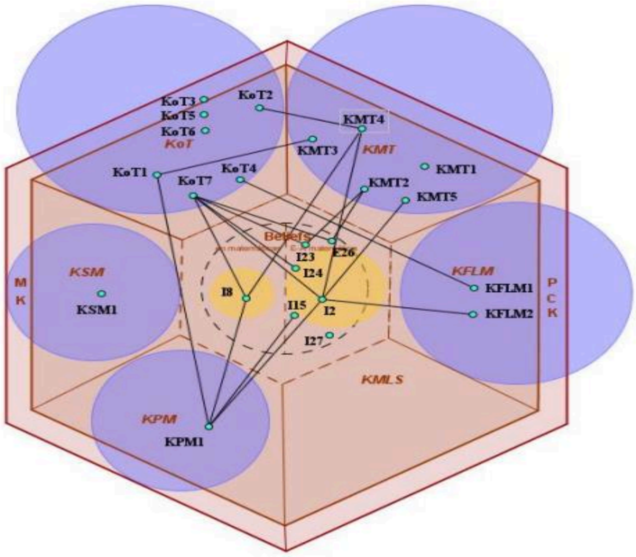


Figura 4. “Gráfico de relações internas” MTSK (Aguilar, 2016, p. 78)

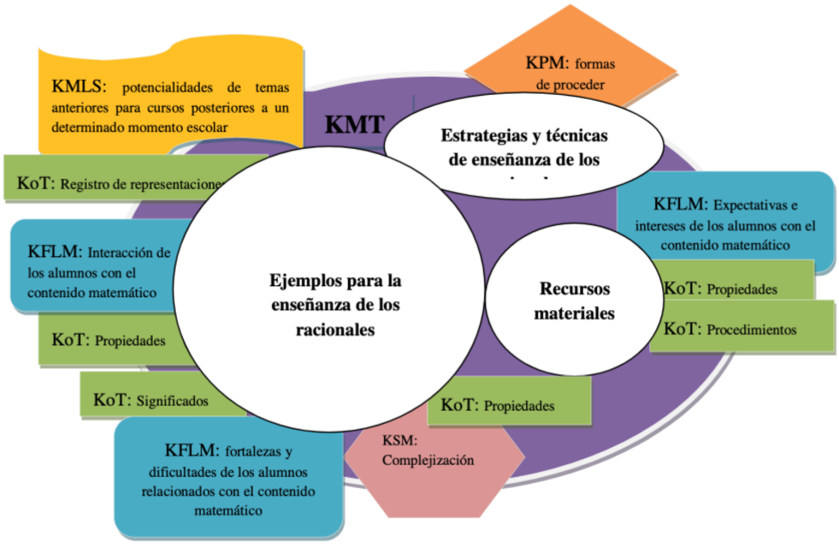


Figura 5. “Mapa de conexões entre subdomínios” (Zakaryan e Ribeiro, 2017, p. 316)

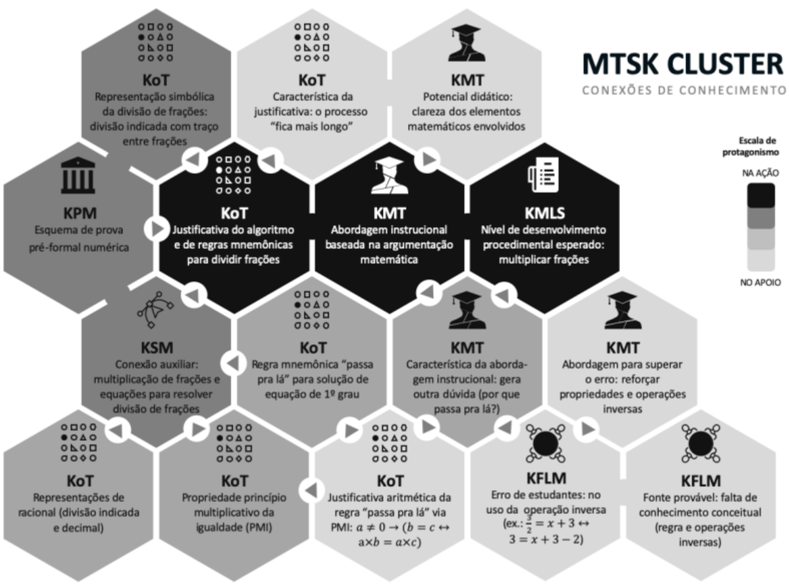


Figura 6. Mapa de conexões “*MTSK Cluster*” (Moriel-Junior, 2021, p. 210)

As redes de conhecimento supracitadas conectaram vários subdomínios MTSK, embora haja na literatura trabalhos dentro de um único subdomínio (Liñan, Contreras e Barrera, 2015). Todas elas foram acompanhadas, antes ou depois da imagem, de uma síntese textual-explicativa ou resumo descritivo-analítico das conexões, dando ao leitor detalhes que o permitem reconstruir o fenômeno mapeado. A maioria da amostra (Figuras 2, 3, 4 e 6) utilizou o título da figura para descrever o objeto mapeado, ao invés de inserir o conceito raiz dentro mapa conforme as características de um MC novakiano. Isto pode ter ocorrido pelas normas da redação científica ou sido uma escolha dos autores.

Em alguns casos foi inserida no texto uma legenda (em forma de lista ou tabela), complementar a imagem, para explicar o significado de códigos dos subdomínios na Figura 4 e o de cores/formas geométricas para diferenciar subdomínios/categorias MTSK na Figura 2. Neste último caso também há códigos referentes às fontes de dados.

Todos as redes abordam evidências de conhecimento, duas também incluem indícios (em itálico na Figura 1 e formas pontilhadas na Figura 2). Uma delas inclui oportunidades para exploração *a posteriori* de outros conhecimentos (parte inferior da Figura 2). Só uma rede representa conexões entre conhecimentos e crenças nucleares do MTSK (Figura 4).

Em nenhum caso foi informado o *software* ou se detalhou as etapas de construção da rede de conhecimento. *Softwares* como o CmapTools ou ATLAS.ti são úteis na confecção de MC novakianos e permitem inserção frases nas relações entre elementos como: é parte de, é um(a), é causa de, é propriedade de, está associado a, contradiz, dentre outras. Acreditamos que a construção das Figuras 4, 5 e 6 que se afastam do formato tradicional de MC, tenha sido relativamente mais artesanal com apoio de *softwares* para edição de diagramas, formas, imagens e textos, como Microsoft Word ou PowerPoint.

Emergiram da amostra as seguintes categorias de características das redes de conhecimento MTSK: (i) Formato de rede (similar a um Mapa conceitual, Hexágono MTSK, Gráfico de sobreposição, Gráfico de justaposição); (ii) Abrangência (aborda Múltiplos subdomínios ou um Único); (iii) Descrição de conceitos (por meio de Frase curtas, longas, com ou sem Fundamentos baseados em citações ou códigos dos empíricos ou em referenciais teóricos); (iv) Qualidade do conhecimento MTSK (ao tratar de Evidências, Indícios, Oportunidades); (v) Modos de apresentar e distinguir conceitos (com Formas geométricas, Cores, Conjuntos, Frases, Códigos, Siglas, Símbolos, Legenda, Numeração, Escala de protagonismo); (vi) Conectores de conceitos (por meio de Setas, com ou sem Frases, Segmentos de retas, Sobreposição ou Justaposição de elementos); (vii) Síntese explicativa da rede (em formato de texto antes ou depois da imagem). Estes resultados permitiram descrever na Tabela 1 as características de cada mapa de conexões MTSK da amostra. Em seguida, passamos às considerações finais.

Tabela 1. Características de redes de conhecimento MTSK e descrição da amostra

Categoria	*Figura 1*	*Figura 2*	*Figura 3*	*Figura 4*	*Figura 5*	*Figura 6*
Nome da rede	Relações entre elementos MTSK	Fotografia completa do MTSK	Esquema de relações entre conhecimento MTSK	Gráfico de relações internas MTSK	Mapa de conexões entre subdomínios	Mapa de conexões *MTSK Cluster*
Formato da rede	Mapa conceitual	Mapa conceitual	Mapa conceitual	Hexágono MTSK	Gráfico de sobreposição	Gráfico de justaposição
Abrangência MTSK	Múltiplos subdomínios	Múltiplos subdomínios	Múltiplos subdomínios	Múltiplos subdomínios	Múltiplos subdomínios	Múltiplos subdomínios
Descrição de conceitos	Frase curta	Frase curtas Frase longas Fundamento empírico e teórico	Frase curtas Frase longas Fundamento empírico e teórico	Frases longas fora do hexágono	Frase curtas Frase longas	Frase curtas Frase longas Fundamento empírico e teórico

Categoria	*Figura 1*	*Figura 2*	*Figura 3*	*Figura 4*	*Figura 5*	*Figura 6*
Qualidade do conhecimento MTSK	Evidências Indícios	Evidências Indícios Oportunidades	Só Evidências	Evidências Crenças	Só Evidências	Só Evidências
Modos de apresentar e distinguir conceitos	Formas geométricas Frases Códigos Siglas Numeração	Formas geométricas Cores Conjuntos Frases Códigos Siglas Legenda	Formas geométricas Cores Conjuntos Frases Siglas	Cores Conjuntos Códigos Siglas Legenda	Formas geométricas Cores Conjuntos Frases Siglas	Forma geométrica Cores Frases Siglas Símbolos Escala de protagonismo
Conectores de conceitos	Setas e Frases	Setas	Setas	Segmentos de reta	Sobreposição	Justaposição e Setas
Síntese explicativa	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao analisar mapas de conexões de conhecimentos MTSK da amostra em questão, foi possível avançar no estabelecimento de características importantes que vão determinar os modos de representar redes de conhecimento especializado de professores de Matemática. Estes resultados, em síntese, evidenciam características emergentes em sete focos: (i) Formato de rede; (ii) Abrangência em termos de subdomínios; (iii) Descrição de conceitos; (iv) Qualidade do conhecimento MTSK; (v) Modos de apresentar e distinguir conceitos; (vi) Conectores de conceitos; (vii) Síntese textual-explicativa da rede.

Estes resultados poderão ser úteis a pesquisadores iniciantes e experientes que pretendem realizar com rigor suas pesquisas utilizando o MTSK, bem como, ampliar a compreensão de seus achados e seu impacto na ciência. Assim, o conjunto de características aqui identificados nos parece ser mais um reforço no rol de ferramentas metodológicas voltadas à pesquisa rigorosa com o MTSK, para além das já existentes, como o *Quadro de Diferenciação de Conexões KoT e KSM* (Vasco et al., 2017) e o instrumento de análise *iMTSK* (Moriel-Junior, 2021).

Este trabalho é limitado à amostra analisada, e deve ser ampliado para refinamento dos achados neste estudo exploratório. Portanto, outras pesquisas serão realizadas para responder questões em aberto, como as seguintes: Qual é o melhor modo de representar conexões muito intrincadas? Seria possível unir diferentes mapas de conexões? Que resultado geraria? Seria possível uma representação bidimensional ou exigiria um espaço pluridimensional? Que limitações e potencialidades existem para fazer isso? Como dar uma visão ampla de uma quantidade de conexões muito maior do que as vistas neste estudo (dez vez ou mais)? Como apresentar isso no formato de artigos científicos?

Referências

Aguilar, A. (2016). *El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas. Un estudio de caso.* Tese de doutorado Doutorado. Huelva: Universidad de Huelva. http://hdl.handle.net/10272/12006

Cañas, A. J., e Carvalho, M. M. (2005). Mapas Conceituais e IA: uma união improvável? *Revista Brasileira de Informática na Educação*, *13*(1), 9-19.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., Montes, M. Á., Escudero, D., e Medrano, E. F. (2014). *Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar, Á., Ribeiro, M., e Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Escudero, D. I. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria.* Tese Doutorado. Huelva: Universidad de Huelva.

Escudero, D. I., Moriel-Junior, J. G., Flores, E., Rojas, N., Gonzalez, A. A., Catalan, M. C. M., e Flores, P. (2015). Aportaciones metodológicas de investigaciones con MTSK. *Actas da II Jornadas de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 60-68). Huelva.

Liñan, M. M., Contreras, L. C., e Barrera, V. J. (2015). Conocimiento de los temas (KoT). *Actas da II Jornadas de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 12-20). Huelva.

Moreira, M. A. (2006). *Mapas conceituais e diagramas V*. Porto Alegre: URGS.

Moriel-Junior, J. G. (2021). Specialised Knowledge Network Activated in Teacher Education to Answer to a Mathematical Why on Fraction Division. *Acta Scientiae*, *23*(2), 193-224. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6205

Moriel-Junior, J. G., e Carrillo, J. (2014). Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar matemática com o modelo MTSK. *Anais do Seminário de Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 465-474). Salamanca, Espanha: SEIEM.

Moriel-Junior, J. G., e Duarte, E. B. (2020). Mapeamento global da produção sobre Mathematics Teacher's Specialized Knowledge no Google Scholar até 2019. *Research, Society and Development*, *9*(11), e71191110526. https://doi.org/10.33448/rsd-v9i11.10526

Moriel-Junior, J. G., e Moral, G. C. Y. (2017). Conhecimentos especializados para ensinar adição de frações e como se relacionam: um caso sobre erros comuns de estudantes, suas fontes e modos de superá-los. *Anais do CIEM* (pp. 1-12). Canoas.

Novak, J. D., e Gowin, D. B. (1984). *Learning How to Learn*. New York, NY: Cambridge.

Okada, A. (2008). O que é cartografia cognitiva e por que mapear redes de conhecimento. In A. Okada (Ed.), *Cartografia cognitiva: mapas do conhecimento para pesquisa, aprendizagem e formação docente.* (pp. 390). KCM.

Reyes-Camacho, A. M. (2018). Conocimiento especializado de profesor en formación inicial de primaria: enseñanza de la noción de razón. In E. L. Flores, F. J. Hernandez-Gutiérrez, e A. M. Reyes-Camacho (Eds.), *Conocimiento especializado y formación del professor de Matemáticas* (pp. 215). Taberna.

Rodrigues, M. R., e Cervantes, B. M. N. (2015). Análise de assunto e mapas conceituais: semelhanças nos processos. *Perspectivas em Ciência da Informação*, *20*(4), 35-56.

Sánchez-García, J. A., Flores-Medrano, E., Hernández Rebollar, L. A., e Juárez-Ruiz, E. (2021). ¿Cómo impacta el conocimiento que tiene un profesor acerca de la teoría APOE sobre su conocimiento especializado? *Revista Multidisciplinar*, *3*(1), 55-67.

Schlemmer, E., e Neto, A. S. (2008). A construção de redes de significações: dos mapas conceituais aos "concept webbing". *Anais do IX Congreso Iberoamericano de Informática Educativa-RIBIE* (pp. 46-56). Caracas, Venezuela: Universidade de Caracas.

Vasco, D., Moriel-Junior, J. G., e Contreras, L. C. (2017). Subdominios KoT y KSM del Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK): definición, categorías y ejemplos. *Anais do III Jornadas de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 29-37). Huelva: Universidad de Huelva. https://bit.ly/kot-ksm-3emrpcm

Zakaryan, D., e Ribeiro, M. (2017). Conocimiento de la enseñanza de números racionales: una ejemplificación de relaciones. *Zetetiké*, *24*(3), 301-321.

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN TORNO A LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Specialised Knowledge of the Mathematics Teacher about the Exponential Function

Meléndez, J. [a]; Grueso, R. [b]

[a] Universidad del valle; [b] Universidad del valle

Temática: 3 – MTSK en diferentes temas y etapas

Resumen. Esta propuesta es un reporte parcial de una investigación en curso, que pretende caracterizar el conocimiento especializado que se pone en juego por parte de un profesor de matemáticas de grado 9° en torno a la función exponencial. En este orden ideas, se presenta la sensibilidad teórica, producto de la revisión literaria y documentación de los distintos referentes conceptuales relacionados con la función exponencial, que predeterminan unas interrelaciones entre las categorías de algunos subdominios del modelo MTSK, que propone Carrillo, Climent y Muñoz (2014); y que a la postre, servirán de referencia para el análisis, cuando en otro momento se lleve a cabo la observación y recolección de datos aportados por el profesor informante.

Palabras clave. Función exponencial, MTSK, Conocimiento del profesor, Potencias.

Abstract. This proposal is a partial report of a research in progress, which aims to characterise the specialised knowledge that is put into play by a 9th grade mathematics teacher in relation to the exponential function. In this order of ideas, the theoretical sensitivity is presented, product of the literature review and documentation of the different conceptual references related to the exponential function, which predetermine some interrelationships between the categories of some subdomains of the MTSK model, proposed by Carrillo, Climent and Muñoz (2014); and that in the end, will serve as a reference for the analysis, when at another time the observation and data collection provided by the informant teacher is carried out.

Keywords. Exponential function, MTSK, Teacher's knowledge, Powers.

INTRODUCCIÓN

La función exponencial es un concepto matemático importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, estudios como los de López & Sosa (2008), Vargas (2012) y García & Reaño (2018) muestran que los estudiantes tienen dificultades en el aprendizaje de este concepto; y Espinoza (2020) hace referencia a que algunas de esas dificultades son consecuencia del conocimiento de lo que el docente pretende enseñar, ya que sus conocimientos son los que le dan forma a la enseñanza que conduce. Y no es solamente tener en cuenta los conocimientos disciplinares del docente, pues, como menciona González y Eudave (2018) el conocimiento disciplinar o matemático no es suficiente para asegurar la competencia profesional, siendo necesarios otros conocimientos relacionados con lo didáctico, como: formas de organizar su enseñanza, el cómo se da el aprendizaje, los errores y dificultades de los estudiantes, entre otros. A su vez, Ponciano & Sosa (2018) hacen referencia a que es importante atender al conocimiento del profesor ya que permite comprender los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, también, como señalan Ponciano y Sosa (2018), apoyaría la formación inicial y continua de profesores, pues permitiría tener mayores elementos para reflexionar sobre su práctica. Además, Vargas (2012) y Velásquez (2014) mencionan que los profesores al enseñar la función exponencial, descuidan algunos aspectos del concepto. Igualmente, Espinoza (2020)

Meléndez, J., & Grueso, R. (2021). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas en torno a la función exponencial. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 271–278). Congresseme.

sostiene que los profesores suelen tener concepciones erradas sobre el concepto de variable y muestran dificultades sobre las representaciones, privilegiando la algebraica.

Lo anterior muestra una problemática alrededor del conocimiento que se pone en juego por parte del profesor de matemáticas en torno a la función exponencial. Por ello se recurre al modelo MTSK propuesto por Carrillo et al. (2014) de manera que permite estudiar cuáles son esos conocimientos que podría tener, cómo se organizan y cómo se configuran para ejercer su práctica, a través de unos subdominios que hacen referencia a aquello que el profesor sabe sobre las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se promueven en determinados momentos educativos. De esta manera, para analizar la gestión del profesor a través de lo que él como informante manifieste en su práctica, es importante no desconocer lo que la literatura menciona sobre la función exponencial, de tal manera que se puedan predeterminar algunas categorías que sirvan para ampliar el análisis en torno al conocimiento especializado del profesor.

MARCO TEÓRICO

A continuación, se presenta el modelo MTSK y referentes conceptuales asociados al objeto matemático en el marco de algunos subdominios de dicho modelo: Conocimiento de los Temas (KoT); Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM); Conocimiento de la Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las matemáticas (KMLS). El objetivo de esta investigación ha llevado a pensar en la forma efectiva de cómo debemos estudiar el conocimiento del profesor, asociándolo a lo que generalmente se conoce como el conocimiento profesional del profesor. Dicho conocimiento, es el que posee un profesor como consecuencia no solo de su formación inicial, sino también de su formación continua y su experiencia. En este sentido, se han considerado algunos modelos que permiten saber qué conoce el profesor, como el modelo Shulman (1986) y el de Ball (2000), modelos que proponen comprender la naturaleza del conocimiento de los profesores y que anteceden al modelo MTSK.

Modelo MTSK

En el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas MTSK, se entiende conocimiento especializado como la información relacionada con contenidos matemáticos y los aspectos didácticos de ese contenido, adquirida por el docente. Asimismo, como esos hechos que los docentes adquieren y que han surgido en la práctica, llevando al profesor a reflexionar al respecto, entendiendo práctica como todas las intervenciones que realiza el docente y no solamente lo que transcurre en el aula. En otras palabras, sería la integración de tres grandes aspectos vinculados en la enseñanza de las matemáticas, lo que el docente conoce de la matemática, de la didáctica del contenido de la matemática y en el ejercicio de enseñar. Así que toda la información o hechos que el docente adquiere le permiten comprender y comunicar el proceso de la enseñanza matemática y todo lo que este implica. También, se hace referencia a que este modelo es una herramienta teórica y analítica, al clasificar aquellos elementos del conocimiento del profesor de matemáticas y ofrecer herramientas metodológicas para analizar su práctica a través de unos subdominios. Dentro del Conocimiento Matemático (MK) hay tres subdominios; KoT, KSM y Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM); y dentro del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) también hay tres subdominios; el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), KFLM y KMLS. También puede observarse las creencias de las matemáticas y de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En cada subdominio existen unas categorías que permiten precisar sobre lo que debería conocer el docente.

Referentes conceptuales asociados a la función exponencial en cada subdominio

Para abordar la función exponencial se hará énfasis en los subdominios mencionados.

Conocimiento de los temas (KoT): Este conocimiento refiere a lo que necesita conocer el docente en relación a los contenidos que enseña, de manera fundamentada y teniendo un nivel de profundización mayor al que se espera del estudiante (Carrillo et al., 2014). En este caso, el contenido o tema es la función exponencial, por ejemplo, una de las categorías de este subdominio es la *fenomenología*, haciendo alusión a los conocimientos acerca de modelos atribuibles, pues a la función exponencial se le atribuye modelar fenómenos de crecimiento y decrecimiento poblacional, referido este al nacimiento o defunción, ya sea bacterias, plantas, virus, personas, entre otras. También juega un papel importante en una inversión que crece a una tasa proporcional a su monto, es decir, el interés compuesto de los intereses producidos por un capital (Leithold, 1994).

Otra categoría es *definiciones, propiedades y sus fundamentos,* el profesor debería conocer la definición de exponente (a^x; a=base y x=exponente) por ejemplo, que está indicado como superíndice de la base y significa cuántas veces se multiplica la base por sí misma, esta operación se denomina potencia. También, debería conocer las propiedades y operaciones entre potencias y las implicaciones de exponentes negativos, racionales, cero, uno, entre otros. Y la definición de función exponencial, como aquella que en su expresión tiene la variable x como el exponente y según Stewart (2010) es una función de la forma $f(x)=a^x$ donde a es una constante positiva y la variable puede tomar cualquier valor de los reales, y $f(x)$ tiene sentido en los reales positivos. Los *registros de representación* harían parte de la otra categoría, pues el profesor debe conocer distintas formas de representar la función exponencial, representación gráfica, tabular, algebraica y verbal. Finalmente, la categoría de *procedimientos*, por ejemplo, los conocimientos en relación a los parámetros de la función exponencial, es decir, la incidencia que tienen los diferentes valores que se dan en la representación algebraica $(f(x)=k\, a^{x-c} + b)$ en la representación gráfica, en este sentido el valor de c representa un desplazamiento lateral, el valor de b representan un desplazamiento vertical y los valores de k y de a representan si la función es creciente o decreciente, o sea, si $k>0$ y si $0<a<1$, la función decrece, tiene una asíntota cuando x tiende a infinito y es cóncava hacia arriba. Mientras que *si* $a>1$, la función crece, tiene una asíntota cuando x tiende a menos infinito y también es cóncava hacia arriba. En caso de que $k<0$ las condiciones de monotonía se intercambian.

Conocimiento de la estructura de la matemática (KSM): Este subdominio engloba conocimientos de conexiones interconceptuales y conocimientos avanzados y elementales respecto al contenido que se atiende, es decir, el docente debe de contar con conocimientos de las relaciones entre la función exponencial y otros contenidos, ya sean contenidos necesarios para conocer este concepto o contenidos anteriores o posteriores, con el fin de poder tener una mirada más amplia y avanzada de su comportamiento.

Ahora, una forma de conocer la función exponencial es a través de su desarrollo histórico epistemológico, pues es el que aporta elementos que permiten la consolidación como objeto matemático. Así que, para cada categoría de este subdominio se tendrán en cuenta aspectos del desarrollo histórico epistemológico, ya que, en diferentes periodos de la historia se han identificando las principales concepciones y usos que se le atribuyen a este concepto hasta lo que se considera actualmente, por ejemplo, cuando se habla de la *Conexión de simplificación* se haría referencia a los conocimientos de la relación que hay entre la función exponencial y lo objetos matemáticos que emergen antes de este. El momento en que emergen algunos conceptos antes de la consolidación de la función exponencial es en la edad antigua, pues existe evidencia que muestra que los Babilónicos, los egipcios y los griegos trabajaron la noción de progresión geométrica (Cambronero, 1999). Pero también, se le atribuye a los Babilónicos el nacimiento del concepto de potencia relacionado con la geometría, particularmente las relaciones con el concepto de área *(n* x *n)* y volumen *(n* x *n* x *n)* (Vargas, 2012). Otro aporte, en esta época es la idea de órdenes y periodos de números, usando aquí representaciones numéricas para abreviar cantidades muy grandes (Arquímedes, 287-212 a.C) (Méndez, 1897). Finalmente, en este periodo hay aportes en relación al desarrollo del cálculo de potencias con exponentes enteros y racionales por parte de Oresme (1320-1382). En la edad moderna, en el año 1638 Descartes (1596-1650) en su obra *La Geometría* muestra un punto de inflexión al trabajo que se venía realizando, ya que las nociones de área y volumen las mostró como segmentos, además utilizó los exponentes enteros positivos escritos como súper índices (la notación n^3 para expresar *n* x *n* x *n*) e implantó el uso de *x* y *y* como variables y *a, b* y *c* como constantes. Un siglo después, Chuquet (1445-1500), retoma el aporte realizado por Oresme y empieza a ampliar más lo relacionado al trabajo con exponentes, realiza acercamientos importantes a los exponentes representados por números enteros y exponentes racionales. Pero es Stifel (1487-1556) es quien introduce el término exponente, este aporte se evidencia en su obra *Arithmetica Integra* (1544) en la que asocia una progresión aritmética a una geométrica (Vargas, 2012). Después de este momento, Stifel, Napier y Burgi completan este trabajo con exponentes y queda constituida la ecuación de función exponencial. Luego, Stifel en su obra Arithmetica Integra (1544) introduce los exponentes racionales arbitrarios, establece el término exponente y explica la asociación entre la progresión geométrica y aritmética para los exponentes negativos y fraccionarios para resolver ecuaciones. Finalmente, Napier y Burgi, entre 1614 y 1620, realizan el paso a exponentes reales de manera intuitiva, siendo este un acercamiento de cómo se concluye el concepto de función exponencial.

En cuanto a *las Conexiones de complejización,* se hace referencia a los conocimientos de la relación que hay entre la función exponencial y los objetos matemáticos que emergen posterior a esta. En este caso, algunos aspectos histórico-epistemológicos en el desarrollo del cálculo permiten identificar propiedades asociadas a la derivada y a la anti derivada.

Los contenidos anteriores son una proyección para trabajar la función exponencial, que la función exponencial es una proyección para los contenidos posteriores y que en este fragmento en el que se ha intentado mostrar el desarrollo histórico epistemológico del concepto de función exponencial podemos evidenciar otra categoría que sería las *conexiones auxiliares* en este caso la relación de los diferentes contenidos que encontramos, como: exponente, potencia, progresiones, entre otros, ofrecen elementos auxiliares para el tratamiento de la función exponencial. Finalmente, en la categoría de *conexiones de contenidos transversales*, existe una cualidad común entre estos contenidos y es lo que permite que se relacione al contenido a enseñar. Por ejemplo, un contenido transversal de la función exponencial, es lo que tiene que ver con la operación de potenciación, en menor o mayor complejidad y sus diferentes propiedades.

Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFML): Este subdominio engloba los conocimientos del aprendizaje del contenido matemático por parte del estudiante, su objetivo son los contenidos matemáticos como objetos de aprendizaje (Carrillo, 2014). Son varias propuestas interesadas en estudiar aspectos concernientes al aprendizaje de la función exponencial, Como las de Díaz (citado de Vargas, 2012); Elstak (citado de Vargas, 2012); Martínez (citado de Vargas, 2012); Vázquez, Méndez y Ferrari (2017); Venosa, Méndez, Trejo y Ferrari (2017) y Trejo y Ferrari (2018) con la intención de que los estudiantes puedan entender el concepto y sus implicaciones en la modelación de situaciones de la vida cotidiana. En estas propuestas, se logran identificar aspectos asociados a cómo el estudiante está entendiendo el concepto y qué de ello podría aprovecharse para la enseñanza del mismo. Para ello, el docente debería conocer lo concerniente a cuatro categorías: las *formas de aprendizaje*, es decir, los conocimientos que tiene el profesor acerca de los posibles modos de aprehensión, asociados a la misma naturaleza de los contenidos matemáticos. Por ejemplo, Vargas (2012) muestra aspectos relacionados con la función exponencial y la teoría APOS propuesta por Dubinsky (2000), la cual permite evidenciar la construcción mental del estudiante cuando se enfrenta a una tarea de aprendizaje de este objeto matemático.

La categoría *fortalezas y dificultades* que engloba los conocimientos de los errores, obstáculos y dificultades asociados al aprendizaje de las matemáticas. En este caso, Vargas (2012) muestra diferentes dificultades de los estudiantes al abordar este concepto, asociadas al significado de exponente, ya que se espera que para el estudio de la función exponencial los estudiantes reconozcan la relación entre exponentes negativos y positivos y que tengan argumentos para explicar lo que sucede cuando el exponente es cero o uno.

Entre las dificultades, Elstak (citado de Vargas, 2012) menciona que los estudiantes no encuentran relación entre las diferentes definiciones que hay para los exponentes (cuando en a^x se dan los siguientes casos $x=n$, $x=1$, $x=0$, $x=-n$ *y* $x=p/q$) o sea, que la definición usual de exponente está asociada a un entero positivo y esta definición ocasiona obstáculos en el estudiante cuando pretende resolver potencias cuyos exponentes son negativos o racionales. Así que se hace necesario que a los estudiantes se les proporcione un concepto general de exponente que puedan aplicarlo en los diferentes casos, para ello realizan una propuesta didáctica que gira en torno a la razón de cambio. En este estudio, también fue posible observar lo referido a la tercer categoría *formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático* del subdominio en cuestión, que hace referencia a los conocimientos del profesor acerca de los procesos y estrategias de los estudiantes, por ejemplo, es posible evidenciar algunas afirmaciones de los estudiantes, como: $2^0=0$, $2^0=2$, $2^{-3}=(-2)(-2)(-2)$ *y* $2^{-3}=8$ *y* se le agrega el signo negativo, entre otras afirmaciones.

Finalmente, tenemos la categoría de *concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas* englobando los conocimientos sobre las expectativas e intereses respecto a las matemáticas. Algunos de estos aspectos tienen que ver con la utilidad que los estudiantes le puedan dar o no a este tipo de modelos exponenciales y es que la mayoría de aplicaciones están enfocadas en ciencias específicas, como: la economía, la administración, la ingeniería, las ciencias naturales, otras, y no hacen parte del contexto del estudiante lo que podría indicar no hace parte de sus intereses.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS): Este subdominio engloba el conocimiento del profesor acerca de lo que está estipulado que aprenda un estudiante y el nivel conceptual con el que se espera que aprenda en un determinado momento escolar. La fuente de esta información es obtenida de lo estipulado por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), La primera categoría alude a los *conocimientos de los contenidos matemáticos que se requieren enseñar en un grado*, en el caso de la función exponencial, según el MEN (2006) se enseña en grado octavo y noveno de la Secundaria. La otra categoría hace alusión a *los conocimientos del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado*, que, en el contexto colombiano, puede asociarse al desarrollo de competencias en los estudiantes, llamados Estándares básicos de competencias, entre ellos se pueden destacar los siguientes:

> Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan. Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones

> específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas (MEN, 2006 p. 49-50).

Asimismo, se tienen en cuenta los DBA (MEN, 2016) enunciando unos aprendizajes correspondientes al trabajo con la función exponencial:

> Propone relaciones o modelos funcionales entre variables e identifica y analiza propiedades de covariación entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.). Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones. (p. 65-66).

Por último, la categoría del *conocimiento de la secuenciación de diversos temas, la* cual se relaciona con lo estipulado por el MEN (2006) quien vincula la función exponencial como uno de los aspectos que aportan al desarrollo de pensamiento variacional, señalando que la enseñanza y aprendizaje de dicho concepto no solo debe trabajar ese pensamiento, sino también los otros pensamientos (numérico, espacial, métrico y aleatorio), posibilitando así el trabajo con diferentes temas (coherencia horizontal). Además, menciona que es necesario que haya una coherencia entre las los temas enseñados en los diferentes grados de escolaridad de tal manera que para desarrollar pensamiento variacional se le haya proporcionado al estudiante espacios en los que trabaje en el sistema analítico y algebraico desde los primeros años de escolaridad y de manera paulatina el estudiante vaya adquiriendo mayores habilidades para responder a situaciones que requieran de este pensamiento (coherencia vertical). De acuerdo con la coherencia vertical que propone el MEN (2006), el orden de los temas alrededor de la función exponencial es: multiplicación, secuencias, patrones de regularidad, potenciación, función exponencial y su función derivada (Razón de cambio instantáneo).

METODOLOGÍA

Esta propuesta se inscribe en un enfoque cualitativo y como estrategia metodológica la revisión documental (Camargo, 2018), pues se toma información de lo que se encuentra en la literatura en relación con el concepto de función exponencial filtrando dicha información de acuerdo con las categorías que sugieren algunos referentes dentro de cada subdominio del modelo MTSK. En este sentido, en un primer momento se realizó una búsqueda y selección de documentos bajo los criterios antes mencionados, y una vez se recolectó lo concerniente a la sensibilidad teórica de la función exponencial, en un análisis preliminar, se establecen algunas interrelaciones entre los subdominios a partir de los vínculos encontrados entre datos dentro de cada categoría de subdominios distintos.

ALGUNAS INTERRELACIONES ENTRE LOS SUBDOMINIOS

Como consecuencia del marco teórico, se involucran varios conocimientos cuando se hace referencia a la relación de la función exponencial con otros temas, por ejemplo, en el KoT se estaría relacionando la función exponencial con las propiedades de la potenciación; en el KSM hay relaciones desde el punto de vista matemático ya que en el desarrollo histórico epistemológico de la función exponencial hubo un trabajo previo en relación con las potencias, las progresiones, los exponentes, nociones de área y volumen, entre otros; igual en lo que corresponde al KFML en cuanto a las dificultades por parte de los estudiantes en lo que se refiere al exponente y la operación de potenciación y también las dificultades en relación al uso de modelos exponenciales en la vida cotidiana; y finalmente; desde el KMLS, lo referido a la coherencia vertical en cuanto a la propuesta del orden de los temas alrededor de la función exponencial, como: secuencias, patrones de regularidad. En este primer grupo de interrelaciones entre los diferentes subdominios que se logra evidenciar que las potencias son un aspecto de gran influencia.

En cuanto al uso de modelos exponenciales en la vida cotidiana, desde el KoT, se hace referencia a los conocimientos acerca de modelos atribuibles a la función exponencial como: fenómenos de crecimiento y decrecimiento poblacional y el interés compuesto; desde el KSM se alude a lo que menciona la historia acerca de estos modelos, por ejemplo el acercamiento que hace Bernoulli al mostrar el límite para designar el número *e*, para hablar de impuestos a partir de la matemática aplicada a la economía (Vargas, 2012). Desde el KFML, se alude a la dificultad asociada a la utilidad de este concepto en la vida cotidiana; finalmente, desde el KMLS, el MEN (2006) propone unos contextos para la enseñanza, por ejemplo, el de las otras ciencias y el de la vida cotidiana.

Respecto a los registros de representación, las interrelaciones en los cuatro subdominios son: en el KoT, se deben conocer los cuatro registros de representación (gráfica, tabular, algebraica y verbal). En el KSM, la notación científica como consecuencia del trabajo con las representaciones simbólicas y las representaciones de las curvas con el estudio del Cálculo. En el KFML, las dificultades asociadas a la conversión de registros (simbólico, gráfico, verbal y tabular) y la necesidad de atender al uso por lo menos de dos registros de representación (Duval, 2004). En el KMLS, el MEN (2006) resalta la importancia del trabajo en diferentes contextos y registros de representación, en torno al estudio del cambio.

ALGUNAS REFLEXIONES PRELIMINARES DEL ESTUDIO

A pesar de que el modelo MTSK es fundamental en la observación en el aula, este estudio parcial muestra que, para hacer el análisis de dicha observación, es importante que el investigador sistematice y predetermine unas posibles categorías o aspectos como consecuencia de una adecuada sensibilidad teórica. En este caso, los aspectos fueron: relación de la función exponencial con otros temas, potencia, uso de modelos exponenciales en la vida cotidiana y registros de representación, a los que se les puede asociar a diferentes categorías de los subdominios seleccionados. Estas interrelaciones encontradas se convierten en posibles directrices que permitan hallazgos y análisis de episodios de clase, así como también, sugerencias para orientar algunas entrevistas al profesor informante. Un ejemplo particular podría ser la atención predeterminada en torno a las dificultades de los estudiantes (KFML) y buscar elementos claves de los episodios que den cuenta de qué tipo de conocimiento refleja el profesor para realimentar a los estudiantes o evitar que, como consecuencia, estos cometan algunos errores. Poniéndose de manifiesto, que en tal situación habría que apelar posiblemente a elementos del episodio que aludan a otros subdominios como (KoT, KSM, KMLS), en procura de caracterizar de una manera más completa cómo se estructura, cómo se organiza y cómo se relacionan los conocimientos que se ponen en juego por parte del profesor. Finalmente, predeterminar estas interrelaciones aportaría al filtro sobre *artefactos* (Planeaciones, pruebas escritas) que sean susceptibles de ser analizados.

Referencias

Ball, D. (2000). Bridging Practices. Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education,* 241-247.

Camargo, L. (2018). Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática. *Bogotá: Fondo de Publicaciones Universidad Pedagógica Nacional, en evaluación*.

Cambronero, S. (1999). *Una Construcción Elemental de las Funciones Exponencial y Logarítmica.* Costa Rica. Recuperado el 22 de junio de 2015, en: http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Contribucionesv3n1002/funcionexponen.

Carrillo, J., Contreras, L., Climent, N., Escudero, D., Flores, E., & Montes, M. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Universidad de Huelva.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Peter Lang: (Segunda edición). (M. V. Restrepo, Trad.)

Espinoza, G. (2020). *Caracterización Del conocimiento especializado del profesor de matemáticas De educación media sobre el concepto de función*. Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

García, L. E., & Reaño, C. R. (2018). Un estudio sobre cómo se manifiesta la capacidad para crear problemas sobre la función exponencial en docentes de educación superior. *Rev. Prod. Disc. Educ. Matem*, 14-25.

González, J., & Eudave, D. (2018). Modelos de análisis del conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza de profesores. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 25-45.

Gutiérrez, C., Méndez, M., Trejo, M., & Ferrari, M. (2017). Caracterizando la Función Exponencial Mediante la Covariación. *Tlamati Sabiduría*, 22-33.

Méndez, E. (1897). *El Arenario.* Obtenido de http://biblioteca-digital.ilce.edu.mx/Colecciones/ReinaCiencias/_docs/El_arenario-Arquimedes.pdf

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje v.2.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ponciano, E., & Sosa, L. (2018). Reflexión sobre el conocimiento del profesor. El caso de la enseñanza de la derivada. *El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática,* 83-97.

López, J., & Sosa, L. (2008). Dificultades Conceptuales y Procedimentales en el Aprendizaje de Funciones en Estudiantes de Bachillerato. *Acta latinoamericana de Matemática educativa*, 308-318.

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 4-14

Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable, conceptos y contextos 4ed.* México:Cengage learning.

Vargas, J. (2012). *Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales.* España: Universidad de Salamanca.

Velasquez, F. (2014). *Creencias y una aproximación de la concepción de un profesor de precálculo sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial.* Perú: Pontificia Universidad católica de Perú.

Vásquez, Y., Méndez, M., & Ferrari, M. (2017). Acercamiento a la función exponencial desde un escenario de modelación y covariación. *Tlamati Sabiduría*, 42-54.

COMUNICAÇÕES ORAIS

TEMÁTICA 4

DESENVOLVIMENTO DO MTSK

ELEMENTOS DEL MODELO MTSK QUE SE UTILIZAN PARA ATENDER SITUACIONES DE DOMINIO AFECTIVO EN EL AULA

Elements of the MTSK Model that are Used to Attend Situations of Affective Domain in the Classroom

Aguilar-Mendieta, V. [a]; Flores-Medrano, E. [a]; Sánchez-Ruiz, J. G. [a,b]; Juárez-Ruiz, E. [a]

[a] Benemérita Universidad Autónoma de Puebla; [b]Universidad Nacional Autónoma de México

Temática: 4 – Desarrollo del MTSK

Resumen. Se reporta una investigación cuyo objetivo es establecer los elementos del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) que se utilizan para atender situaciones de dominio afectivo en el aula, es de corte cualitativo y se realizó a partir de un estudio de caso instrumental. En este trabajo se presentan resultados parciales que nos permiten formular algunas conclusiones acerca de cómo influye del conocimiento que tiene el profesor acerca de dominio afectivo sobre el conocimiento especializado que emplea para atender situaciones afectivas en el aula.

Palabras clave. MTSK, Dominio afectivo, Práctica docente, Diseño de actividades.

Abstract. An investigation is reported whose objective is to establish the elements of the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) that are used to attend to situations of affective domain in the classroom, it is qualitative and was carried out from an instrumental case study. In this work, partial results are presented that allow us to formulate some conclusions about how the knowledge that the teacher has about affective dominance influences on the specialized knowledge that he uses to deal with affective situations in the classroom.

Keywords. MTSK, Affective domain, Teaching practice, Activities design.

INTRODUCCIÓN

De acuerdo con Gómez-Chacón (2000), el enfoque de la dimensión afectiva ha puesto en evidencia la importancia que tienen las variables afectivas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya que, al aprender matemáticas, el estudiante recibe continuos estímulos asociados a éstas, por ejemplo, problemas, actuaciones del profesor, mensajes sociales, etc., ante los cuales reacciona afectivamente (interviniendo emociones, motivaciones, actitudes, creencias, entre otros factores) de forma positiva o negativa.

Uno de los factores que influye en el afecto que se forma en el alumno hacia las matemáticas, es el profesor y, en consecuencia, todo lo involucrado con su práctica docente, sin embargo, él mismo es el responsable de atender las dificultades que se le presentan a sus estudiantes causadas por cuestiones afectivas, las cuales pueden repercutir negativamente en su aprendizaje. A partir de esto, y bajo la consideración de que, para atender situaciones afectivas se requiere de distintos conocimientos que le permitan al profesor atender dichas situaciones de manera oportuna, surgen las siguientes preguntas de investigación: ¿cómo influye el conocimiento que tiene el profesor acerca de dominio afectivo sobre el conocimiento especializado que emplean para atender situaciones afectivas en el aula? y ¿qué elementos del MTSK utiliza el docente al diseñar actividades que atiendan situaciones afectivas en el aula?

Aguilar-Mendieta, V., Flores-Medrano, E., Sánchez-Ruiz, J. G., & Juárez-Ruiz, E. (2021). Elementos del modelo MTSK que se utilizan para atender situaciones de dominio afectivo en el aula. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 280–287). Congresseme.

ASPECTOS AFECTIVOS INVOLUCRADOS EN LA INVESTIGACIÓN

De acuerdo con los trabajos de McLeod (1992) "El dominio afectivo se refiere a una amplia gama de creencias, sentimientos y estados de ánimo que van más allá del dominio de la cognición" (p. 576). En particular, en el presente trabajo se abordan tres factores afectivos, los cuales son: *Percepción de la dificultad de las matemáticas, Desinterés hacia las matemáticas* y *Valor subjetivo o utilidad de las matemáticas*.

Con respecto a la dificultad de las matemáticas, de acuerdo con Alonso, Saéz y Picos (2005), estas tienen características propias como la abstracción, reflexión, orden, rigor, etc., las cuales hacen de las matemáticas una disciplina que requiere cierto esfuerzo y el uso de estrategias cognitivas de orden superior para su asimilación. Es así como la dificultad que perciben y/o experimentan los estudiantes al aprender matemáticas, tiene que ver con la dificultad intrínseca que caracteriza a esta disciplina.

Por otro lado, González (2005) define el desinterés hacia las matemáticas como la falta de motivación que manifiestan los alumnos en forma de aburrimiento o rechazo por la materia. Además, siguiendo a Huertas (1997), la motivación cumple un papel esencial en la enseñanza, ya que es el requisito básico para conseguir el interés por el aprendizaje, por lo que consideramos que este elemento de dominio afectivo cobra gran importancia en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Finalmente, de acuerdo con Sánchez (2019), consideramos que el valor subjetivo de las matemáticas se refiere a la idea que se tiene acerca de éstas, la cual se forma a partir de las emociones, los sentimientos o las actitudes que el alumno tiene hacia esta área del conocimiento, o bien, a sus creencias acerca de aspectos relacionados con ésta. Así, esto incluye la percepción de utilidad que los alumnos tienen de las matemáticas.

MODELO DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS (MTSK)

El MTSK es una propuesta teórica que modela el conocimiento especializado del profesor de matemáticas y, asimismo, una herramienta metodológica que permite obtener información, sobre este conocimiento en su labor profesional, y analizarlo a través de sus categorías. Está conformado por dos grandes grupos de conocimiento llamados dominios, los cuales se dividen en tres subdominios cada uno y categorías internas a dichos subdominios. El primer dominio es el Conocimiento Matemático, el cual considera el conocimiento que tiene el profesor de las matemáticas en un contexto escolar. El otro dominio es el Conocimiento Didáctico del Contenido, el cual se refiere al conocimiento que tiene el profesor acerca del contenido matemático como objeto de enseñanza-aprendizaje (Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo, 2014).

En la Figura 1, podemos observar la estructura del MTSK en cuanto a los dominios, subdominios y categorías que lo componen (Carrillo-Yañez, Climent, Montes, et al., 2018). Los dominios y subdominios cuentan con siglas por las que son denotados, los cuales emplearemos más adelante para referirnos a éstos de una forma más accesible.

Dominio	Subdominio	Categoría
Conocimiento matemático (MK)	Conocimiento de los temas matemáticos ***(KoT)***	Procedimientos
		Definiciones, propiedades y fundamentos
		Registros de representación
		Fenomenología y aplicaciones
	Conocimiento de la estructura matemática (***KSM***)	Conexiones basadas en la simplificación
		Conexiones basadas en la complejización
		Conexiones auxiliares
		Conexiones transversales
	Conocimiento de la práctica matemática ***(KPM)***	Prácticas ligadas a la Matemática en General
		Prácticas ligadas a una Temática en Matemáticas

Dominio	Subdominio	Categoría
Conocimiento didáctico del contenido (PCK)	Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas ***(KFLM)***	Teorías del aprendizaje matemático
		Fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas
		Maneras en que los alumnos interactúan con el contenido matemático
		Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas
	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas **(*KMT*)**	Teorías de la enseñanza de las matemáticas
		Recursos didácticos (físicos y digitales)
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas **(KMLS)**	Resultados de aprendizaje esperados
		Nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental
		Secuencia de Temas

Figura1. Dominios, subdominios y categorías que conforman el MTSK

ASPECTOS METODOLÓGICOS

El tipo de investigación realizada es de corte cualitativo y se llevó a cabo mediante un estudio de caso instrumental (Gómez, Flores y Jiménez, 1999). En este trabajo el caso lo constituyen dos profesoras de matemáticas en el nivel medio superior, Gisela y Marcela (seudónimos), quienes estudiaron una maestría profesionalizante en Educación Matemática, ambas con la particularidad de que sus trabajos de tesis estuvieron enfocados hacia elementos de domino afectivo. Esto confiere confianza en que las profesoras informantes tengan ciertos conocimientos de aspectos afectivos y posean sensibilidad hacia ese tipo de temas. En este estudio nos interesa saber qué elementos del MTSK emplea el profesor al diseñar actividades de aprendizaje que atiendan intencionalmente situaciones relacionadas con cuestiones de dominio afectivo y cómo influye el conocimiento que tiene el profesor acerca de aspectos afectivos en el conocimiento que emplea para tratar este tipo de situaciones. Sin embargo, se destaca que no hay garantía que las participantes empleen dichos conocimientos en su práctica profesional.

Recolección y análisis de datos

El primer paso fue seleccionar algunas tesis, realizadas por egresados de la Maestría en Educación Matemática (MEM) en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), que tuvieran relación con algún aspecto afectivo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Una vez seleccionadas las tesis de nuestro interés, identificamos los elementos de dominio afectivo involucrados en dichas investigaciones y la postura de los autores respecto a dichos elementos. Luego, realizamos una entrevista semiestructurada, a cada una de nuestras informantes, con la intención de obtener información acerca sus perspectivas sobre los elementos de dominio afectivo involucrados en su trabajo de investigación (obtenidos de su tesis) y sobre otros de los que tuviera conocimiento o interés. Con la información obtenida en las entrevistas, la cual fue recolectada a través de una videograbación, se hizo un análisis temático ya que era necesario identificar las ideas esenciales que guiarían el trabajo de investigación y la atención al fenómeno en estudio (Barrera, Tonon y Salgado, 2012). Los resultados permitieron determinar tres temas de dominio afectivo, que se conceptualizaron con base en los rasgos comunes del dominio afectivo que mencionaron las informantes durante la entrevista. Los temas fueron: *dificultad en matemáticas, falta de motivación para aprender matemáticas y valor o utilidad de las matemáticas*.

Posteriormente, solicitamos a nuestras informantes un diseño de actividades que atendiera de manera intencional situaciones afectivas específicas que ellas mismas rescataron durante la entrevista, respecto a los temas definidos. Finalmente, con la información obtenida en los diseños, realizamos un análisis Top-Down (de la teoría a los datos), ya que a partir de dichos diseños nos interesaba establecer los elementos del MTSK que se utilizan o se requieren para atender situaciones afectivas en el aula, lo cual se hizo a partir de las categorías del MTSK pues, como sugiere Leal (2020), esta estrategia se caracteriza por recurrir a la teoría sobre el objeto a estudiar y emplearla para analizar la información.

ANÁLISIS

En este apartado se presenta un esbozo de cómo se realizó el análisis de la información para identificar los componentes del MTSK que las profesoras utilizaron para atender los aspectos afectivos considerados en los tres temas mencionados en el método. Cabe aclarar que el análisis que se presenta se hizo con base en las evidencias de conocimiento que nos proporcionaron las informantes tanto en las entrevistas como en los diseños de actividades, y que en este trabajo se acepta el concepto de evidencia de conocimiento como “aquellos elementos que permiten afirmar que un profesor posee, o no, un determinado conocimiento” (Escudero-Ávila et al., 2016, p. 63).

La nomenclatura empleada en los extractos de las entrevistas es E para la entrevistadora (primera autora de este trabajo), G para Gisela y M para Marcela.

Dificultad en matemáticas

Por un lado, en el caso de Gisela, con respecto a la dificultad que perciben y experimentan los alumnos al aprender matemáticas, encontramos varios componentes del MTSK que emplea para atender este aspecto de dominio afectivo en el aula pues, durante la entrevista, dio evidencia de emplear el conocimiento considerado en la categoría *Secuenciación de temas* (correspondiente al subdominio KMLS), *Fortalezas y debilidades asociadas al aprendizaje* (categoría del KFLM) y *Procedimientos* (correspondiente al KoT). A continuación, mostramos cómo identificamos cada uno de estos elementos del MTSK en las declaraciones de la profesora.

En el Extracto 1, Gisela reconoce que la dificultad que los alumnos tienen para operar fracciones aritméticas se convierte en un obstáculo para aprender a operar fracciones algebraicas cuando dicha dificultad no es atendida, lo cual corresponde al conocimiento que tiene sobre cuáles son los conocimientos y capacidades previas que debería tener un estudiante para estudiar fracciones algebraicas, conocimiento considerado en la categoría *Secuencia de temas* (Flores-Medrano et al., 2014).

G: Por ejemplo, en los alumnos que se les complica bastante la suma de fracciones, si desde la secundaria no solventan este problema, cuando llegamos a álgebra y vemos suma de fracciones algebraicas, a ellos se les complica demasiado, pero me doy cuenta que es porque no han comprendido la suma de fracciones aritméticas […]. Fracciones algebraicas es un tema en el cual los alumnos llegan a tener dificultades. Entonces yo presiento que este tema les estaría provocando una actitud negativa […].

Extracto 1

Además, se puede observar que Gisela identifica el tema de fracciones algebraicas como un tema complicado para los alumnos, y nos muestra el conocimiento que tiene acerca de algunos obstáculos y dificultades comunes de los estudiantes al trabajar con fracciones algebraicas, el cual corresponde al que se considera en la categoría de *Fortalezas y debilidades asociadas al aprendizaje* (Flores-Medrano et al., 2014). Llama la atención, en el Extracto 2 y 3, que la profesora manifiesta cómo emplea estos conocimientos para atender la dificultad que tienen los alumnos en temas específicos de matemáticas.

G: Al inicio tomo 10 minutos para dar un repaso de lo que vimos anteriormente y si se va a utilizar, realizo un ejercicio de ese estilo para que los alumnos recuerden ese tema y después vamos con la explicación del tema en sí para que el alumno vea que efectivamente se está utilizando el tema que recordamos.

Extracto 2

E: ¿De qué forma atenderías esta dificultad para evitar que se siga generando más en lo alumnos a la hora de llegar a operaciones con fracciones algebraicas?

G: Lo que yo hago es siempre resolver una fracción aritmética, o sea de las sencillas, de distintas maneras, con el mínimo común múltiplo o utilizando las fracciones equivalentes, para que ellos noten que tienen varias formas en las que pueden resolver ese problema y adopten el que mejor entiendan o el que dominen mejor. Pero siempre partir de algo sencillo.

Extracto 3

En el Extracto 2, Gisela muestra cómo emplea el conocimiento que tiene sobre la secuenciación de los temas, con la expectativa de ayudar a los alumnos a recordar y repasar aspectos necesarios para entender el nuevo tema y así contribuir a disminuir la dificultad que puedan tener. Además, en el Extracto 3 menciona la estrategia que utiliza para atender la dificultad que experimentan los alumnos en el tema de fracciones algebraicas, donde emplea su conocimiento sobre las dificultades a las que se enfrentan los alumnos en este tema, pero también nos da evidencia de cómo utiliza el conocimiento que posee acerca de diferentes procedimientos asociados a las operaciones entre fracciones para atender la dificultad, proporcionando a los alumnos diferentes estrategias para que ellos adopten la que mejor entiendan o la que más se le facilite. Es claro que Gisela usa el conocimiento considerado en la categoría de *Procedimientos*, para atender la dificultad que experimentan los alumnos en este tema.

Por otra parte, en el caso de Marcela, en el Extracto 4, encontramos sólo un elemento del MTSK que emplea para la atención de la dificultad que experimentan los alumnos al aprender matemáticas.

M: Le ponía el siguiente ejemplo: "Si tú vas a tomar la ruta, y llevas un billete de cincuenta pesos, ¿Cuánto te cobra de ida? ´12 pesos´ Ok, ¿Cuánto te va a dar de cambio?". Y me sorprendió al principio porque supo hacer la resta. Y entonces me empecé a dar cuenta desde ahí, la frustración que tenía en la materia, porque cuando yo le decía, haz una resta, sólo se me quedaba viendo sin saber plantearla. Y lo pudimos hacer así, con problemas de la vida real.

Extracto 4

A partir de esto, podemos ver que Marcela nos da evidencia de cómo emplea el conocimiento que tiene acerca de ciertos ejemplos típicos y explicaciones que considera potentes para abordar las operaciones básicas en un momento particular de enseñanza, específicamente para atender la dificultad que puede presentarse al aprender este tema en particular, el cual está considerado en la categoría de *Teorías del aprendizaje matemático*, componente del subdominio KMT.

Falta de motivación para aprender matemáticas

Con respecto a la falta de motivación para aprender matemáticas por parte de los alumnos, Gisela habla de ésta en términos de desinterés y apatía, y en el diseño de actividades que nos proporcionó, emplea algunos elementos del MTSK para atender este aspecto afectivo, específicamente el conocimiento considerado en la categoría *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* del subdominio PCK y la de *Recursos didácticos (físicos y digitales)* correspondiente al subdominio KMT. A continuación, se presentan algunas actividades propuestas por Gisela que lo hacen evidente.

En las Figuras 2 y 3, la profesora muestra el conocimiento que tiene sobre el tipo de actividades que considera adecuadas para abordar el tema del teorema de Pitágoras y a su vez con las que pretende mantener el interés de los alumnos, el cual corresponde a la categoría de *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* (Flores-Medrano et al., 2014). Esto es porque todas las actividades que se acaban de describir (la medición del ángulo formado por las esquinas del salón de clases, la entrevista realizada al albañil y la construcción del modelo con material didáctico) son actividades donde la participación activa y colaborativa del alumno es indispensable, rompiendo así con el esquema de la enseñanza tradicional.

Problema inicial

Se les pide a los estudiantes que con los medios que dispongan verifiquen que los muros que forman las esquinas del salón de clases forman un ángulo recto.

Se espera que los estudiantes propongan varias estrategias, las cuales puedan o no, llevar a la solución del problema inicial.

Actividad 1

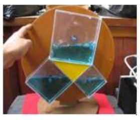
Se les pide que por equipo acudan a una construcción y entrevisten algún maestro albañil;

Figura 2. Actividades iniciales del diseño didáctico de Gisela

Además, en la Figura 3a, se observa que Gisela propone una actividad en la que claramente interviene el uso de material didáctico y en las Figuras 3b y 3c, se muestra que la profesora propone el uso del video como apoyo la realización de las actividades.

a

Se les pedirá que para la siguiente sesión construyan lo siguiente:



Con los materiales que se tengan a la mano, pueden sustituir el agua por granos e incluso arena, haciendo énfasis que las alturas deben ser los mismos para cada cuerpo geométrico.

Además, las dimensiones de cada cuadrado pueden ser múltiplos de la triada 3,4 y 5.

b

El profesor les proyectará el siguiente vídeo:

https://www.youtube.com/watch?v=K4xmY9NJwbk

(Consultado el 8 de noviembre de 2020)

c

Se les pedirá a los estudiantes que documenten mediante un video, si las esquinas de los muros de su casa están completamente a escuadra empleando el teorema de Pitágoras.

Figura 3. Actividades con recursos didácticos del diseño de Gisela

En estas actividades se percibe que la profesora emplea conocimiento sobre *Recursos didácticos (físicos y virtuales)*, para la enseñanza de este tema y para motivar a sus estudiantes, pues de acuerdo con Licea, Frías y Gutiérrez (2017), los alumnos muestran un alto grado de motivación y satisfacción hacia el uso del video como Recurso Educativo Abierto. Además, el uso de material en la enseñanza de las matemáticas, favorece la motivación y la actitud positiva hacia la Matemática (Arrieta, 1998).

Por otra parte, Marcela, hizo referencia a la falta de motivación en términos de aburrimiento, principalmente como una creencia que tienen los estudiantes con respecto a las matemáticas y durante la entrevista mencionó que es tarea precisamente del docente motivar a los alumnos (véase Extracto 5).

E: ¿Qué piensas sobre la motivación de los alumnos para aprender matemáticas?

M: Principalmente depende del maestro y de las herramientas que utiliza para dar un tema en específico. […] A mí me funcionaba bien para enseñar las secciones cónicas utilizar una piña para hacer los cortes que las generaran (resulta motivador e innovador para los alumnos). El docente debe buscar este tipo de buenas herramientas para lograr actitudes positivas hacia lo que van a aprender.

Extracto 5

Además, en este mismo extracto se advierte que la profesora exhibe el conocimiento que tiene sobre *Recursos didácticos (físicos)* para la enseñanza de secciones cónicas, y cómo emplea dicho conocimiento para motivar a sus alumnos en el aula.

Valor o utilidad de las matemáticas

Con respecto al valor o utilidad de las matemáticas, en el diseño que proporcionó Gisela, muestra que emplea su conocimiento acerca de los usos y aplicaciones del teorema de Pitágoras en la vida real, considerado en la categoría *Aplicaciones y Fenomenología* de KoT (Flores-Medrano et al., 2014). Para esto se centró en la utilidad de este teorema en el trabajo de construcción (véase Figura 1), con lo que pretende atender la falta de utilidad que los alumnos le atribuyen a las matemáticas en su entono. Por otro lado, consideramos que con actividad mostrada en la Figura 4, Gisela hace patente cómo emplea el conocimiento que tiene acerca de actividades o tareas adecuadas para que los estudiantes apliquen el teorema de Pitágoras (correspondiente a la categoría *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*) y así contribuir a que los alumnos conozcan la utilidad del teorema en situaciones que se les pueden presentar en su día a día.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos hasta el momento permiten plantear que el conocimiento que tiene el profesor acerca de los aspectos de dominio afectivo que intervienen en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, influye determinantemente en el conocimiento que emplea para atender ciertos aspectos afectivos en el aula y depende de lo que cada profesor conozca de dichos aspectos. Específicamente, respecto al tema *Dificultad de las matemáticas*, encontramos que, para atender este elemento de dominio afectivo, los componentes del MTSK que emplearon cada una de las profesoras fueron totalmente diferentes y en cada caso dependió de las concepciones que tienen sobre los aspectos relacionados con la dificultad que los alumnos perciben y experimentan al aprender matemáticas y de su experiencia como docentes. Por una parte, se halló que los elementos del MTSK que intervienen en la atención de la dificultad de las matemáticas, son el conocimiento que tiene el profesor acerca de la *Secuencia de temas*, las *Fortalezas y debilidades asociadas al aprendizaje* y los *Procedimientos* que se pueden emplear para abordar el tema de interés pues, de acuerdo a las declaraciones de Gisela, estos conocimientos van trazando la forma y el orden en que se va avanzando en la enseñanza de los temas que a los alumnos se les dificulta. Por otra parte, con Marcela, hallamos que el conocimiento, que tiene el profesor, considerado en la categoría *Teorías de Enseñanza* también está relacionado con este factor afectivo, ya que éste puede orientar las estrategias, ejemplos o técnicas que el profesor considera más potentes para la enseñanza de un tema según a las necesidades del alumno y la dificultad que esté experimentando.

En cuanto a la Falta de motivación para aprender matemáticas, el elemento del MTSK con el que observamos más relación, fue el conocimiento que tienen las profesoras acerca de los *Recursos didácticos (físicos y virtuales)* como herramientas para la enseñanza, con lo cual es posible promover la motivación de los estudiantes. Además, el conocimiento que tienen ambas profesoras sobre el tipo de tareas o actividades que son más adecuadas para abordar un tema en particular, fue otro conocimiento común que emplearon para atender este aspecto de dominio afectivo, el cual corresponde a la categoría de *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*. Por lo tanto, concluimos que estos dos componentes del MTSK, están estrechamente relacionados con la falta de motivación en el aula, dado que advertimos que fue empleado para elegir el tipo de actividades y tareas que se les proponen a los alumnos, las cuales están dotadas de la intencionalidad de mantener el interés de los alumnos para participar activamente y aprender el tema.

Finalmente, también se identificó una relación importante entre el *Valor o utilidad de las matemáticas* y los conocimientos que tiene el profesor acerca de los diferentes usos y aplicaciones del tema en cuestión (*Aplicaciones y Fenomenología*) y sobre las actividades y tareas adecuadas para enseñar el tema y a su vez mostrar la utilidad de éste en nuestro entorno (*Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*), ya que dichos conocimientos fueron empleados para la atención de este aspecto afectivo, y consideramos que la utilización de ambos elementos del MTSK, son determinantes para mejorar el valor o utilidad que los alumnos le atribuyen a las matemáticas.

AGRADECIMIENTO

Este trabajo fue financiado por CONACYT, mediante la Beca de Maestría Nacional con CVU: 1028421.

Referencias

Arrieta, M. (1998). Medios materiales en la enseñanza de la matemática. *Revista de psicodidáctica*, (5), 107-114.

Alonso, S. H., Saéz, A. M, y Picos, A. P. (2005). El perfil emocional matemático como predictor de rechazo escolar: relación con las destrezas y los conocimientos desde una perspectiva evolutiva. *Educación Matemática, 17* (2), 89-116.

Barrera, M. D. M., Tonon, G., y Salgado, S. V. A. (2012). Investigación cualitativa: el análisis temático para el tratamiento de la información desde el enfoque de la fenomenología social. *Universitas humanística*, (74), 195-226.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, LC, Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar González, A., Riveiro, M., y Muñoz-Catalán, MC (2018). Modelo de conocimientos especializados del profesor de matemáticas (MTSK). *Investigación en educación matemática*, 20 (3), 236-253.

Escudero-Ávila, D., Gomes, J., Muñoz-Catalán, M. C., Flores-Medrano, E., Flores, P., Rojas, N., y Aguilar, A. (2016). Aportaciones metodológicas de investigaciones con MTSK. *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Huelva*, 60-69.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, A., y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Avila, E. Flores-Medrano, y M. Montes (Eds.). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (57-72). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Gómez, G. R., Flores, J. G. y Jiménez, E. G. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: aljibe.

Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Madrid: Narcea Ediciones.

González, R. M. (2005). Un modelo explicativo del interés hacia las matemáticas de las y los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática, 17* (1), 107-128.

Huertas, J. A. (1997). *Motivación. Querer aprender*. Buenos Aires: AIQUE.

Leal, C. C. F., (2020) Uso del Modelo MTSK para la Caracterización del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas en Secundaria: El caso de la Proporcionalidad. *Revista Iberoamericana de educación Matemática*, (59), 33-63.

Licea, R. A., López Frías, B. S., y Mortera Gutiérrez, F. J. (2017). El video como Recurso Educativo Abierto y la enseñanza de Matemáticas. *Revista electrónica de investigación educativa*, 19(3), 92-100.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En G. A. Douglas (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (575-596).

Sánchez, G. S. (2019). *El desinterés hacia las matemáticas en alumnos universitarios de ingeniería y matemáticas: construcción y validación de un instrumento* (Tesis de maestría). Recuperado de https://www.fcfm.buap.mx/posgrados/assets/docs/catalogo-tesis/mem/2019/GudalupeSantosSanchez.pdf

¿CÓMO SE RELACIONAN LOS SUBDOMINIOS DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS?

How are subdomains of mathematics teachers' specialized knowledge related?

Delgado-Rebolledo, R. [a]; Espinoza-Vásquez, G. [b]

[a] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso; [b] Universidad Alberto Hurtado

Temática: 4 – Desarrollo del MTSK

Resumen. Con base en los dominios, subdominios y categorías del modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) es posible realizar un análisis detallado del conocimiento de los profesores. Este análisis podría ser complementado con un estudio de las relaciones entre los componentes de este conocimiento haciendo explícito el carácter complejo e integrado del MTSK. En este trabajo exponemos investigaciones que se refieren a relaciones entre subdominios de conocimiento del MTSK. Identificamos las categorías de conocimiento involucradas en dichas relaciones y con ello, proyectamos futuras investigaciones que aborden el establecimiento de nuevas relaciones entre diferentes conocimientos. Consideramos el estudio de las relaciones en el MTSK como una forma de ampliar nuestra comprensión del conocimiento de los profesores y su desarrollo.

Palabras clave. Conocimiento especializado, conocimiento integrado, relaciones intra-dominio, relaciones inter-dominio.

Abstract. Based on domains, subdomains and categories of Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK) model it is possible to develop a fine-grained analysis of teacher knowledge. This analysis could be complemented with the study of relationships between the components of knowledge, showing explicitly the complex and integrated character of MTSK. In this work, we expose studies about relationships between subdomains of knowledge in MTSK. Categories of knowledge involved in relationships were identified and we propose future research that will address the establishment of new relationships between different types of knowledge. We consider that study of relationships in MTSK is a way to broaden our understanding of teachers' knowledge and its development.

Keywords. Specialized knowledge, integrated knowledge, intra-domain relationships, inter-domain relationships.

INTRODUCCIÓN

El modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas —MTSK, por sus siglas del inglés Mathematics Teachers' Specialised Knowledge— (Carrillo et al., 2018), es un modelo teórico y analítico para comprender el conocimiento que manifiesta el profesor de matemáticas en los diferentes escenarios en los que actúa como la planeación de clases, el diseño de tareas para los estudiantes, las interacciones con otros profesores, las sesiones de clase, la reflexión sobre su propia práctica de enseñanza, entre otros. Así, el conocimiento especializado es aquel que es útil para el profesor en contextos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En esta línea, el MTSK está formado por tres dominios: un dominio de conocimiento matemático (Mathematical Knowledge, MK), un dominio de conocimiento didáctico del contenido (Pedagogical Content Knowledge, PCK) y un dominio de creencias del profesor sobre la matemática, su enseñanza y su aprendizaje.

Delgado-Rebolledo, R., & Espinoza-Vásquez, G. (2021). ¿Cómo se relacionan los subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas? In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 288–295). Congresseme.

Cada dominio de conocimiento del modelo está dividido en subdominios y estos a su vez se concretan en categorías y descriptores. Esta estructura analítica del MTSK— que se expone en la Tabla 1— permite que el modelo pueda ser utilizado para hacer un análisis detallado de los diferentes elementos que componen el conocimiento de los profesores de matemáticas. Lo anterior, no significa que el conocimiento especializado sea un conjunto de elementos aislados, ni la suma de varios tipos de conocimiento, por el contrario, es un todo orgánico donde los conocimientos de los dominios interactúan dinámicamente (Scheiner et al., 2019). De este modo, el MTSK permite una visión holística del conocimiento de los profesores de matemáticas, la cual se hace visible al establecer relaciones entre los conocimientos contemplados en los subdominios del modelo.

Tabla 1. El modelo MTSK: Dominios, subdominios y categorías de conocimiento

Dominios y subdominios		Categorías de conocimiento
Conocimiento matemático (MK)	Conocimiento de los temas (KoT)	Procedimientos Definiciones, propiedades y sus fundamentos Registros de representación Fenomenología y aplicaciones
	Conocimiento de la estructura matemática (KSM)	Conexiones de complejización Conexiones de simplificación Conexiones transversales Conexiones auxiliares
	Conocimiento de la práctica matemática (KPM)	La práctica de demostrar La práctica de definir La práctica de resolver problemas El papel del lenguaje matemático
Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)	Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)	Teorías de aprendizaje de las matemáticas Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas Formas de interacción con un contenido matemático Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas
	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)	Teorías de enseñanza de las matemáticas Recursos de enseñanza Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)	Expectativas de aprendizaje Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado Secuenciación de temas

Nota. Los subdominios del modelo se presentan con sus nombres en español y sus correspondientes siglas en inglés. En el caso del subdominio KPM, las categorías que se presentan siguen siendo tema de estudio.

Un avance en el estudio de las relaciones entre los subdominios del conocimiento y el dominio de creencias se encuentra en investigaciones como la de Aguilar-González et al. (2018), Aguilar-González, Muñoz-Catalán y Carrillo (2019) y Vasco y Climent (2017). Por su parte, el estudio de las relaciones entre el dominio afectivo y el MTSK se exponen, por ejemplo, en las investigaciones de Pascual, Fernández-Gago et al. (2019) y Pascual, Marbán et al. (2019). Lo anterior da cuenta de la riqueza de relaciones que se pueden establecer usando el MTSK y lo fértil que resulta esta línea de estudio. Por cuestiones de brevedad, en este trabajo, nos enfocaremos solo en los estudios que se refieren a algunas relaciones en los subdominios de conocimiento MK y PCK, las cuales dan cuenta de la integración entre los componentes del conocimiento de los profesores. Así, el objetivo de este escrito es exponer relaciones entre los conocimientos de los subdominios del MTSK, identificando los subdominios y las categorías de conocimiento involucradas en ellas y, con ello, proyectar futuras investigaciones que aborden el establecimiento de nuevas relaciones entre diferentes conocimientos.

RELACIONES ENTRE SUBDOMINIOS DE CONOCIMIENTO DEL MTSK

Zakaryan y Ribeiro (2016) discuten la existencia o no de relaciones entre subdominios del MTSK. Los autores toman el KMT como punto de partida y enfocan su atención en las evidencias de este subdominio sobre la enseñanza de los racionales, elaborando mapas de conexiones entre las categorías del KMT y las de los demás subdominios identificados. Adicionalmente, Aguilar-González et al. (2019) consideran que en un mismo episodio se pueden encontrar evidencias o indicios de dos o más subdominios de conocimiento que se complementan, estableciendo así las relaciones entre subdominios. Por su parte, Delgado-Rebolledo y Zakaryan (2020), analizando desde el KPM, señalan que estas relaciones se presentan cuando en un fragmento de datos se identifica un conocimiento en este subdominio el cual soporta o condiciona la presencia de otro u otros conocimientos en algún subdominio del MTSK. De acuerdo con las descripciones anteriores, las relaciones se presentan cuando se identifican varios conocimientos en un mismo fragmento de datos y es posible describir cómo interactúan entre ellos.

Por otra parte, debido a la estructuración del MTSK y al carácter integrado con que se considera el conocimiento, es posible encontrar investigaciones que muestran relaciones entre conocimientos de un mismo subdominio (intra-subdominio), al interior de un dominio (intra-dominio) o entre diferentes dominios (inter-dominio). A continuación, nos referiremos a estos tipos de relaciones.

Relaciones intra-subdominios de conocimiento

En la observación del conocimiento especializado se espera ver la integración de diferentes tipos de conocimiento, interactuando en diferentes dimensiones. Sin embargo, la condición analítica del modelo nos ha permitido focalizar nuestro examen en subdominios particulares para precisar el conocimiento que contienen o refinar las definiciones de sus categorías. En esta línea, es posible observar cómo aparecen y se relacionan los conocimientos de un mismo subdominio. En el trabajo de Espinoza (2020) se identifican relaciones al interior de cada subdominio del MTSK, por ejemplo, en el KoT se observa la relación entre el conocimiento sobre cómo se construye la representación cartesiana de una función y el conocimiento sobre las características de esta representación. Asimismo, se observa que el profesor incluye los conceptos de inyectividad y sobreyectividad como temas que no están contemplados en el currículum chileno, pero que le son útiles para comprender las funciones biyectivas e inversas, esperando la comprensión conceptual por sobre la procedimental para el nivel escolar que atiende, esto al interior del KMLS.

Relaciones intra-dominios de conocimiento

Al interior del MK se podrían presentar diferentes relaciones como plantean Flores-Medrano et al. (2014). Los autores señalan que mientras en el KPM se considera el conocimiento de los profesores acerca de qué y cómo es una demostración, en el KoT se considera el conocimiento que tienen los profesores de, por ejemplo, la demostración de que raíz de dos es irracional. Otra relación entre el KoT y el KPM se presenta cuando un profesor utiliza distintos registros de representación como forma de validación de que un resultado es correcto en matemáticas (Escudero, 2015). En Espinoza (2020) también se expone una relación entre KoT y KPM cuando el profesor utiliza la definición de función para validar ejemplos de relaciones como correspondencias funcionales. En este caso, el profesor muestra conocer el rol del contraejemplo y el rol de los cuantificadores universal y existencial cuando se busca determinar si una proposición (para cada x, existe un y) es verdadera o no. Relaciones similares entre el KoT y el KPM se podrían establecer entre el conocimiento de una definición particular y el conocimiento de las características de la definición, o el conocimiento de la notación matemática asociada a un contenido y el conocimiento del papel del lenguaje matemático en el desarrollo de las prácticas matemáticas.

En cuanto a relaciones intra-dominio en el PCK, Flores-Medrano et al. (2014) reflexionan sobre propuestas curriculares que busquen un desarrollo cognitivo adecuado por parte del que aprende como una posible relación entre el KFLM y el KMLS. Por su parte, una relación entre el KMT y el KMLS se presenta en Zakaryan y Ribeiro (2016) cuando una profesora de secundaria da cuenta de su conocimiento de las potencialidades de temas anteriores para cursos posteriores y utiliza este conocimiento para la enseñanza. En el estudio antes mencionado, los autores exponen cómo el KMT de la profesora está sustentado en su KFLM ya que la presentación de ejemplos que hace se basa en su conocimiento de las dificultades de los estudiantes. Además, la profesora toma decisiones respecto a la enseñanza basándose en su conocimiento de las interacciones de los estudiantes con el contenido matemático y de sus intereses para aprender matemáticas. Similarmente, el conocimiento de la profesora sobre los recursos materiales se asocia con su conocimiento de los intereses de los estudiantes.

Otras relaciones entre KMT y KFLM se profundizan en el trabajo de Zakaryan et al. (2018) en el caso de una profesora de matemáticas de secundaria. En este estudio se observa que el conocimiento sobre estrategias de enseñanza como el uso de analogías y cuestionamientos, está vinculado al conocimiento del lenguaje común utilizado por los estudiantes, sus intereses, dificultades y errores. De esta forma, las decisiones de la profesora están condicionadas por su KFLM. A su vez, el conocimiento de la profesora de teorías formales de enseñanza influye en sus decisiones al momento de utilizar estrategias de enseñanza y plantear tareas potenciando su teoría personal de aprendizaje de las matemáticas. Adicionalmente, el conocimiento de las dificultades de los estudiantes lleva a la profesora a plantear ciertas tareas para la enseñanza.

En Espinoza (2020) y Espinoza, Zakaryan y Carrillo (2018) se muestra que el conocimiento sobre una estrategia de enseñanza para el concepto de función está vinculado al conocimiento sobre cómo se aprenden los conceptos asociados a la función. En dicha investigación, el profesor emplea una analogía entre la función y una máquina lavadora para hacer comprensible el concepto en sus estudiantes. Dicha analogía busca superar la dificultad de los estudiantes para comprender la función como una correspondencia y la presenta como un proceso en un contexto cercano para ellos, lo que muestra una relación entre KMT y KFLM.

Relaciones inter-dominios de conocimiento

En cuanto a las relaciones inter-dominio en el MTSK, el KoT se encuentra involucrado en varias de ellas. Por ejemplo, Flores-Medrano et al. (2014) señalan relaciones entre el KoT y el KMLS cuando la secuenciación de temas responde a conexiones intra conceptuales. Por su parte, Escudero-Ávila, Vasco y Aguilar-González (2017) muestran que el uso de distintos registros de representación de la función está ligado con el conocimiento de técnicas, estrategias o tareas específicas para la enseñanza de este contenido, lo cual da cuenta de una relación entre el KoT y el KMT. Zakaryan y Ribeiro

(2016) exponen una relación similar entre KMT y KoT al mostrar cómo la enseñanza de números racionales se sustenta en el uso de distintas representaciones de estos números. Además, una relación entre el KoT y el KFLM es expuesta por Escudero-Ávila et al. (2017) en cuanto al impacto que tiene el uso de distintos registros de representación en el aprendizaje del concepto de función.

Por otro lado, Zakaryan y Ribeiro (2016) reportan relaciones entre el KPM y el KMT respecto al uso de una estrategia de enseñanza de los racionales que involucra el establecimiento de regularidades y patrones. Escudero-Ávila et al. (2017) señalan una relación entre el conocimiento de recursos como softwares o libros de texto y el conocimiento de formas de validar y demostrar en matemáticas. Sumado a lo anterior, en Delgado-Rebolledo y Zakaryan (2020) también se reportan relaciones entre el KPM y el KMT, por ejemplo, en cuanto al conocimiento de una técnica de enseñanza del método de demostración por contradicción basada en el conocimiento de dicho método, el conocimiento de una metáfora del cuantificador existencial que considera el significado y las características de este cuantificador, así como el conocimiento de una estrategia de enseñanza de la propiedad de los intervalos encajados considerando el rol de los símbolos y el uso del lenguaje matemático.

Adicionalmente, la investigación anterior muestra otras relaciones entre el KPM y los subdominios del PCK. Por ejemplo, entre el KPM y el KFLM cuando el conocimiento de diferentes métodos de demostración se vincula al conocimiento de las dificultades de los estudiantes para desarrollar demostraciones, así como el conocimiento de los cuantificadores y su significado y las dificultades de los estudiantes para trabajar con ellos. A su vez, las autoras exponen una relación entre el KPM, el KMT y el KFLM cuando el profesor conoce la forma en que los estudiantes interactúan con un contenido matemático y a partir de ese conocimiento utiliza una estrategia de enseñanza basada en los roles de validación y explicación de la demostración. Una relación similar se presenta cuando el conocimiento del profesor sobre cómo desarrollar una demostración se vincula con su conocimiento de una teoría personal de aprendizaje la cual soporta una estrategia de enseñanza de la demostración (Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2020).

Respecto a las relaciones inter-dominio donde está presente el KMLS, Flores-Medrano et al. (2014) señalan una posible relación entre la categoría secuenciación de temas con las conexiones de complejización y simplificación del KSM. A su vez, Escudero (2015) reporta una relación entre el KPM y el KMLS respecto al nivel de desarrollo conceptual y la resolución de problemas.

COMENTARIOS FINALES

En los diferentes modelos que se utilizan para el estudio del conocimiento de los profesores de matemáticas se exponen facetas, dimensiones, dominios o categorías desde las cuales el conocimiento de los profesores parece ser un conjunto de piezas o de espacios que deben ser llenados. Esta presentación del conocimiento como un grupo aparentemente fijo de componentes que no están vinculados oculta algunas características del conocimiento de los profesores señaladas por Davis y Renert (2013) como ser un conocimiento vasto, entrelazado y cambiante. En esta línea, comprender el conocimiento de los profesores desde el punto de vista detallado que permiten las divisiones propuestas por el MTSK podría complementarse con una perspectiva más amplia que dé cuenta de cómo interaccionan estos componentes. Así, el estudio del conocimiento especializado de los profesores desde el punto de vista de las relaciones entre subdominios de conocimiento en el mismo dominio (intra-dominio), entre categorías de conocimiento en el mismo subdominio (intra-subdominio) o en diferentes dominios (inter-dominio) hacen explícito el carácter integrado del conocimiento especializado de los profesores de matemáticas.

Estudios que utilizan conceptualizaciones del conocimiento de los profesores de matemáticas diferentes al MTSK se han referido a un tipo de relación similar a lo que se ha expuesto en este trabajo como inter-dominio. Por ejemplo, Sherin (2002) afirma que los profesores tienen unas estructuras de conocimiento donde se presentan fuertes conexiones entre el conocimiento disciplinar y el conocimiento pedagógico del contenido. Döhrmann et al. (2012) también exponen un vínculo inseparable entre el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido matemático como componentes cognitivos esenciales de las competencias profesionales de los profesores de matemáticas. Lo anterior se complementa con investigaciones que muestran el conocimiento del contenido como un prerrequisito del conocimiento pedagógico del contenido (e.g., Norton, 2019). No sucede lo mismo con las relaciones intra-subdominio e intra-dominio, ya que estas no se observaron en investigaciones con otros marcos o modelos del conocimiento de los profesores de matemáticas.

Por otra parte, coincidimos con Scheiner et al. (2019) en que lo que hace al conocimiento del profesor especializado no es lo que el profesor conoce, si no cómo lo conoce. En este sentido, cuando se estudia el conocimiento especializado de los profesores de matemáticas de manera detallada por medio de subdominios y categorías de conocimiento que se identifican de manera aislada, estos elementos pueden considerarse como parte de lo que el profesor conoce sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje. Estos conocimientos, como información que el profesor tiene disponible para usar (Schoenfeld, 2010), podrían interactuar entre sí en el momento en que el profesor lo requiera. Así, dada la variedad de relaciones entre conocimientos que un profesor podría construir a partir de su formación y de su experiencia, las relaciones también reflejarían el carácter complejo del MTSK. En este sentido, las relaciones aquí expuestas entre conocimientos pueden ser consideradas parte de cómo el profesor conoce las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Esto quiere decir que dichas relaciones sustentan una visión del conocimiento especializado del profesor como un conocimiento en acción, dinámico y conectado.

En línea con lo anterior, en los estudios con el MTSK el KMLS se ha observado en conexión con los demás subdominios del modelo, aunque estas relaciones involucran menos categorías de conocimiento en comparación a las relaciones evidenciadas para los subdominios KoT y KPM. Otra relación que llama la atención es aquella que se presenta entre el KMT y el KFLM ya que muchas veces resulta una tarea compleja comprender la enseñanza sin necesidad de referirse al objetivo de la misma que es el aprendizaje. Así, son varias las categorías de conocimiento en cada subdominio involucradas en las relaciones KMT y KFLM. Además, en los trabajos aquí considerados encontramos que el KSM es el subdominio que se reporta menos conectado con los demás pues solo se ha propuesto su relación con el KMLS.

En resumen, la primera respuesta que dimos en este trabajo a la pregunta ¿cómo se relacionan los subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas? es que dichas relaciones toman la forma intra-dominio, intra-subdominio e inter-dominio. Otra posible respuesta estaría en explorar la naturaleza de estas interacciones en términos de relaciones de soporte o condicionamiento como se expone en Delgado-Rebolledo y Zakaryan (2020). También se podría considerar que en estas relaciones los subdominios dependen unos de otros, se sustentan, complementan, asocian o potencian como se ha señalado en otros estudios. No obstante, más allá del término que se utilice para describir las relaciones, lo importante es que estas permitan ampliar la comprensión del conocimiento especializado de los profesores y que además se conviertan en una herramienta para realizar un análisis más fino del conocimiento que el profesor usa para gestionar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Queda vigente la necesidad de profundizar en las relaciones expuestas y buscar otras que permitan avanzar en la comprensión de la complejidad de este conocimiento o generar insumos para el desarrollo profesional del profesorado. En este sentido, de acuerdo con Zakaryan y Ribeiro (2016), las relaciones dentro del MTSK también podrían ser utilizadas para el diseño de cursos de formación de profesores, con el propósito de que los futuros profesores tengan la oportunidad de construir su conocimiento especializado de forma conectada.

Referencias

Aguilar-González, A., Muñoz-Catalán, C., Carrillo, J. y Rodríguez-Muñiz, J. L. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas? *PNA*, *13*(1), 41-61. doi: 10.30827/pna.v13i1.7944

Aguilar-González, A., Muñoz-Catalán y C., Carrillo, J. (2019). An Example of connections between the mathematics teacher's conceptions and specialised knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(2), 1–15. doi: 10.29333/ejmste/101598

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D... Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*, 236–253. doi:10.1080/14794802.2018.1479981

Davis, B., y Renert, M. (2013). Profound understanding of emergent mathematics: Broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(2), 245–265. doi:10.1007/s10649-012-9424-8

Delgado-Rebolledo, R. y Zakaryan, D. (2020). Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(3), 567–587. doi:10.1007/s10763-019-09977-0

Döhrmann, M., Kaiser, G. y Blömeke, S. (2012). The conceptualisation of mathematics competencies in the international teacher education study TEDS-M. *ZDM Mathematics Education*, *44*, 325–340. doi:10.1007/s11858-012-0432-z

Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. (Tesis doctoral). Universidad de Huelva, Huelva. Disponible en http://hdl.handle.net/10272/11456.

Escudero-Ávila, D., Vasco, D., y Aguilar-González, Á. (2017). Relaciones entre los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Eds). *Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, 83–91.

Espinoza, G. (2020). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de educación media sobre el concepto de función*. (Tesis doctoral). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso. Disponible en http://opac.pucv.cl/pucv_txt/txt-0000/UCB0313_01.pdf

Espinoza-Vázquez, G., Zakaryan, D. y Carrillo, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *21*(3), 301–324. doi: 10.12802/relime.18.2133

Norton, S. (2019). The relationship between mathematical content knowledge and mathematical pedagogical content knowledge of prospective primary teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *22*(5), 489–514. doi: 10.1007/s10857-018-9401-y

Pascual, Mª.I., Fernández-Gago, J., García, Mª, Marbán, J.Mª y Maroto, A. (2019). El dominio afectivo y MTSK. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 32–40). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Pascual, Mª. I., Marbán, J., Maroto, A., Fernández-Gago, J. y García Mª. (2019). Apuntando influencias del dominio afectivo en el MTSK. Una ejemplificación con KMT. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 167–174). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J. y Pino-Fan, L. R. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(1), 153–172. doi:10.1007/s10763-017-9859-6.

Schoenfeld, A.H. (2010). *How we think*. New York: Routledge.

Sherin, M. (2002). When teaching becomes learning. *Cognition and Instruction*, *20*(2), 119–150.

Vasco, D. y Climent, N. (2017). Relationships between the knowledge and beliefs about mathematics teaching and learning of two university lecturers in linear algebra. En S. Zehetmeier, B. Rösken-Winter, D. Potari y M. Ribeiro (Eds.), *Proceedings of the ERME Topic Conference on Mathematics Teaching, Resources and Teacher Professional Development* (pp. 177–186). Berlin, Germany: Humboldt-Universität zu Berlin.

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E. y Carrillo J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(2), 105–123. doi: 10.5565/rev/ensciencias.2260

Zakaryan, D. y Ribeiro, C. M. (2016). Conocimiento de la enseñanza de números racionales: una ejemplificación de relaciones. *Zetetik*, *24*(3), 301–321.

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UN PROFESOR DE MATEMÁTICAS: CARACTERIZACIÓN DE RELACIONES EN TEMA DE SIMETRIAS

Specialized knowledge of a mathematics teacher: characterization of relationships on the topic of symmetries

Paternina-Borja, O. [a]; Juarez-Ruiz, E. [a]; Zakaryan, D. [b]

[a] Benemérita Universidad Autónoma de Puebla; [b] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Temática: 4 – Desarrollo del MTSK

Resumen. Esta comunicación presenta resultados parciales de una investigación que se sustenta en el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) con objetivo caracterizar las relaciones entre el Conocimiento de los Temas y el Conocimiento Didáctico del Contenido que moviliza un profesor de matemática en la enseñanza de las simetrías. Dicha investigación se ha desarrollado desde un enfoque cualitativo con un estudio de caso instrumental con un profesor de matemáticas de secundaria de un colegio público de México. Los datos se han recolectado por medio del diseño de una planeación de clase y una entrevista semiestructurada al profesor. Como resultados se presentan algunos ejemplos de relaciones entre el Conocimiento de los Temas y el Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas, de la Enseñanza de las Matemáticas y de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas.

Palabras clave. MTSK, Conocimiento de los temas, Conocimiento didáctico del contenido, Simetrías.

Abstract. This communication presents partial results of an investigation that is based on the model of Specialized Knowledge of the Mathematics Teacher (MTSK) with the objective of characterizing the relationships between the Knowledge of the Subjects and the Didactic Knowledge of the Content that a mathematics teacher mobilizes in teaching of symmetries. This research has been developed from a qualitative approach with an instrumental case study with a high school mathematics teacher from a public school in Mexico. The data have been collected through the design of a class plan and a semi-structured interview with the teacher. As results, some examples of relationships between the Knowledge of the Subjects and the Knowledge of the Characteristics of the Learning of Mathematics, of the Teaching of Mathematics and of the Mathematics Learning Standards are presented.

Keywords. MTSK, Knowledge of the topics, Didactic knowledge of the content, Symmetries.

INTRODUCCIÓN

En el aula de clases de matemáticas están en constante relación el estudiante, el profesor y el saber. El profesor de matemáticas es un actor importante que planifica y dirige la actividad que se genera en el aula donde pone en juego, con cierta lógica, una diversidad de conocimientos en el desarrollo de su tarea profesional (Rojas, 2014). En consecuencia, se ha visto necesario estudiar el conocimiento del profesor de matemáticas en la intención de enseñar y en el ejercicio propio de la enseñanza en todos los niveles educativos. En esta línea, Carrillo et al. (2013) proponen una conceptualización que profundiza en el conocimiento especializado del profesorado de matemáticas. Los autores desarrollaron el modelo de *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas - MTSK* - por sus

Paternina-Borja, O., Juarez-Ruiz, E., & Zakaryan, D. (2021). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas: caracterización de relaciones en tema de simetrias. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 296–303). Congresseme.

siglas en inglés con el objetivo de analizar y comprender el conocimiento disciplinar y didáctico de los docentes.

En los últimos años se ha puesto de relieve el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas de Educación Secundaria (Advíncula et al., 2021). En este sentido, se han desarrollado diversos estudios enfocados en la comprensión del conocimiento especializado de profesores de matemáticas en secundaria teniendo en cuenta las relaciones entre subdominios del modelo MTSK. Por ejemplo, Zakaryan y Ribeiro (2016) caracterizaron el conocimiento de una profesora en la enseñanza de los números racionales y las relaciones que se pueden establecer entre los distintos subdominios del modelo. Por otra parte, en Zakaryan et al. (2018) se presentan las relaciones entre subdominios del Conocimiento Didáctico del Contenido - PCK- de una profesora en la enseñanza de la semejanza de triángulos. Asimismo, Fuentes (2020) profundizó en la comprensión del conocimiento especializado de un profesor en la enseñanza de la proporcionalidad estableciendo relaciones entre el Conocimiento de los Temas - KoT- con los demás subdominios del modelo. Siguiendo la misma línea, este estudio se enfoca en un docente de secundaria para comprender y profundizar en su conocimiento matemático y didáctico al diseñar una planeación de clase para la enseñanza de las simetrías y caracterizar las posibles relaciones entre el KoT y el PCK**.**

MARCO TEORICO

Desde hace varias décadas se ha intentado construir o diseñar modelos, estudios o mapas que ayuden a caracterizar el conocimiento profesional del profesor. Shulman (1986) desarrolló un estudio con tres dominios: Conocimiento de la Materia (SMK), Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) y Conocimiento Curricular (CK). En esta propuesta se destacó el PCK entendido como el conocimiento necesario para enseñar en relación con el contenido específico de la materia que se está enseñando, resaltando también la importancia del SMK. En este sentido, se propuso un modelo para organizar el conocimiento del profesor de matemáticas observando su actuación en el aula de clases denominado Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) (Ball et al., 2008). No obstante, en varias investigaciones se evidenciaron algunos inconvenientes al utilizar el modelo MKT con respecto al conocimiento especializado del profesor de matemáticas y el traslapamiento entre los subdominios al analizar este último (Carrillo et al., 2018).

Por tal motivo, Carrillo et al. (2013) desarrollaron un modelo que permite analizar y comprender a profundidad el conocimiento del profesor de matemáticas tratando de solventar los inconvenientes observados en el modelo MKT. Este modelo se denomina Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). El modelo MTSK considera exclusivamente aquellos conocimientos que tienen relación directa con el contenido matemático (Carrillo et al., 2018). En este sentido, no se asume como conocimiento especializado del profesor de matemáticas aquellas técnicas de manejo de grupo o heurísticas generales sin relación matemática. El conocimiento especializado del profesor de matemáticas se caracteriza como aquel que el profesor necesita y usa para enseñar matemáticas, dejando de lado acciones pedagógicas generales no relacionadas a la disciplina (Fuentes, 2020).

El modelo MTSK está compuesto por dominios y subdominios, con sus respectivas categorías, que están íntimamente relacionados con el contenido matemático. En consecuencia, se tienen los dominios Conocimiento Matemático (MK) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). Estos dominios están, a su vez, organizados en subdominios: el Conocimiento de los Temas (KoT), Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM) y el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM), por un lado.

Por el otro, se tiene el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS). Tanto los dominios como los subdominios se encuentran influenciados por las creencias y concepciones que tienen los profesores sobre la matemática y sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Carrillo et al., 2018). Ver Figura 1.

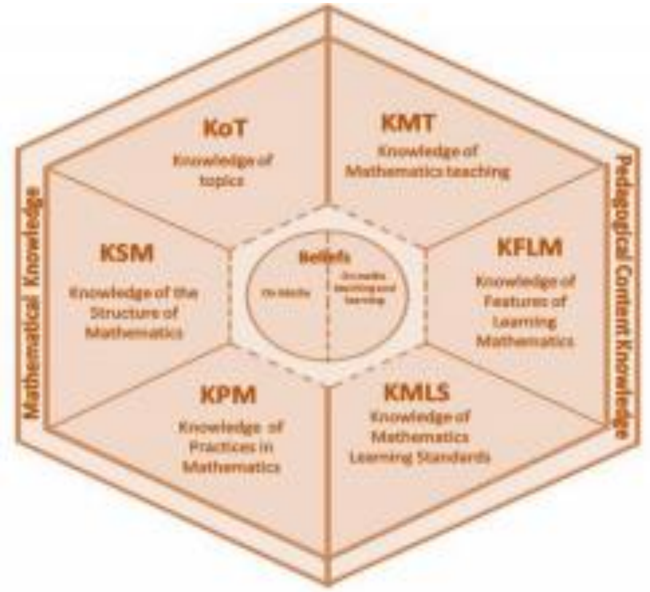


Figura 1. Modelo de Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Carrillo et al., 2018)

Como se mencionó anteriormente, cada subdominio está compuesto por unas categorías. Para la presente investigación se tendrán en cuenta los supuestos teóricos con respecto al KoT, KMT, KFLM y KMLS.

El KoT hace referencia al conocimiento que tiene el profesor de matemáticas sobre el tema que se enseña, es decir, qué y de qué manera el profesor sabe el tema objeto de enseñanza (Carrillo et al., 2018). Estos temas son los elementos del contenido de los programas de estudios de matemáticas. Para Muñoz-Catalán et al. (2015) este subdominio considera más que el conocimiento de la matemática como disciplina incluyendo la matemática escolar, así como lo relativo a sus fundamentos matemáticos, los procedimientos, estándares y alternativos, o las distintas formas de representación de los temas. En este sentido, el conocimiento sobre un tema va más allá del proceso de enseñanza-aprendizaje, se asume como un conocimiento profundo sobre este sin limitarse a un momento temporal ya que el profesor puede y debe conocer el contenido más allá del aprendizaje de sus estudiantes.

Asimismo, se deben tener en cuenta aquellos aspectos de los conceptos que permiten relacionarlos con contextos reales o con el propio contenido matemático en forma de ejemplos, permitiendo al profesor comprender diversos significados que existen sobre el mismo tema (Zakaryan y Ribeiro, 2016). Teniendo en cuenta lo anterior, se han establecido las siguientes categorías para este subdominio: i) *Procedimientos*, por ejemplo, conocer cómo se rota una figura o cuándo una figura es simétrica con respecto a otra o cómo se utiliza la perpendicularidad en la simetría; ii) *Definiciones, propiedades y fundamentos,* conocer que la simetría axial está definida teniendo en cuenta ejes, perpendicularidad, segmentos y distancia mientras que la simetría central se sustenta en giro, centro de giro, ángulo de rotación, amplitudes (Godino y Ruiz, 2002); iii) *Registros de Representación*, en particular, conocer que para simetrías se utiliza el registro gráfico, verbal, natural, algebraico (Alsina, 2005); iv) *Fenomenología y aplicaciones,* por ejemplo, el conocimiento de la aplicación y emergencia de formas u objetos simétricos en el entorno, en el diseño artesanías en papel maché (Paternina et al., 2020).

Por otra parte, en el KMT encontramos el conocimiento que tiene el profesor de las vías, recursos y formas de enseñar matemáticas (Muñoz-Catalán et al., 2015). En este sentido, se refiere al conocimiento sobre la enseñanza intrínsecamente ligado con el contenido matemático. Para Carrillo et al. (2018) en este subdominio se incluyen las teorías institucionalizadas de Educación Matemática o personales con respecto a la enseñanza de las matemáticas. En cuanto a los recursos materiales o virtuales, el conocimiento del profesor va más allá del funcionamiento de estos. La importancia radica en cómo mejora el proceso de enseñanza de un contenido matemático en el aula y las limitaciones que puede presentar dicho recurso (Zakaryan y Ribeiro, 2016). En el KMT se consideran tres categorías que se relacionan con las; i) *Teorías de enseñanza de las matemáticas*, por ejemplo, el conocimiento del profesor de la Teoría de Situaciones Didácticas para considerar las distintas fases de esta en la enseñanza de simetrías; ii) *Recursos materiales y virtuales,* por ejemplo, el conocimiento de los materiales de artesanías elaboradas con palmas de iraca para la enseñanza y aprendizaje de las simetrías (Morales et al., 2018) y iii) *Estrategias, técnicas y tareas asociadas a cada uno de los contenidos matemáticos*, particularmente, desarrollar actividades y secuencias didácticas para optimizar el proceso de enseñanza de las simetrías (Morales et al., 2018).

Posteriormente, se tiene el KFLM abarcando el conocimiento asociado con características inherentes al aprendizaje de las matemáticas, colocando la atención en el contenido matemático, como objeto de aprendizaje, más que en el estudiante (Carrillo et al., 2018). De esta manera, se tiene en cuenta cómo el estudiante interactúa con el objeto de estudio, las dificultades, errores, obstáculos y fortalezas que pueden surgir al relacionarse con las características del tema o contenido matemático generando algún tipo de emoción o interés en el estudiante. Es posible encontrar aquí el conocimiento de diferentes teorías, personales o institucionales de aprendizaje de las matemáticas (Muñoz-Catalán et al., 2015). También es probable analizar el conocimiento del profesor de las habituales ideas intuitivas desarrolladas por los estudiantes al tratar con ciertos conceptos, así como el conocimiento de aspectos propios relacionados a las actitudes hacia la matemática. Son categorías de este subdominio: i) *Teorías del Aprendizaje,* por ejemplo, el profesor podría conocer los distintos modos de pensamiento (Sierpinska, 1994) que explican los procesos mentales de estudiantes en el aprendizaje de simetrías; ii) *Fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas,* por ejemplo, la visualización e identificación del eje de simetría o en el sentido del giro en la rotación son algunas de las dificultades y obstáculos identificados en el aprendizaje de las simetrías (Iaderosa y Malara, 2000); iii) *Interacciones con el contenido matemático*, por ejemplo, observar los puntos que son iguales iv) *Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas*, con respecto a las simetrías, existen expectativas de tipo afectivo donde se busca generar confianza, interés y motivación (Hernández et al., 2018).

Finalmente, el KMLS abarca, por supuesto, los distintos grados de profundidad en que un profesor pudiera conocer el currículo oficial, respecto de las matemáticas (Muñoz-Catalán et al., 2015). En este aspecto hay que tener presente los estándares diseñados por cada sistema educativo e implementados en las instituciones de un país. Estándar de aprendizaje es cualquier instrumento diseñado para medir el nivel de habilidad de los estudiantes en la comprensión, construcción y aplicación de las matemáticas (Carrillo et al., 2018). Por lo tanto, es de suma importancia el conocimiento del profesor sobre la secuenciación de los temas para alcanzar los estándares básicos de aprendizaje, teniendo en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes para el desarrollo de la temática actual que será la base de los temas por venir. Según los mismos autores, este subdominio consta de las siguientes categorías: i) *Expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico*, incluye el conocimiento del profesor sobre lo que se espera que el estudiante aprenda en un determinado nivel escolar, por ejemplo, el conocimiento del profesor de la reforma educativa en el 2012 donde la Secretaría de Educación Pública (SEP) de México estableció los aprendizajes esperados con respecto a este tema en el último grado de primaria; ii) *Nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental*, los aprendizajes clave expedidos por la SEP (2017) señalan el grado de profundidad con que deben enseñar los docentes el tema de simetrías y iii) *Secuencia de temas,* asumiendo la perpendicularidad, figuras geométricas, etc. como temas previos y la semejanza y congruencia como temas posteriores con respecto a la simetría (SEP, 2017).

MÉTODO

En esta investigación se optó por un enfoque cualitativo. Se implementó como diseño metodológico el estudio de caso instrumental, el cual abarca la complejidad de un caso en particular con la pretensión de comprenderlo, pero no será el caso en sí mismo, por el contrario, se buscará comprender acerca de otro tema (Stake, 2007), en este estudio, el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Como informante se tuvo a un profesor (en adelante Jesús) de primer grado de secundaria (alumnos entre 12 y 13 años) de una institución pública de México con más de 20 años de experiencia y posgrado en Educación Matemática.

Para recolectar la información, teniendo en cuenta las condiciones generadas por la pandemia, se le pidió al profesor diseñar una planeación de clase con respecto al tema de simetrías en geometría. En este diseño se le proporcionó un formato al profesor, sin embargo, tuvo la libertad de decidir en cuantas sesiones desarrollaría esta temática, el grado, las competencias a trabajar con sus estudiantes y el tipo de actividades que desearía implementar en el aula. Después de analizar la planeación, se realizó una entrevista semiestructurada de 1 hora / 23 minutos de duración vía Meet para profundizar más sobre las distintas evidencias, indicios y oportunidades de estudio y comprensión (Flores et al., 2013).

Se analizó la información obtenida de la planeación de clase y la entrevista semiestructurada teniendo por objetivo evidenciar relaciones entre el KoT y el PCK del profesor de matemáticas. Los registros de videograbaciones de la entrevista fueron transcritos teniendo en cuenta los signos Val. Es. Co. Se realizó una triangulación de los datos obtenidos de los dos instrumentos implementados.

RESULTADOS

Partiendo del análisis de la planeación proporcionada por el profesor Jesús se realizó una entrevista semiestructura para profundizar en las evidencias, indicios y oportunidades de comprensión de su conocimiento especializado. En el comienzo de la entrevista se le preguntó a Jesús sobre el grado en el cual se desarrolla el tema de simetría y el profesor manifestó los siguiente:

> “Este tema/ ↑ya no se aborda en secundaria/ o sea/ ya ahorita con la reforma actual/ ya no está contenido en secundaria/ se dejó exclusivamente para cuarto/ quinto y sexto de primaria/ todavía en los planes anteriores si estaba considerado// es decir/ estaba contemplado incluso/ en los libros de texto/ incluso/ anteriores pasados/ pero ahorita ya/

prácticamente lo único que se aborda/ ess/ directamente entra a congruencia y a semejanza de figuras/ entonces la parte de simetría se dejó grados anteriores/ en primaria principalmente/ yo estoy en secundaria" (Jesús, comunicación personal, 5 de abril 2021)

Lo anterior es muestra del conocimiento de qué se espera que el estudiante aprenda del tema de simetrías en un determinado nivel escolar, esto es en el cuarto, quinto y sexto de primaria, de acuerdo con las reformas curriculares en el sistema educativo mexicano, categoría (i) del KMLS. Más adelante expresa su conocimiento sobre la simetría y los temas anteriores y posteriores:

> "tú viste el tema de simetría/ esto tiene que ver con estos temas/ con encontrar el punto medio/ con entrar/ por ejemplo/ la bisectriz, la mediatriz/ etc. etc./ entonces/ como que se rompen/ como que se ven como conocimientos aislados/ y entonces/ ↑pero yo lo catalogo como un buen tema para ver en esos grados/ en cuarto quinto y sexto/ sobre todo en sexto ya como preliminar/ para ver los temas de congruencia y semejanza" (Jesús, comunicación personal, 5 de abril 2021)

De esta manera, se infiere el conocimiento de los elementos de las simetrías categoría (ii) del KoT relacionándolos en prospectivas para los grados superiores, categoría (iii) del KMLS tal como se presentan en la Tabla1.

Tabla1**.** Relación entre categorías (i) y (ii) del KMLS y (ii) del KoT

Subdominio	KoT	KMLS	
Categoría	(ii) Definiciones y propiedades	(i) Aprendizajes esperados	(ii) Secuenciación de temas
Indicador	Conoce las simetrías y las conexiones que existen entre los elementos de este tema	Conoce los estándares básicos de competencias matemáticas y/o aprendizajes esperados a desarrollar por los estudiantes en secundaria establecidos en los lineamientos curriculares o criterios públicos de calidad y las reformas educativas.	Conoce la secuenciación del tema de simetrías que se va a enseñar con los temas previos y consecuentes para una determinada tarea.

Asimismo, Jesús para la planeación de clase diseñó actividades teniendo en cuenta el contexto donde viven los estudiantes y está ubicada la escuela para la enseñanza y aprendizaje de las simetrías, al respecto expresó lo siguiente:

> "De que a ellos se les dice ve a traer/ este/ busca algunas cosas que haya en la naturaleza que tengan simetría/ ya tienes idea de qué cosa es/ ahora encuéntralas/ y a ellos les encanta/ entonces dicen vamos/ y empiezan a buscar/ y llegan con arañas/ llegan con hormiguitas// pero estamos partiendo de cosas muy muy/ vivas no?/ de tal que ellos se interesen y vayan encontrando un poquito de/ de sentido/ de eso que van a entender como algo muy abstracto después/ pues que tiene vigencia en su vida cotidiana" (Jesús, comunicación personal, 5 de abril 2021)

De este modo, se puede identificar el conocimiento de Jesús del diseño de actividades en la enseñanza de la simetría, categoría (iii) del KMT. Además, moviliza su conocimiento sobre los aspectos emocionales de los estudiantes en el aprendizaje de este tema, categoría (iv) del KFLM e igualmente su conocimiento sobre las aplicaciones, fenomenología e importancia de las simetrías, categoría (iv) del KoT

Tabla 2. Relaciones entre categoría (iii) del KMT, (iv) del KFLM y (iv) del KoT

Subdominio	KoT	KMT	KFLM
Categoría	(iv) Aplicaciones y fenomenología	(iv) Estrategias, técnicas y tareas	(iv) Aspectos emocionales
Indicador	Conoce situaciones o problemas del contexto y significado de los estudiantes, a los que se puede aplicar las simetrías.	Conoce tipos de tareas desafiantes, en la enseñanza de las simetrías, para propiciar el aprendizaje de los estudiantes	Conoce cómo incluir cosas cotidianas que despiertan la motivación, el interés y expectativas del estudiante con relación al aprendizaje de las matemáticas, específicamente, en las simetrías

De este modo, se han presentado algunos ejemplos de las relaciones identificadas entre el KoT y los subdominios del PCK.

CONCLUSIÓN

Las anteriores relaciones son muestra de que el conocimiento del profesor de matemáticas no está fraccionado en subdominios en un modo literal, por el contrario, los aspectos como los mencionados anteriormente se movilizan casi siempre unos con otros. El conocimiento del profesor de matemáticas es complejo y multidimensional por lo cual son necesarios más estudios que permitan enriquecer y ampliar el conocimiento de las relaciones entre los distintos subdominios. En este sentido, nuestro estudio aporta con caracterizar las relaciones entre los distintos subdominios del modelo MTSK, caso particular, el KoT con los subdominios del PCK.

Referencias

Alsina, C. (2005). Los secretos geométricos en diseño y arquitectura [Material de aula]. Curso Interuniversitario “Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas”. Universidad Politécnica de Catalunya, España. https://imarrero.webs.ull.es/sctm05/modulo3lp/3/calsina.pdf

Advíncula, E., Beteta, M., León, J., Torres, I. y Montes, M. (2021). El conocimiento matemático del profesor acerca de la parábola: diseño de un instrumento para investigación. *Uniciencia, 35*(1), 190-209.

Ball, D., Thames, H. y Phelps, G. (2008). Conocimiento del contenido para la enseñanza: ¿Qué lo hace especial? *Revista de formación docente, 59*(5), 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-Gonzáles, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M (2018). The mathematics teacher’s specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. doi: https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo, J., Contreras, L.C., y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática*. *Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Comares.

Flores, E., Escudero, D. I., y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Fuentes, C. (2020). Uso del Modelo MTSK para la caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en secundaria: El caso de la Proporcionalidad. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16*(59), 33-63.

Godino, J. y Ruiz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Los Autores. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Hernández, M., Meneses, N., Sánchez, Y., Montealegre, G. y Parra, S. (2018). *Simetría axial en figuras planas* [Tesis de maestría]. Funes. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/11767/

Iaderosa, R. y Malara, N. (2000). Acerca de las dificultades encontradas en alumnos de 12-13 años en el aprendizaje de la isometría plana. *Educación Matemática, 12*(2), 63-80.

Morales, M., Aroca-Araujo, A. y Álvarez, L. (2018). Etnomatemáticas y Educación matemática: análisis a las artesanías de Usiacurí y educación geométrica escolar. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 11*(2), 120-141.

Muñoz-Catalán, M., Contreras, L., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. y Climent., N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la RSME, 18*(3), 1801-1817.

Paternina, O., Muñoz, N., Pacheco, E., y Aroca, A. (2020). Simetrías inmersas en el proceso de elaboración de la máscara del torito de Galapa. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación, 11*(1), 141-157. doi: https://doi.org/10.19053/20278306.v11.n1.2020.11689

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de caso* [Tesis de doctorado]. Digibug. Recuperado de https://digibug.ugr.es/handle/10481/35199

Secretaría de Educación Pública. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral.* SEP.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. Londres: The Falmer Press.

Shulman, L. (1986). Aquellos que entienden. El crecimiento del conocimiento en la enseñanza. *Investigador Educativo, 15*(2), 4-14.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Olfos, R., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las ciencias, 36*(2), 105-123. doi: https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2260

Zakaryan, D., y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento de la enseñanza de los números racionales: una ejemplificación de relaciones. *Zetetiké, 24*(3), 301-321. doi: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v24i3.8648095.

COMUNICAÇÕES ORAIS

TEMÁTICA 5

EXTENSÕES DO MTSK

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DE PROFESSORES DE BIOLOGIA EM UM CONTEXTO DE INCLUSÃO EDUCACIONAL

Biology Teacher's Specialized Knowledge in an Educational Inclusion Context

Bitencourt, A. H. C. [a]; Mazer, R. C. [b]; Marques, M. [c]; Luís, M. [d]

[a] Centro Universitário FAMINAS; [b] Universidade do Estado de Minas Gerais; [c] Secretaria de Educação do Estado de Mato; [d] Agrupamento de Escolas José Belchior Viegas

Temática: 5 – Extensões do MTSK

Resumo. As necessidades de melhorias e avanços nas práticas pedagógicas no contexto da Educação Especial vêm sendo discutidas nas últimas décadas visando que o processo de ensino-aprendizagem seja significativo e inclusivo. Nesse contexto inclusivo, o objetivo do estudo foi identificar o conhecimento especializado de quatro futuros professores de Biologia mobilizados em aula teórico-prática com alunos do 5° ano do Ensino Fundamental sobre Biologia Marinha onde fizeram uso de modelos em latonagem e visita em laboratório. Os resultados da aplicação do modelo teórico do Conhecimento Especializado de Professores de Biologia (BTSK) como ferramenta analítica sob os relatos das aulas foram satisfatório quanto às metodologias utilizadas pelos professores em formação inicial.

Palavras-chave. Conhecimento especializado, BTSK, Educação inclusiva, Material didático.

Abstract. The needs for improvements and advances in pedagogical practices in the context of Special Education have been discussed in recent decades aiming at making the teaching-learning process meaningful and inclusive. In this inclusive context, the objective of the study was to identify the specialized knowledge of four future Biology teachers mobilized in theoretical-practical classes with students from the 5th year of Elementary School on Marine Biology, where they made use of models in tinting and laboratory visits. The results of the application of the theoretical model of Biology Teachers' Specialized Knowledge (BTSK) as an analytical tool under the reports of the classes were satisfactory regarding the methodologies used by teachers in initial training.

Keywords. Specialized Knowledge, BTSK, Inclusive education, Courseware.

ENSINO DE BIOLOGIA E A EDUCAÇÃO INCLUSIVA

Nas últimas décadas, em função de novas demandas e expectativas sociais, aliadas aos avanços das ciências e tecnologias, os profissionais da Educação Especial têm se voltado para a busca de novas formas de educação escolar com alternativas menos segregativas de absorção desses educandos pelo sistema de ensino (Glat, 2007). Contudo a inclusão é vista como um desafio para a grande maioria dos profissionais da educação. Sabendo disso, qualquer melhoria apresentada é incontestável em relação ao que era em tempos passados, uma vez que, atualmente, ao ser devidamente aceita pela escola, desencadeia um compromisso com as práticas pedagógicas que favoreçam todos os alunos, ou seja, uma verdadeira mudança na concepção de ensino, visando a uma aprendizagem significativa e inclusiva.

Professores em formação inicial e contínua têm apontado como necessidades formativas a proposição de recursos didáticos que visem facilitar o processo de ensino-aprendizagem permitindo ao aluno correlacionar teoria e prática que lhes assegurará condições para o

Bitencourt, A. H. C., Mazer, R. C., Marques, M., & Luís, M. (2021). Conhecimento especializado de professores de Biologia em um contexto de inclusão educacional. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 305–311). Congresseme.

entendimento dos conceitos, do desenvolvimento de coordenação e habilidades, colaborando, também, para observações e análises acerca do mundo em que vivem (Sarmieri e Fustina, 2004 como citado em Justina e Ferla, 2006); Cavalcante e Silva, 2008).

A inclusão do indivíduo na escola está diretamente relacionada ao seu desenvolvimento social, e este, consequentemente, está interligado à sua capacidade de aprendizagem. No cerne dos alunos especiais, ou seja, com algum tipo de deficiência, é preciso e é direito garantido por lei desde a Constituição Federal em seu Artigo 208º, que exista acesso à recursos específicos que respeitem e englobem as suas deficiências, no sentido de que elas não prejudiquem o processo de absorção do conhecimento, fazendo-se importante a utilização de instrumentos e recursos que auxiliem este processo, por exemplo, os materiais didáticos (Vaz, et al., 2012)

Os materiais didáticos são compreendidos como ferramentas facilitadoras do processo de aprendizagem, sendo que os professores devem analisar e saber reconhecer dentro de cada conteúdo as necessidades específicas dentro do contexto educativo, em paralelo com a necessidade individual dos alunos para que o conteúdo seja direcionado acreditando que no ensino voltado aos deficientes visuais, a noção de representação demanda maior atenção, propondo, assim, a utilização de recursos táteis bem como maquetes e modelos tridimensionais confeccionados ou mesmo disponibilizados nas instituições educacionais (Yoshikawa, 2010).

Ensinar Biologia, para alunos com deficiências especiais, exige de todo corpo docente bastante agilidade para despertar a atenção do aluno e mobilizar o conhecimento, uma vez que a Biologia envolve imagens, símbolos e muita imaginação. Dessa forma, as deficiências não podem ser ignoradas, tendo o professor o papel de buscar formas que facilitem ou que tornem possível o aprendizado do aluno (Santos e Manga, 2009).

Entretanto, a visão da Biologia e das Ciências no cotidiano implica entender como o ambiente em que vive o aluno aparece na sua vida diária, para que o conteúdo a ser ensinado seja mais próximo de sua realidade (Soares, et al., 2018), e o aluno que possui necessidades especiais apresenta maior dificuldade em relacionar a teoria com a realidade sem que haja uma conexão visível.

Assim, o objetivo do estudo é identificar o conhecimento especializado de quatro futuros professores de Biologia mobilizados em uma aula prática sobre Biologia Marinha no contexto de inclusão educacional utilizando materiais alternativos de baixo custo e de fácil acesso.

O tema Biologia Marinha foi escolhido pela professora responsável pelo Projeto de Inclusão Educacional da Universidade do Estado de Minas Gerais UEMG – Unidade Carangola, com intuito de proporcionar aos alunos do curso de Ciências Biológicas a experiência em sala de aula, tanto com aulas teóricas como práticas.

Para o tema escolhido, foram selecionados quatro alunos (licenciandos) para serem os executores do Projeto na escola Walton Batalha Lima que trabalha com a Educação Especial, sendo eles os responsáveis pela elaboração e execução das etapas do Projeto que foram divididas por aula e supervisionadas pela professora.

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DE PROFESSORES DE BIOLOGIA

O modelo teórico do Conhecimento Especializado de Professores de Biologia (*Biology Teacher's Specialised Knowledge* - BTSK) (Luís e Carrillo, 2020) (Figura 1) traz um arcabouço de conhecimentos necessários ao professor quando ensina Biologia. Tais conhecimentos especializados fundamentam-se no domínio do Conhecimento da Biologia (BK) que traz os Conhecimentos sobre os Temas; das Estruturas; e da Natureza das Ciências; e no domínio do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) em que temos os Conhecimentos do Ensino, da Aprendizagem; e dos Padrões de Aprendizagem. Todos esses são chamados de Subdomínios e apresentam suas Categorias.

No centro da figura hexagonal, o BTSK contempla as Crenças que retraram um conhecimento subjetivo e pessoal dos professores de Biologia: Conhecimento sobre a Biologia e o Conhecimento sobre o Ensino e a Aprendizagem da Biologia.

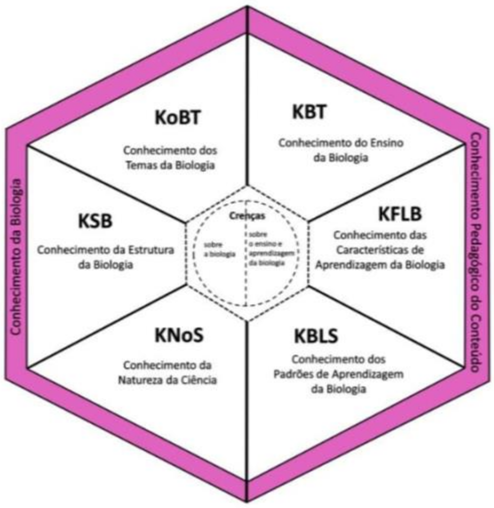


Figura 1. Modelo do BTSK

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Trata-se de uma pesquisa qualitativa (Bogdan e Biklen, 1982; Silva 2013) acerca de um caso de aula prática de ensino e lúdica de modo que os significados são atribuídos pelos sujeitos considerando a subjetividade, o ambiente natural, e o significado.

A coleta dos dados se deu por um recorte de relatos de experiência, descritivo e reflexivo (Daltro e Faria, 2019) onde expõe a atividade de quatro licenciandos de Ciências Biológicas (Formação Inicial) da Universidade do Estado de Minas Gerais UEMG – Unidade Carangola integrantes de um Projeto de Inclusão Educacional com intuito da aproximação da prática docente sendo aplicado na Escola de Educação Especial Walton Batalha Lima, na cidade de Carangola-MG com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental.

Para análise dos dados realizamos a análise de conteúdo (Krippendorff, 2018), com comparações sistemáticas entre os elementos de informação obtidos nos relatos e a descrição do subdominio do Conhecimento do Ensino e suas categorias do marco teórico *Biology Teacher's Specialised Knowledge* – BTSK.

O método utilizado para a confecção das estruturas propostas foi a técnica de *latonagem* também conhecida como *repujado* de metal, que é uma arte específica consistindo em passar uma imagem para o metal em alto relevo e em 2D.

Elaboração do Material Didático

As imagens foram produzidas em folhas de alumínio A4 (210 x 297 mm) com a espessura de10mm. Na primeira etapa, a folha de alumínio foi colocada em cima de uma folha de

"E.V.A.", material macio, ótimo para obter um alto relevo no metal. A primeira etapa consiste em tirar o risco, ou seja, efetuar o desenho marcando-o no metal, boleando com um *boleador* de ponta fina de metal.

Com o desenho já marcado no metal, a segunda etapa consiste em três passos diferentes e simultâneos, bolear o metal entre os riscos do desenho no verso, virá-lo e perfilar o desenho, ou seja, redesenhá-lo e abaixar o relevo indesejado com um *boleador* de ponta reta ou com vários pontos feitos com o mesmo da primeira etapa. Tem que ser feito parte por parte, pedaços pequenos do desenho, pois, se fizer todo o relevo de uma vez, o metal pode ficar muito alto, o que é quase impossível consertar.

Na etapa final, demos uma massa acrílica no fundo do quadro com uma espátula, com intuito de preencher os relevos com massa evitando que amasse ao ser tocado ou manipulado. Após a secagem da massa, os desenhos produzidos foram colados em placas de MDF com molduras, para que na utilização nenhuma criança se machucasse com o metal, e foi utilizada uma cola adesiva (cola de sapateiro) para fixá-lo.

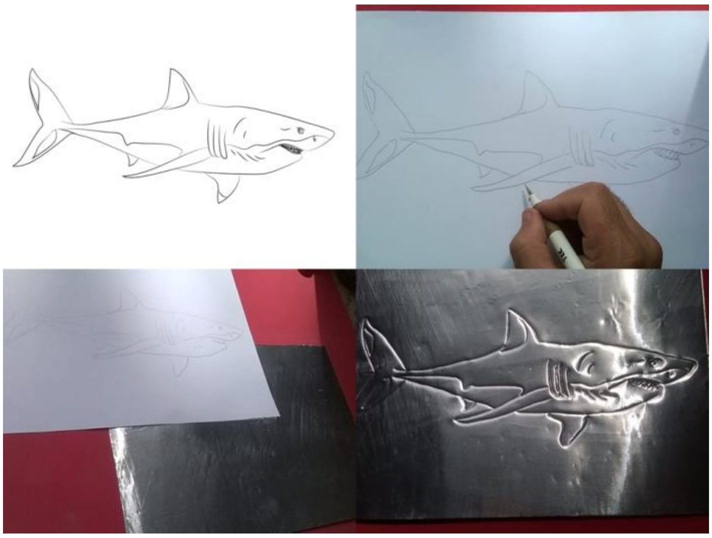


Figura 2. Fabricação desde a escolha do desenho, até o término do trabalho.

Vale ressaltar que os modelos didáticos serviram tanto de base teórica, quanto visual na aula-prática para que através do tato das crianças com deficiência visual, por isso, nem todos os detalhes dos animais foram confeccionados.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A adequação do conteúdo de Biologia Marinha às necessidades especiais dos alunos fizeram que a mobilização dos conhecimentos fossem exploradas de maneiras singulares, conciliando o tema e o ensino às formas lúdicas de ensinar visando a inclusão educacional por meio do projeto.

Na Figura 3 apresentamos nossos resultados trazendo os relatos e as análises das aulas destacando quais Conhecimentos Especializados e suas respectivas Categorias foram revelados sobre o ensino de Biologia Marinha no contexto de inclusão educacional.

Relatos das Aulas
Aula 1 - *apresentação do tema "Biologia Marinha" com uso de slides para que os alunos tivessem o primeiro contato tanto com o tema onde abordamos sobre os Animais Marinhos. Os slides apresentados possuíam imagens, vídeos e músicas didáticas e infantis voltadas ao tema. Após, foi reproduzido o filme "Procurando Nemo" para que fosse retratado de forma didática o oceano e sua fauna e flora, e principalmente, os personagens "Nemo e a Dory", visto que o Nemo possui uma nadadeira menor do que a outra e sofre bullying por este motivo, e a Dory que possui uma doença crônica chamada perda recente de memória. O filme foi apresentado tendo como objetivo principal retratar outras maneiras de enfrentar as dificuldades e barreiras que as deficiências, muitas vezes impõem, e transmitir que o "ser diferente" é normal. Dado que a turma possui uma aluna que é portadora de deficiência visual, todo o conteúdo do filme foi narrado e explicado para ela.*
[KBT1]: Revela o conhecimento do uso de slides como um recurso material digital. [KBT2]: Revela o conhecimento do filme para o ensino sobre os Animais Marinhos assim também como o conhecimento da linguagem ao adaptar o recurso material à necessidade de uma aluna em especial. Categoria: Conhecimento de recursos materiais, de linguagem ou virtuais de ensino associados a um conteúdo da Biologia.
Aula 2 – *foi realizada uma atividade com folhas A4 que possuíam nomes incompletos com os desenhos dos respectivos animais, para que fosse analisada a capacidade dos alunos de interpretação e de correlacionar as imagens aos nomes. Para auxiliar no desenvolvimento da coordenação motora, foram aplicados desenhos relacionados ao fundo mar e atividades com barbantes e cola branca para que eles pudessem desenvolver sozinhos. Dessa forma, é de extrema importância ressaltar que todos os materiais da terceira fase foram adaptados com contornos em relevo feitos com cola colorida, para que a aluna com deficiência visual pudesse sentir, colorir e participar integralmente das práticas.*
[KBT3]: Revela o conhecimento da atividade manipulativa como estratégia de ensino. Categoria: Conhecimento de estratégias, ciclos e sequências de aprendizagem, técnicas e atividades para o ensino de um conteúdo da Biologia.
Aula 3 - *foi a aplicação dos modelos didáticos confeccionados em folhas de alumínio com relevo em 2D de cinco animais importantíssimos e marcantes na fauna marinha, os quais são: a arraia, a baleia jubarte, o polvo, a tartaruga marinha e o tubarão de forma que os alunos que possuem a visão, mas detém alguma deficiência conseguissem ver e analisar os animais, e os alunos que não dispõem da visão pudessem sentir os relevos e áreas marcantes e com o auxílio dos licenciandos conseguissem compreender e descobrir qual era o animal em questão.* 
[KoBT1]: Revela o conhecimento da utilização de modelos com potencial didático. Categoria: Conhecimento de modelos associados ao conteúdo da Biologia. [KoBT2]: Revela o conhecimento de exemplos de animais considerados como espécies-chave do ambiente marinho. Categoria: Conhecimento de conceitos da Biologia e de exemplos associados.

Figura 3. Relatos das Aulas pelos Licenciandos. Fonte: Autores.

Os relatos de experiências dos licenciandos de Ciências Biológicas orientados pela professora responsável pelo Projeto de Inclusão Educacional nos permitiu identificar que em suas práticas durante a Formação Inicial foram mobilizados Conhecimentos Especializados que permearam entre os domínios do Conhecimento da Biologia e do Conhecimento do Conteúdo Pedagógico, sendo este, o domínio com mais expressiva manifestação de conhecimento, principalmente sobre o Conhecimento do Ensino da Biologia que traz definido por Luís e Carrillo (2020) como o Conhecimento das teorias de ensino, o conhecimento de estratégias, atividades, recursos, materiais no contexto do ensino das Ciências e da Biologia em particular.

Entretanto, notamos que a utilização de recursos materiais não foi usada como uma ferramenta paliativa de ensino, pois eles foram adaptados e explorados conforme as peculiaridades da turma, ficando evidente que o uso de tais recursos potencializou o ensino trazendo vantagens a esse processo.

Quando relatam na Aula 2 conhecer as expectativas de aprendizagem relacionadas ao conteúdo de Biologia Marinha ao analisar a capacidade de interpretação de imagens dos alunos e associá-las ao nome dos respectivos animais, vemos nesse relato "Indício de Conhecimento" que são episódios que demonstram uma superficialidade de um determinado conhecimento, sugerindo que o sujeito possa saber mais sobre o que foi exposto (Moriel Junior e Carrillo, 2014 como citado em Marques, 2020) havendo assim, a necessidade futura de aprofundar na investigação a respeito desse conhecimento ser uma evidência do Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem da Biologia (KBLS).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A elaboração do material didático trouxe, além da inovação em sala de aula para o ensino da Biologia, acessibilidade à aluna com deficiência visual, e ainda sobre o contexto inclusivo enfatizamos a sensibilidade no processo de ensino, do reconhecimento e utilização do filme que aborda personagens da fauna marinha com necessidades especiais que aproximou a realidade diária dos alunos aos personagens da história do filme.

Ressaltamos que o cerne deste artigo foi o uso de recursos materiais como um potencial recurso de ensino principalmente no contexto inclusivo e se deve as suas características como estruturas em alto relevo 2D, material leve, de fácil acesso e baixo custo, características essas que provavelmente outros recursos materiais não fossem contemplar.

O modelo didático confeccionado em 2D contribui não só ao deficiente visual, mas sim a todos sem exclusão. Porém, para um melhor aproveitamento do material recomenda-se a contribuição de um auxílio-mediador para direcionar os alunos considerando suas peculiaridades e à limitação do material didático por ser em 2D.

Contudo, nos relatos apresentados e que circunscrevem a experiência das aulas do Projeto de Inclusão Educacional podemos identificar a mobilização de Conhecimentos Especializados de Biologia que compõe o modelo teórico do BTSK e identificar componentes pertencentes às suas Categorias.

Sendo assim, o uso de recursos materiais alternativos que possibilitem o acesso ao ensino se tornam fundamentais e totalmente vantajosos na educação de base e inclusiva quando direcionado aos conhecimentos que os professores têm ou devem ter, implicando assim, futuros alcances em contextos educacionais diversos à aplicação do BTSK como ferramenta.

Como ações futuras, pretendemos incluir às análises todas as aulas teóricas e práticas pertencentes ao Projeto à luz do BTSK.

Referências

Bogdan, R. C. e Birten, S. K. (1982). *Qualitative research for education; an introduction for to theory and methods.* Boston, .Allyn and Bacon, pp. 27-30.

Cavalcante, D. D. e Silva, A. de F. A. de. (2008). *Modelos didáticos e professores: concepções de ensino-aprendizagem e experimentações*. In: XIV Encontro Nacional de Ensino de Química, Curitiba, UFPR, Julho de 2008. Disponível em: http://www.quimica.ufpr.br/eduquim/eneq2008/resumos/R0519-1.p

Dalto, M. R.; Faria, A. Amélia. (2019) Relato de Experiência: uma narrativa científica na pós-modernidade. Estudos e Pesquisas em Psicologia. Rio de Janeiro, v 19, n.1, pp. 223-237.

Glat, R.(org.) (2007). *Educação inclusiva: cultura e cotidiano escolar.* Rio de Janeiro: 7Letras. (Questões atuais em Educação Especial IV).

Justina, L.A.D. e Ferla, M.R. (2006) *A utilização de modelos didáticos no ensino de genética – exemplo de representação de compactação do DNA eucarioto*. Arq. Mudi. Maringá/PR.

Krippendorf, K. (2018). *Content analysis: An introduction to its methodology*. Los Angeles: Sage Publications,.

Luís, M., e Carrillo, J. (2020). O modelo do conhecimento especializado do professor de Biologia (btsk). *Revista De Ensino De Ciências E Matemática, Luís, M., e Carrillo, J. (2020). O modelo do conhecimento especializado do professor de Biologia (btsk).11(7)*, pp. 19-36. doi:doi.org/10.26843/10.26843/rencima.v11i7.2788

Marques, M. (2020). *Conhecimento Especializado de Professores de Biologia: análise de relatos de prática no Ensino Médio (Tese de mestrado).* Mato Grosso: Cuiabá: Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologias do Estado de Mato Grosso.

Silva, E. A. (2013). As metodologias qualitativas de investigação nas ciências socias. *Revista Angolana de Sociologia*, pp. 77-99.

Santos, C. R. dos e Manga, V. P. B. B. (2009). Deficiência visual e ensino de Biologia: pressupostos inclusivos. *Revista FACEVV*, Vila Velha/ES, n. 3, pp. 13-22.

Soares, Z. T. Soares, E. F. e Miranda, R. S. A. (2017). Utilização de materiais recicláveis como proposta pedagógica para o ensino de ciências biológicas e química. *Revista Educação Ambiental em Ação*. Disponível em: http://www.revistaea.org/pf.php?idartigo=2970.

Yoshikawa, R. C. S.(2010). *Possibilidades de aprendizagem na elaboração de materiais didáticos de Biologia com educandos deficientes visuais (Tese de mestrado)*. São Paulo: Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Vaz, J. M. C.; Paulino, A. L. S.; Bazon, F. V. M.; Kiill, K. B.; Orlando, T. C.; Reis, M. X.e Mello, C. (2012).Material Didático para Ensino de Biologia: Possibilidades de Inclusão. In: *Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências* 12 (3).

EXTENSÃO DO MTSK NO ÂMBITO DO TSK GROUP - BRASIL

Extension of MTSK in the Scope of the TSK Group - Brazil

Carneiro, K. I. L. R [a], Lima, S. S. [b]; Marques, M. [c], Moreira, J. S. S. [d], Soares, S. T. [e]

[a] Secretaria de Educação do Estado de Mato Grosso; [b] Instituto Federal de Mato Grosso;
[c] Secretaria de Educação do Estado de Mato Grosso; [d] Instituto Federal de Mato Grosso;
[e] Instituto Federal de Mato Grosso

Temática: 5 – Extensões do MTSK

Resumo. Há quase uma década, os estudos sobre o conhecimento especializado de professores ganharam destaque internacional. Seu início se deu na Espanha, com a elaboração do modelo teórico para a Matemática, o MTSK. Sua primeira extensão foi para a Biologia (BTSK). Logo após, foram elaborados os modelos teóricos do PTSK (Física) e CTSK (Química) por pesquisadoras do TSK Group e, também neste grupo de pesquisa, foram realizadas as validações dos três modelos teóricos oriundos da extensão do MTSK. O objetivo desta pesquisa é apresentar e quantificar as produções das Extensões do MTSK desenvolvidas no TSK Group, por meio de dissertações. O resultado levantado foi de 10 (dez) dissertações. A divulgação das pesquisas realizada pelo TSK Group, seus focos e metodologias trazem possibilidades de envolver outros pesquisadores na esfera do conhecimento especializado de professores.

Palavras-chave. Extensão do MTSK, Grupo de pesquisa, Modelos teóricos, Ciências.

Abstract. For nearly a decade, studies on the specialized knowledge of teachers gained international prominence. Its beginning was in Spain, with the elaboration of the theoretical model for Mathematics, the MTSK. Its first extension was to Biology (BTSK). Soon after, the theoretical models of PTSK (Physics) and CTSK (Chemistry) were elaborated by researchers from the TSK Group and, also in this research group, validations of the three theoretical models arising from the extension of the MTSK were carried out. The goal of this research is to present and quantify the productions of the MTSK Extensions developed in the TSK Group through dissertations. The result raised was 10 (ten) dissertations. The dissemination of research carried out by the TSK Group, its focuses and methodologies bring possibilities of involving other researchers in the sphere of specialized knowledge of teachers.

Keywords. Extension of MTSK, Research Group, Theoretical Models, Sciences.

TRAJETÓRIA DA EXTENSÃO DO MTSK

Os estudos sobre o Conhecimento Especializado de Professor de Matemática (MTSK) tiveram início em 2011, de forma interna, e foram coordenados pelo grupo do Seminário de Pesquisa em Educação Matemática (SIDM) da *Universidad* de Huelva na Espanha. Algumas pesquisas sobre o tema foram publicadas na Espanha, em congressos nacionais, em 2012, contudo a divulgação internacional do modelo teórico ocorreu no ano seguinte, conforme assevera Carrillo (2015). Atualmente, os membros do SIDM são pesquisadores que desenvolvem e divulgam pesquisas relacionadas ao MTSK, e o grupo de pesquisa é composto por membros ligados às diversas instituições de ensino distribuídas entre os países da Europa e da América Latina.

A partir das pesquisas realizadas por Shulman (1986, 1987) sobre o Conhecimento Pedagógico de Conteúdo (PCK) e da elaboração do modelo de Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) realizada por Ball *et al.,* (2008), surge o MTSK com o objetivo de analisar o conhecimento especializado de professores de matemática, sendo esse modelo o mais completo até o momento por estar centrado nos conhecimentos e na disciplina de matemática, considerando que os modelos mencionados anteriormente não enfatizaram as particularidades das disciplinas e do

Carneiro, K. I. L. R, Lima, S. S., Marques, M., Moreira, J. S. S., & Soares, S. T. (2021). Extensão do MTSK no âmbito do TSK Group - Brasil. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 312–319). Congresseme.

ensino. Conforme descreveu Carrillo *et al.* (2018) "... o modelo MKT, e o trabalho de Rowland *et al.* (2009), focam sua atenção na prática realizada em classe, ignorando o conhecimento que os professores podem trazer em jogo ao realizar qualquer outro tipo de atividade como professor" (p.3).

Com o avanço dos trabalhos sobre o MTSK e a chegada das pesquisas ao Brasil, em 2015, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso (IFMT) *campus* Cuiabá, foi criado o Grupo Interdisciplinar de Ensino de Matemática e Ciências da Natureza (GIMC) (Moral, 2018; Lima, 2018; Soares, 2019; Moreira *et al*., 2020) registrado no Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), o qual teve o nome alterado em 2019 para TSK *Group – Teacher's Specialized Knowledge Research Group* (Grupo de Pesquisa Conhecimento Especializado de Professores) (Marques, 2020), e é formado por docentes, discentes e egressos da Linha de Pesquisa: Ensino de Matemática, Ciências Naturais e suas Tecnologias, do Programa de Pós-Graduação em Ensino IFMT /UNIC (PPGEn/Brasil) e coordenado, atualmente, pelo Prof. Dr. Jeferson Gomes Moriel Junior.

As pesquisas realizadas no TSK *Group* não só estão relacionadas à disciplina da matemática, mas assim como às disciplinas das ciências (Biologia, Física e Química), da Língua Portuguesa, e também ao uso da Inteligência Artificial como ferramenta analítica do conhecimento especializado. A essa dispersão da pesquisa sobre o conhecimento especializado de professores às outras áreas chamamos de "Extensões do MTSK".

Desse modo, o objetivo desta pesquisa é apresentar e quantificar as produções das Extensões do MTSK desenvolvidas no TSK *Group*, por meio das produções das dissertações.

ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO

Trata-se de uma pesquisa qualitativa e quantitativa (Creswell & Clarck, 2013), com objetivo de caráter exploratório, visto que teve o interesse no levantamento de dados de um determinado grupo de pesquisa.

A classificação quanto à técnica para coleta de dados foi de pesquisa documental (Gil, 2002), uma vez que o levantamento dos dados foi realizado a partir do Banco de Dados do TSK *Group*. As informações coletadas nos bancos de dados contornam as informações principais acerca das produções dos membros do grupo, como: dissertações, artigos científicos, resumos simples e resumos expandidos.

Para cumprimento das normas desse artigo delimitamos que nossos dados seriam trabalhados em cima do item "dissertações", na qual foram levantadas as seguintes informações: 1. Área; 2. Ano da defesa das dissertações; 3. Modelo; 4. Autor; 5. Título das dissertações; 6. Objetivos, e; 7. Coleta de dados.

Os dados coletados foram trabalhados numericamente para análise quantitativa, visando representar o perfil e avanços do TSK *Group*.

RESULTADOS

As Extensões do MTSK no Brasil teve seu início no grupo TSK *Group* em 2018 com a proposição do modelo do Conhecimento Especializado de Professores de Física (PTSK) (Lima, 2018); seguida pela proposição do modelo do Conhecimento Especializado de Professores de Química (CTSK) (Soares, 2019), o que explica as produções das próximas dissertações, que só aconteceram em 2020.

Ressaltamos que o início das Extensões do MTSK deu-se em Portugal com o modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Ciências (Luís *et al.*, 2015), que mediante às limitações da abrangência da ciência "[...] a epistemologia de uma ciência difere da epistemologia de outra; não é possível reduzir o conhecimento científico a um esquema epistemológico único." (Bellini, 2007, p. 4 *apud* Luís *et al.*, 2021), certificou-se a necessidade de separar cada uma das disciplinas biologia, física e química em modelos distintos. Diante disso, iniciou-se a proposição do modelo Conhecimento Especializado de Professores de Biologia (BTSK) (Luís, *et al.*, 2017) e, em 2020, no TSK *Group*, houve as primeiras dissertações como forma de validação tanto do BTSK como dos modelos que foram propostos pelo TSK *Group*, PTSK e CTSK (Figura 1).

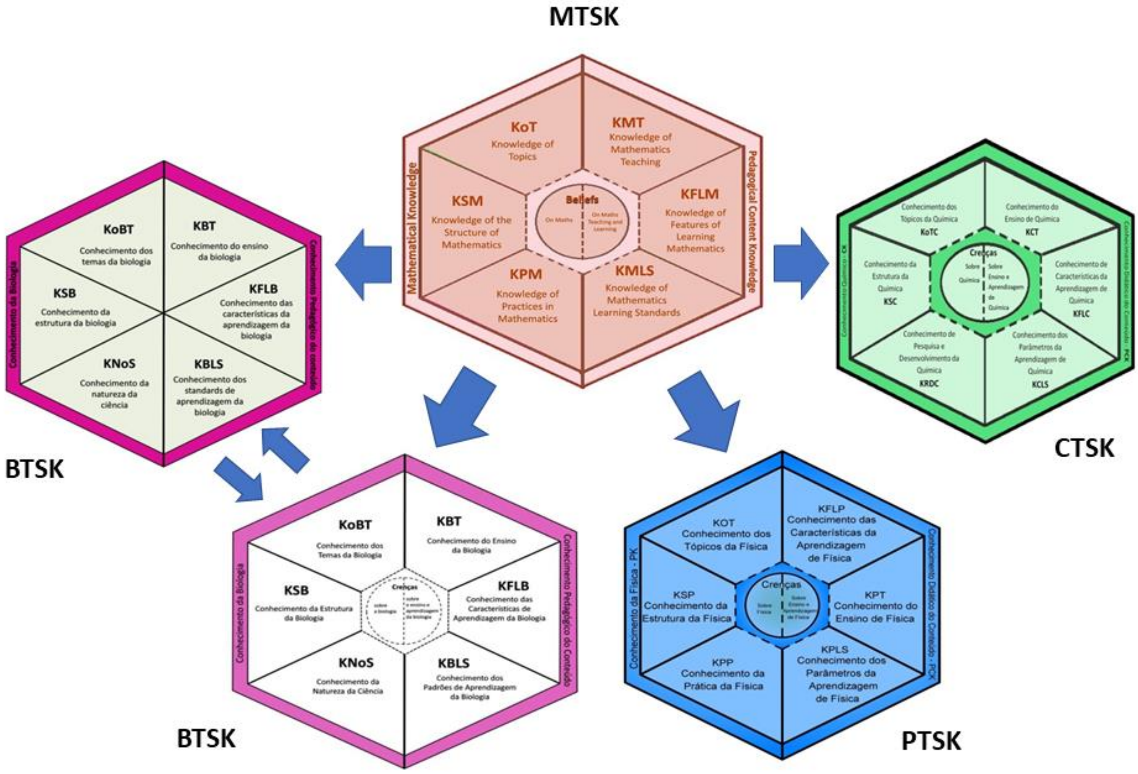


Figura 1. Modelos das Extensões do MTSK (Carrillo, *et al.*, 2014) para os modelos da Biologia (Luís *et al*., 2017; Luís & Carrillo, 2020), Física (Lima, 2018) e Química (Soares, 2019).

Elaborada pelos Autores (2021).

O resultado levantado a partir do espelho do Banco de Dados do TSK *Group* foi de 10 (dez) dissertações produzidas, a partir de 2018, a maio de 2021 sobre as Extensões do MTSK no TSK *Group*, sendo 3 (três) da área da física, 3 (três) da área da química; 3 (três) da área da biologia e 1 (uma) da área da Inteligência Artificial, conforme apresentado na tabela 1, 2, 3 e 4 e na figura 2. Ressaltamos que as pesquisas com a língua portuguesa não entra nos nossos resultados por não fazer parte do quesito "dissertações" do Banco de Dados.

Tabela 1. Levantamento dos dados do TSK *Group* na área de Física

Disciplina Ano Modelo Autor(a)	**Título da Dissertação**	**Objetivo**	**Coleta de Dados**
Física 2018 PTSK Lima, S. S.	Conhecimento Especializado de Professores de Física: Uma Proposta de Modelo Teórico	Propor um modelo do conhecimento especializado de professores de física que tenha como referencial teórico a base conceitual do MTSK.	PaP-eR
Física 2020 PTSK Lino, C. D. S. R.	Conhecimento Especializado de Professores de Física (PTSK): Análise Documental de uma Licenciatura em Ciências da Natureza	Identificar os elementos do PTSK presentes em produções acadêmicas e publicações de egressos do curso de licenciatura em ciências da natureza do IFMT – SVC.	Artigos, Projeto Pedagógico do Curso e Trabalhos de Conclusão de Cursos.
Física 2020 PTSK Magalhães, C. K. O.	Conhecimento Especializado de Professores de Física Mobilizados em Episódios de Lançamento de Foguetes.	Categorizar os conhecimentos especializados de professor de Física em função do ensino do lançamento de foguetes e identificar conexões.	PaP-eR

Fonte: Banco de Dados do TSK *Group.*

Elaborada pelos Autores (2021).

Tabela 2. Levantamento dos dados do TSK *Group* na área de Biologia

Área Ano Modelo Autor(a)	**Título da Dissertação**	**Objetivo**	**Coleta de Dados**
Biologia 2020 BTSK Marques, M.	Conhecimento Especializado de Professores de Biologia: Análise de Relatos de Prática no Ensino Médio	Caracterizar o conhecimento especializado para ensinar biologia e identificar as conexões do conhecimento.	PaP-eR
Biologia 2020 BTSK Carneiro, K. I. L. R.	O Tema Crise Climática nos Livros Didáticos de Biologia à Luz do Conhecimento Especializado de Professores de Biologia	Caracterizar o conhecimento especializado de professores biologia sobre o tema mudanças climáticas presente nos livros didáticos da área.	Livros Didáticos
Biologia 2020 BTSK Dahmer, C. I.	As práticas docentes em diálogo com a alfabetização científica em três escolas de ensino médio em tempo integral em mato grosso na ótica do conhecimento especializado do professor	Compreender quais conhecimentos especializados do professor a ensinar e para ensinar contribui para a Alfabetização Científica dos estudantes, sob a perspectiva do BTSK.	Observação de aulas.

Fonte: Banco de Dados do TSK *Group.*

Elaborada pelos Autores (2021).

Tabela 4. Levantamento dos dados do TSK *Group* na área de Química

Área Ano Modelo Autor(a)	**Título da Dissertação**	**Objetivo**	**Coleta de Dados**
Química 2019 CTSK Soares, S. T. C.	Conhecimento Especializado de Professores de Química – CTSK: Proposta de Modelo Teórico	Propor um modelo teórico capaz de descrever o conjunto de conhecimento especializado de professores de química, a partir do MTSK com intuito de diminuir a desconexão do conhecimento científico com o pedagógico.	PaP-eR
Química 2021 CTSK Floriano, L. S.	Conhecimento Especializado de Professores de Química (CTSK): um estudo de caso do ensino de Termoquímica nas práticas de dois professores de Cuiabá – MT	Caracterizar os conhecimentos especializados mobilizados por professores de Química para ensinar Termoquímica no ensino médio.	Observação não participante de aulas.
Química 2021 CTSK Martins, J. E. A.	Conhecimento Especializado de Professores de Química (CTSK): estudo de uma experiência de ensino sobre hidrocarbonetos	Caracterizar os conhecimentos especializados mobilizados por uma professora de Química no ensino de hidrocarbonetos, tendo por referência a base conceitual do CTSK e avaliar as conexões entre os conhecimentos químico e didático do conteúdo mobilizados.	Observação não participante de aulas.

Fonte: Banco de Dados do TSK *Group.*

Elaborada pelos Autores (2021).

Tabela 4. Levantamento dos dados do TSK *Group* na área de Inteligência Artificial (I.A.).

Área Ano Modelo Autor(a)	**Título da Dissertação**	**Objetivo**	**Coleta de Dados**
I.A. 2020 I.A. Mascarenhas, T. A. T.	Aplicação de Algoritmos de Aprendizado de Máquina na Classificação de Conhecimentos Especializados de Professores de Física	Analisar a eficácia dos algoritmos de aprendizado de máquina utilizados na classificação automática de conhecimentos especializados de professores de física.	Dissertação Lima, 2018

Fonte: Banco de Dados do TSK *Group.*

Elaborada pelos Autores (2021).

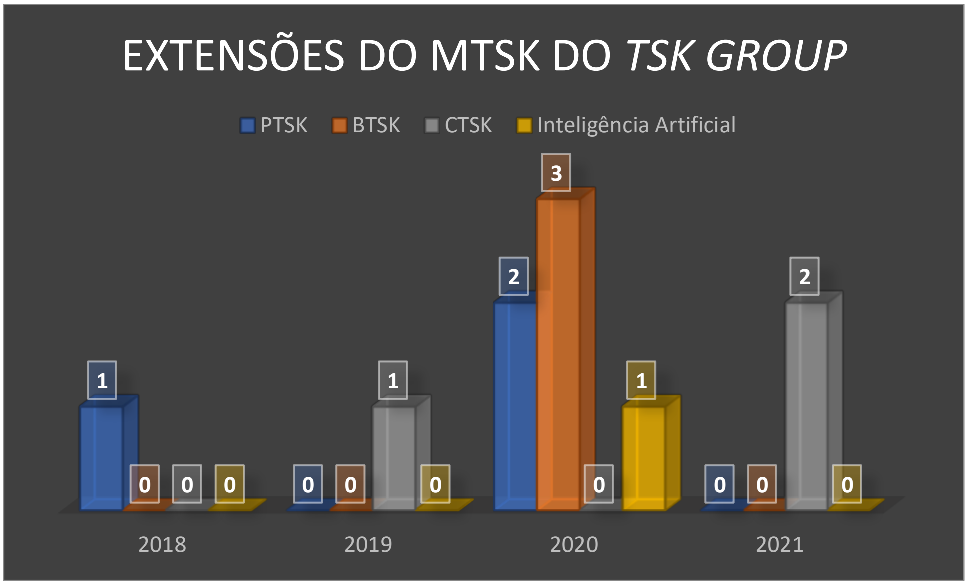


Figura 2. Tratamento de dados das dissertações produzidas no TSK *Group*

Elaborado pelos Autores (2021).

O principal foco observado nas pesquisas após a proposição dos modelos, PTSK, CTSK e BTSK, é a caracterização de conhecimentos de professores em episódios de ensino que abordam distintos conteúdos e situações de ensino.

Destaca-se, por sua originalidade e potencialidade, a pesquisa que utilizou a Inteligência Artificial como ferramenta de análise e com o objetivo de analisar a eficácia dos algoritmos de aprendizado de máquina utilizados na classificação automática de conhecimentos especializados de professores de física. Esta pesquisa apresentou uma confiabilidade de 90% para identificação e categorização dos conhecimentos em episódios de ensino nos domínios do PTSK. Entende-se que este trabalho pode ser aprimorado e auxiliar na análise qualitativa dos conhecimentos de professores para ensino de tópicos específicos para os demais modelos, como por exemplo, auxiliando na construção de banco de dados que podem direcionar ações formativas, além de organizar e agilizar as análises.

Vale ressaltar, ainda, que os modelos, por sua riqueza em informações contidas, possibilitam o trabalho com diferentes instrumentos de coletas de dados, conforme evidenciado nas tabelas 1 a 4, onde foram utilizados seis diferentes instrumentos para validação dos conhecimentos das extensões dos modelos. Considerando que esta área é recente no âmbito científico, muitos estudos podem ser desenvolvidos tanto para validação quanto para agregar mais detalhes aos modelos atuais.

CONCLUSÃO

Podemos concluir que os estudos possibilitaram quantificar as produções das dissertações na temática das Extensões do MTSK no âmbito do grupo de pesquisa do TSK *Group* no Brasil. Esses dados explanados nesta pesquisa permitem apresentar não apenas o que já foi produzido como elucidar e fundamentar futuras pesquisas.

Ressaltamos que além do pioneirismo das proposições para os modelos de Física e Química, o TSK *Group* foi o berço para a inovação metodológica quanto ao uso de PaP-eRs na caracterização de Conhecimentos Especializados de Professores; na utilização da

Inteligência artificial como ferramenta para identificação de conhecimentos especializados.

Diante disso, salientamos que as pesquisas por parte dos investigadores integrantes deste grupo de pesquisa estão sendo desenvolvidas com a utilização de outras metodologias (empíricas) e aplicadas a diferentes sujeitos.

Essas novas perspectivas do grupo possibilitarão ampliar as pesquisas em andamento além de agregar novos olhares sobre os modelos propostos.

Referências

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of teacher education,* 59 (5), 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras-González, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., & Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.147998.

Carrillo. J. (2015). Panorámica de la investigación con MTSK en el mundo. *Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didactica de la Matemática de la Universidad de Huelva*. 15 y 16 de Septiembre 2015. Huelva, Espanha. 106 p.

Creswell, J. W., Clarck, V. L. P. (2013). *Pesquisa de Métodos Mistos*. 2ª ed. São Paulo: Penso. 288 p.

Gil, A. C. (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002. 175 p.

Lima, S. S. (2018). *Conhecimento especializado de professores de Física: Uma proposta de modelo teórico*. (Dissertação de Mestrado). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso, Cuiabá, Brasil. https://www.researchgate.net/publication/332034659.

L Luís, M., Monteiro, R., Carrillo, J. (2017). Conhecimento Especializado do Professor Quando Ensina Biologia e Matemática. Livro de Resumos do XVII Encontro Nacional de Educação em Ciências, XVII ENEC, I Seminário Internacional de Educação em Ciências, I SIEC - Educação em Ciências em múltiplos contextos. Viana do Castelo, Portugal. Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Luís, M., & Carrillo, J. (2020). O modelo do conhecimento especializado do professor de Biologia (btsk). *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 11(7), 19-36. https://doi.org/10.26843/10.26843/rencima.v11i7.2788.

Luís, M., Soares, S., Lima, S., Marques, M. (2021). Desenvolvimento dos Modelos de Conhecimento Especializado de Professores de Biologia, Física e Química. *Revista Multidisciplinar*, 3 (1), 33-53.

Marques, M. (2020). *Conhecimento especializado de professores de Biologia: Análise de relatos de prática no Ensino Médio*. (Dissertação de Mestrado). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso, Cuiabá, Brasil. http://ppgen.cba.ifmt.edu.br/media/filer_public/6e/06/6e06c8d2-abe3-4e1f-a0c3-3a0f4dffa3f8

Moral, G. C. Y. (2018). *Conhecimento especializado de professores de Matemática mobilizados em um contexto de planejamento de ensino de divisões de frações por meio de resolução de problemas.* (Dissertação de Mestrado). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso, Cuiabá, Brasil.

Moreira, J., Marques, M., Evangelista, E. (2020). Conhecimento especializado de professores de Língua Portuguesa PLTSK: transposição direta do MTSK. *Research, Society and Development*, v. 9, n. 1. DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i11.9513.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Education Researcher*, 15 (2), 4 - 14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–22.

Soares, S. T. (2019). *Conhecimento especializado de professores de Química – CTSK: Proposta de modelo teórico.* (Dissertação de Mestrado). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso, Brasil. http://ppgen.cba.ifmt.edu.br/media/filer_public/a9/34/a9340feb-fba8-4403-90c1-86e1ea9b85a4

EL PROFESOR, LA TAREA Y LAS HERRAMIENTAS EN LA RELACIÓN ETM-MTSK

Teacher, task and tools in ETM-MTSK relationship

Espinoza-Vásquez, G. [a]; Verdugo-Hernández, P. [b]; Henríquez-Rivas, C. [c]

[a] Universidad Alberto Hurtado; [b] Universidad Talca; [c] Universidad Católica del Maule

Temática: 5 – Extensiones del MTSK

Resumen. La relación entre el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) y el Conocimiento Especializado del profesor de Matemática (MTSK) se muestra como un terreno fértil para profundizar en la práctica del profesor y en su conocimiento. En este trabajo se reúnen las investigaciones que han avanzado en esta relación y se muestra el rol que ellas han asignado al profesor y a la tarea matemática al conectar el ETM y el MTSK. Se trata de una revisión documental en la que se incluyen los trabajos entre el 2015 a la fecha que usan ambos modelos simultáneamente, destacando sus principales resultados. Finalmente, se presentan algunas ideas abiertas que permiten proyectar investigaciones en esta área.

Palabras clave. Espacio de Trabajo Matemático (ETM), Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK), conexión entre teorías, complementariedad.

Abstract. The relationship between the Mathematical Work Space (ETM) and the Mathematics teacher's Specialized Knowledge (MTSK) is shown to be fertile ground to deepen the teacher's practice and knowledge. This work brings together the research that has advanced in this relationship and shows the role that they have assigned to the teacher and to the mathematical task by connecting the ETM and the MTSK. It is a documentary review that includes works between 2015 to date that use both models simultaneously, highlighting their main results. Finally, some open ideas are presented that allow projecting research in this area.

Keywords. Mathematical Working Spaces (MWS), Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MWS), networking theories, complementarity.

INTRODUCCIÓN

La labor del profesor de matemáticas se ha estudiado desde diversas perspectivas, por ejemplo, la resolución de tareas matemáticas desde el Espacio de Trabajo Matemático (ETM – Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016) y su conocimiento asociado al quehacer docente, en particular, desde el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK – Carrillo *et al.*, 2018). Cada perspectiva interpreta la práctica del profesor y busca dar respuestas a las preguntas que cada una de ellas realiza desde sus premisas epistemológicas. Pese a que ETM y MTSK tienen orientaciones diferentes, ha sido posible conectarlos, relacionando sus componentes teóricos, cuando se estudia el quehacer del profesor (e.g. Verdugo-Hernández y Espinoza-Vásquez, 2018). En este sentido, con la conexión teórica se pretende, por una parte, robustecer el análisis que se puede hacer con cada uno de los modelos y, por otro lado, abordar preguntas más amplias que puedan ser abordadas de ambas perspectivas en conjunto.

De acuerdo a Maier y Beck (2001) y Radford (2008), las teorías se caracterizan por permitir plantear preguntas sobre un fenómeno, abordar una metodología definida y elaborar respuestas a las preguntas planteadas, aspectos que son identificables en los modelos MTSK y ETM, por lo que pueden ser considerados como teorías al hablar de

Espinoza-Vásquez, G., Verdugo-Hernández, P., & Henríquez-Rivas, C. (2021). El profesor, la tarea y las herramientas en la relación ETM-MTSK. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 320–327). Congresseme.

conexión entre ellos. Esta conexión ha sido tema de estudio desde el simposio ETM4 (Gómez-Chacón, Escribano, Kuzniak y Richard, 2015), en donde se inicia el diálogo y se proyecta hacia la complementariedad ETM-MTSK.

Los trabajos posteriores a ese congreso profundizan en la relación ETM-MTSK y en la conexión entre sus componentes particulares. Por ejemplo, en Espinoza-Vásquez, Zakaryan y Ribeiro (2018) se avanza en cómo el MTSK incide en la estructura del ETM idóneo y cómo este idóneo puede ser afectado por los ETM personales de los estudiantes. Otros trabajos establecen relaciones estrechas entre algunas componentes de cada modelo (e.g. Henríquez-Rivas y Espinoza-Vásquez, 2018). Las investigaciones sobre la relación ETM-MTSK atienden a las preguntas abiertas planteadas en Gómez-Chacón *et al*. (2015), las que han servido de referencia para abordar la conexión. En esta línea, el trabajo de Verdugo-Hernández, Espinoza-Vásquez y Carrillo (en revisión), profundiza en el estudio del uso de herramientas en la resolución de una tarea matemática, mostrando la complementariedad de los modelos en su análisis, lo cual será expuesto más adelante. El propósito de este escrito es mostrar algunos avances en la conexión ETM-MTSK y cuáles son los elementos que permiten establecer dicha relación.

MARCOS TEÓRICOS

Con el fin de comprender las relaciones que aquí expondremos, en esta sección presentamos los componentes teóricos de cada modelo. Presentamos sucintamente la organización del MTSK y, con algo más de profundidad, el modelo ETM.

El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática – MTSK

El MTSK se propone como un modelo analítico para estudiar el conocimiento y la práctica del profesor (Carrillo *et al.*, 2018). Este modelo se contemplan dos dominios para el conocimiento: el Conocimiento Matemático (MK) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), además se incluye un dominio para las Creencias sobre la Matemática, su enseñanza y su aprendizaje.

El dominio del Conocimiento Matemático (MK) reúne el conocimiento profundo de la matemática como conocimiento disciplinar (Conocimiento de lo temas - KoT), la forma en que los temas se conectan (Conocimientos de la Estructura Matemática - KSM) y cómo se produce el conocimiento matemático (Conocimiento de la práctica Matemática - KPM).

Por su parte, el Dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) considera el contenido matemático que condiciona a la enseñanza y al aprendizaje de la matemática. El PCK contempla el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS).

Espacio de Trabajo Matemático – ETM

El modelo ETM (Kuzniak *et al.*, 2016) introduce dos planos: el plano epistemológico que está constituido por la componente del referencial (formado por las propiedades, teoremas y definiciones), del representamen (signos semióticos) y del artefacto (que pueden ser materiales o simbólicos). El plano cognitivo está constituido por la componente de visualización (relativa a la representación del espacio y al soporte material), de construcción (que depende de los instrumentos y técnicas asociadas) y de prueba (apoyada en el proceso discursivo de validación, basados en el referencial teórico). Estos planos se conectan mediante tres tipos de génesis (Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier, 2016):

- Una génesis instrumental, la cual cobra sentido cuando ciertas herramientas (simbólicas o instrumentales) conduzcan a un resultado, ya sea hacia el artefacto o construcción.
- Una génesis semiótica, la cual cobra sentido cuando ciertos signos asociados con la representación semiótica conduzcan a un resultado, ya sea hacia la visualización o al representamen.
- Una génesis discursiva, la cual cobra sentido cuando ciertos definiciones o propiedades asociadas a lo discursivo conduzcan a un resultado, ya sea a la prueba o al referencial.

Las componentes, génesis y planos del ETM, son comprendidos como un todo articulado por medio de la resolución de una tarea, es ésta la que hace vivir al ETM generando posibles articulaciones entre sus partes.

El ETM distingue tres tipos de espacios (Gómez-Chacón *et al*., 2016): el *ETM de referencia,* que se define sólo sobre la base de criterios matemáticos; el *ETM idóneo*, que consiste en el acondicionamiento y organización en una perspectiva para la enseñanza con el fin de convertirlo en un espacio de trabajo para una institución educativa dada; y el *ETM personal*, en que cada individuo desarrolla con sus propios conocimientos matemáticos y capacidades cognitivas una tarea matemática. La tarea matemática, si bien no es parte del ETM, es su razón de ser al permitir que el trabajo matemático se desarrolle.

Por otro lado, en el plano epistemológico, se ha definido la noción de *herramienta*, (Kuzniak *et al*., 2016) para referirse a aquellas componentes que pueden ayudarnos a resolver una tarea y que se asocian con el plano cognitivo alguna de sus génesis. Según los autores se identifican tres tipos de herramientas: las *Herramientas semióticas* como herramientas no materiales para operar sobre representaciones semióticas de objetos matemáticos, las *Herramientas tecnológicas* como herramientas de dibujo o técnicas rutinarias basadas en algoritmos o calculadoras con algoritmos de cálculo implementados y las *Herramientas teóricas*, que corresponden a razonamiento basado en la lógica y en las propiedades de los objetos matemáticos, las cuales pertenecen al referencial de la tarea que deseamos resolver.

Posteriormente, Verdugo-Hernández (2018) incorpora las *Herramientas operacionales*, que se refieren a aquellas herramientas teóricas utilizadas para resolver cierta tarea, pero que no forman parte del referencial teórico al cual pertenece dicha tarea.

Finalmente, el objetivo del MTSK es estudiar el conocimiento y práctica del profesor de matemáticas en el contexto de la enseñanza, considerando la integración de conocimientos de los diferentes dominios y subdominios, mientras que el ETM busca estudiar el trabajo matemático motivado por la resolución de una tarea. Pese a estas orientaciones diferentes, el MTSK como el ETM proporcionan una mirada sobre ciertos fenómenos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, lo que posibilita indagar en la conexión entre ambos modelos.

METODOLOGÍA

Para presentar los trabajos que utilizan los modelos ETM y MTSK, y que permitan ahondar y ampliar el objeto de estudio, se ha realizado una revisión documental (Gómez-Luna *et al*., 2014) de las investigaciones que incluyen a ambos modelos como su marco teórico para el análisis.

Debido a que el estudio conjunto de ETM y MTSK es relativamente reciente (Gómez-Chacón *et al*., 2015), hemos seleccionado los trabajos realizados desde el año 2015 a la fecha. Para esta selección nos basamos en trabajos que han sido presentados en eventos científicos que abordan la complementariedad teórica en cuestión o que se encuentran publicados en revistas o actas. Para la recolección de datos se considera la información proveniente de dichos documentos, realizando de este modo, un análisis documental de dichas fuentes (Gurdián-Fernández, 2007).

Las categorías de análisis consideran lo reportado como puntos de encuentro entre ambos modelos. Estos puntos corresponden al rol del profesor en el estudio y la resolución de tareas matemáticas. El procedimiento para analizar los artículos consideró las siguientes fases: 1) Identificar y seleccionar los trabajos que abordan ambos modelos teóricos simultáneamente; 2) Establecer el tipo de relación (general o entre componentes) establecida entre ambos modelos; 3) Reconocer aspectos de los modelos que permiten establecer conexiones entre los modelos; 4) Distinguir el rol que se asigna al profesor y a la resolución de la tarea matemática en cada estudio e 5) Identificar las conexiones que se reportan entre los modelos junto a los principales resultados en cada trabajo.

Para garantizar la confiabilidad del proceso de análisis y las estrategias de triangulación (Denzin, 1978), se usa la triangulación por investigadores (Arias, 2000). Para ello, se considera la participación en el análisis de un equipo conformado por tres investigadores; dos especialistas en ETM y uno en MTSK. Todos han realizado investigación en la que se emplean ambos modelos teóricos.

CONEXIÓN ENTRE ETM Y MTSK

Como señalábamos, el primer encuentro entre los modelos se produce en el Simposio ETM4 (Goméz-Chacón *et al*., 2015), donde se abre un espacio al MTSK para establecer las primeras relaciones al observar el trabajo del profesor. Aquí se resalta el rol de su conocimiento para interpretar el trabajo de los estudiantes y las interacciones que se producen entre el ETM idóneo, el ETM personal del profesor y de los estudiantes y el MTSK (Carrillo *et al*., 2015; Flores-Medrano *et al*., 2015; Vasco *et al.*, 2015). Por una parte, Carrillo *et al*. (2015) muestran una conexión general entre ETM y MTSK, donde éste último permite al profesor adecuar el ETM idóneo de acuerdo a los diferentes ETM personales de sus estudiantes y, al investigador, comprender estas decisiones.

Por su parte, Flores-Medrano *et al*. (2015), muestran que el KFLM puede ayudar al profesor a explicar cómo se estructuran los ETM personales de los estudiantes. Por otro lado, Vasco *et al.* (2015), resaltan el subdominio del Conocimiento de los Temas (KoT) como expresión del ETM personal del profesor y concluyen que el MTSK permitiría comprender los diversos tipos de ETM del profesor. En este grupo de trabajos, la mirada del quehacer del profesor se hace desde el MTSK y esto puede ayudar a interpretar algunos aspectos del ETM.

Otros trabajos continúan con la relación entre ETM y MTSK (e.g. Espinoza-Vásquez, Zakaryan y Ribeiro, 2018; Flores-Medrano *et al*., 2016; Vasco *et al*., 2016; Verdugo-Hernández y Espinoza-Vásquez, 2018), observando la incidencia del MTSK en el diseño o práctica de la enseñanza, en la interpretación de la actividad de los estudiantes o estableciendo relaciones particulares entre ambos marcos, por ejemplo, cuando el profesor resuelve una determinada tarea. Según las conclusiones de Gómez-Chacón *et al*. (2015), utilizar conjuntamente ambos marcos permitiría refinar los análisis que produciría la aplicación de solo uno de ellos.

Elementos que permiten la conexión

Los trabajos que se incluyen aquí contemplan al profesor y la tarea matemática como elementos que permiten la conexión teórica. Estos elementos no son, por sí solos, los articuladores de los marcos, pero posibilitan el diálogo y la conexión cuando ellos se observan como parte de un fenómeno que permite plantear preguntas abordables desde ambos marcos (García y Wake, 2010), con metodologías compatibles con los mismos (Radford, 2008 y Maier y Beck, 2001).

El profesor como agente mediador para el estudio de la complementariedad

El trabajo del profesor en el contexto de enseñanza es estudiado por Carrillo *et al*. (2015), Espinoza-Vásquez (2016), Espinoza-Vásquez *et al*. (2018), Flores-Medrano *et al*. (2015; 2016), Henríquez-Rivas y Espinoza-Vásquez (2018), Vasco *et al*. (2015; 2016) y Zakaryan *et al.* (2016), quienes se centran en el MTSK y lo relacionan con su ETM personal e idóneo. En términos generales, como muestra Carrillo *et al*. (2015), el MTSK influye en la configuración del ETM idóneo y permite al profesor interpretar los ETM personales de sus estudiantes. Particularmente, según Flores-Medrano *et al*. (2015), el KFLM permitiría al profesor anticiparse a las acciones que los estudiantes tomarán en ciertas tareas, logrando interpretar el ETM personal de sus estudiantes.

En Zakaryan *et al*. (2016), se muestra que el KoT del profesor le lleva a tomar decisiones sobre el tipo de actividades seleccionadas para la enseñanza de los números racionales cuando, al transformar de número decimal a fracción, no cuenta con el argumento necesario para justificar dicho procedimiento. En este sentido, el KoT, vinculado al ETM personal del profesor, incide en el diseño del ETM idóneo. El ETM idóneo y personal del profesor parece poder interpretarse a la luz del MTSK o de alguno de sus subdominios, lo que muestra un tipo de relación entre los modelos. Así, un punto de encuentro recae en la observación del conocimiento y práctica del profesor.

La tarea como activadora del análisis en cada modelo

El diseño, propuesta o resolución de una tarea matemática para la enseñanza permite observar que el profesor moviliza su conocimiento especializado para dicho propósito. En este sentido, Espinoza-Vásquez (2016), Henríquez-Rivas y Espinoza-Vásquez (2018) y Verdugo-Hernández y Espinoza-Vásquez (2018a; 2018b) observan al profesor desarrollando tareas para estudiar relaciones puntuales entre las génesis del ETM y subdominios del MTSK.

El estudio de las tareas para la enseñanza permite describir aspectos epistemológicos y cognitivos en el trabajo matemático, a la vez, muestra los conocimientos que requiere su desarrollo. El modelo ETM permite dar cuenta de cómo estas tareas estructuran un espacio adecuado por parte de profesores y estudiantes para su desarrollo, mientras que el modelo MTSK permite mostrar cuál es el conocimiento matemático y didáctico que moviliza el profesor en el diseño y ejecución de estas tareas.

En Espinoza-Vásquez (2016) se destaca que las tareas matemáticas asociadas a la enseñanza de un tema permiten relacionar la activación de génesis del ETM con conocimientos en diferentes subdominios del MTSK. Por su parte, Henríquez-Rivas y Espinoza-Vásquez (2018), centrados en la representación de una función, estrechan la relación entre la génesis semiótica e instrumental con el conocimiento de los registros de representaciones en el KoT. En este sentido, la tarea y su desarrollo constituye un elemento que activa el ETM y permite evidenciar conocimiento especializado del profesor, lo que la posiciona como un elemento articulador entre ambos modelos.

En Henríquez-Rivas *et al*. (2021) y Climent *et al.* (2021) se abordan las tareas y ejemplos durante la enseñanza del teorema de Thales, desde ETM y MTSK, respectivamente. Pese a que esto trabajos no utilizan ambos modelos, en ellos se analiza la práctica de un profesor en los mismos momentos de la enseñanza, y se ha considerado esto como punto de partida para una investigación que ahonde en la práctica matemática del profesor en relación a su conocimiento especializado, centrado en las tareas que propone para el aula.

Las herramientas como componente del análisis teórico

Uno de los últimos avances en la relación ETM-MTSK contempla el uso de herramientas en el desarrollo de una tarea. La resolución de una tarea moviliza herramientas del plano epistemológico del ETM, las que quedan vinculadas a tipos de conocimientos en los subdominios del MTSK. Esto se destaca en Verdugo-Hernández y Espinoza-Vásquez (2018a; 2018b) y Verdugo-Hernández, Espinoza-Vásquez y Carrillo (en revisión), quienes muestran el refinamiento en los análisis y la reinterpretación los resultados que se produce al analizar una misma porción de datos con ambos modelos conjuntamente. Específicamente, en Verdugo-Hernández y Espinoza-Vásquez (2018b) se muestra la conexión entre el tema de sucesiones y el principio de inducción, éste último sirviendo de ayuda en el tratamiento de la sucesión (conexión auxiliar en KSM). El reciente trabajo de Verdugo-Hernández, Espinoza-Vásquez y Carrillo (en revisión), profundiza en la conexión entre las herramientas teóricas, semióticas y operacionales y las componentes del MTSK, evidenciando relaciones específicas entre las herramientas operacionales y las conexiones auxiliares (KSM), las herramientas teóricas y la propiedades y fundamentos (KoT), y las herramientas semióticas y la comunicación de ideas matemáticas (KPM) y las representaciones en el KoT.

Lo anterior muestra que en el estudio del uso de herramientas en el desarrollo de tareas matemáticas se pormenorizan las relaciones entre ETM y MTSK, logrando vincular elementos específicos de cada modelo. En este sentido, el estudio de las herramientas, su uso y su interpretación como conocimiento especializado se posiciona como otro elemento que permite la conexión entre los modelos en el contexto del desarrollo de tareas.

COMENTARIOS FINALES Y CUESTIONES ABIERTAS

La relación entre ambos modelos pone en evidencia su *compatibilidad* y su *complementariedad* para avanzar en la comprensión de los conocimientos del profesor, en el diseño de tareas para la enseñanza y en el uso de herramientas como mediadoras de la actividad. El estudio del MTSK permitiría comprender los diversos tipos de ETM del profesor, mientras que el estudio del ETM permitiría caracterizar su trabajo matemático. Los trabajos que se focalizan en fenómenos específicos como el planteamiento y resolución de tareas, permiten establecer relaciones más puntuales entre los modelos, por ejemplo, al estudiar las herramientas. Destacamos que el planteamiento de preguntas de profundización en la relación ETM-MTSK, que puedan ser abordadas desde ambos modelos, permite conexiones más específicas entre ellos.

Además de estas preguntas, se identifica un aspecto común a todas las investigaciones aquí contenidas: el foco sobre el ETM idóneo o personal del profesor. Asimismo, ellas se basan en el estudio de un caso como parte de su metodología. En este sentido, estos trabajos se presentan como ejemplos de conexiones entre los modelos y permiten proyectar el estudio de la relación ETM-MTSK, sin embargo, conviene enfocar los esfuerzos en contemplar los aspectos metodológicos y profundizar en los sustentos epistemológicos de cada modelo que permitan su conexión.

Quedan aún varios temas abiertos para avanzar en la complementariedad teórica, por ejemplo, la interpretación del ETM idóneo (potencial o efectivo) a la luz del MTSK, la profundización en la relación entre las génesis del ETM y el conocimiento que sustenta el trabajo matemático del profesor o la confirmación de las conexiones hasta ahora declaradas. Lo anterior muestra la posibilidad de seguir trabajando en esta conexión ETM-MTSK.

Agradecimientos

Paula Verdugo-Hernández agradece a Convenio Marco FID-TAL 1856, de la Universidad de Talca (2021).
Este trabajo está vinculado a la Red MTSK de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

Referencias

Arias, M. (2000). La triangulación metodológica: sus principios, alcances y limitaciones. *Investigación y Educación en Enfermería, 18*(1), 13-26.

Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Contreras, L.C. y Climent, N. (2015). El profesor en el marco de los ETM: el papel del MTSK como modelo de conocimiento. En I.M. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak y P. Richard (Eds.), *Espacio de trabajo matemático. Actas ETM4* (pp. 461-471). Universidad Complutense de Madrid.

Carrillo J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Ribeiro, C.M. y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. doi:10.1080/14794802.2018.1479981

Climent, N., Espinoza-Vásquez, G., Carrillo, J., Henríquez-Rivas, C. y Ponce, R. (2021). Una lección sobre el teorema de Thales vista desde el conocimiento especializado del profesor. 2 *Revista Educación Matemática, 33*(1), 99-124.

Denzin, N.K. (1978). *The Research Act: A Theoretical Introduction to Sociological Method* (2.ª ed.). McGraw-Hill.

Espinoza-Vásquez, G. (2016). Reflexión sobre algunos elementos que posibilitan la articulación de los modelos ETM y MTSK en tareas sobre el concepto de función. En I.M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, P. Richard y L. Vivier (Eds.), *Actas Quinto Simposio Internacional ETM* (pp. 441–452). Universidad Macedonia Occidental.

Espinoza-Vásquez, G., Ribeiro, M. y Zakaryan, D. (2018). Avance en la comprensión de las relaciones entre el ETM idóneo y el MTSK del profesor. *Journal of Educational Research, MENON*, *4*, 146-161.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M. y Carrillo, J. (2015). ¿Cómo se relaciona el conocimiento que tiene el profesor acerca del aprendizaje de las matemáticas con su entendimiento sobre los espacios de trabajo matemático? En I.M. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak y P. Richard (Eds.), *Espacio de trabajo matemático. Actas ETM4* (pp. 461-471). Universidad Complutense de Madrid.

Flores-Medrano, E., Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L.C., Muñoz-Catalán, M. y Liñán, M. (2016). El papel del MTSK como modelo de conocimiento del profesor en las interrelaciones entre los espacios de trabajo matemático. *Boletín de Educación Matemática*, *Bolema, 30*(54), 204–221.

García, F.J. y Wake, G. (2010). Estableciendo diálogos entre diferentes marcos teóricos: de los procesos narrativos a la teoría antropológica de lo didáctico. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 315-326). SEIEM.

Gómez-Chacón, I., Escribano, J., Kuzniak, A. y Richard, P. (2015) (Eds.). *Espacio de Trabajo Matemático/Mathematical Working Space/Espace de Travail Mathématique. Actas Cuarto Simposio Internacional ETM*. Universidad Complutense de Madrid.

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A. y Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los espacios de trabajo matemático. *Boletín de Educación Matemática*, *Bolema*, *30*(54), 1-22.

Gómez-Luna, E., Fernando-Navas, D., Aponte-Mayor, G. y Betancourt-Buitrago, L. (2014). Metodología para la revisión bibliográfica y la gestión de información de temas científicos, a través de su estructuración y sistematización. *DYNA, 81*(184), 158-163.

Gurdián-Fernández, A. (2007). *El Paradigma Cualitativo en la Investigación Socio-Educativa.* Costa Rica: Educativo Regional (IDER).

Henríquez-Rivas, C. y Espinoza-Vásquez, G. (2018). Relación ETM-MTSK: conexiones entre la génesis semiótica y el conocimiento de los temas. En E. Montoya, P. Richard, L. Vivier, I.M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Machietto y D. Tanguay (Eds.), *Actas Sixième Symposium sur le Travail Mathématique* (pp. 507-512). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Henríquez-Rivas, C., Ponce, R., Carrillo, J., Climent, N. y Espinoza-Vasquez, G. (2021). Trabajo matemático de un profesor basado en tareas y ejemplos propuestos para la enseñanza. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 39*(2), 123-142.

Kuzniak, A., Tanguay, D. y Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 48, 721-737.

Maier, H. y Beck, C. (2001). Zur Theoriebildung in der interpretativen mathematikdidaktischen Forschung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 22*(1), 29-50.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A. y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connection theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *International Journal on Mathematics Education, 40*(2), 165-178. doi:10.1007/s11858-008-0086-z

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 40*(2), 317–327.

Vasco-Mora, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M.A. y Ribeiro, C.M. (2016). Conocimiento especializado de un profesor de álgebra lineal y espacios de trabajo matemático. *Boletín de Educación Matemática, Bolema, 30*(54), 222–239.

Vasco Mora, D. y Climent, N. (2015). Espacios de trabajo matemático y conocimiento de un profesor de álgebra lineal. En I.M. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak y P. Richard (Eds.), *Actas ETM 4*, (pp. 461-471). Universidad Complutense de Madrid.

Verdugo-Hernández, P. (2018). *Espacio de Trabajo Matemático del Análisis: Enseñanza de las sucesiones en los primeros años de universidad.* (Tesis Doctoral). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Verdugo-Hernández, P. y Espinoza-Vásquez, G. (2018a). Utilización de las herramientas en el espacio de trabajo matemático y el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Revista Chilena de Educación Matemática*, *11*(1), 91-95.

Verdugo-Hernández, P. y Espinoza-Vásquez, G. (2018b). Comprensión del uso de las herramientas teóricas y operatorias en el espacio de trabajo matemático y el conocimiento matemático del profesor. En E. Montoya, P. Richard, L. Vivier, I.M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Machietto y D. Tanguay (Eds.), *Actas Sixième Symposium sur le Travail Mathématique* (pp. 455-466). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Verdugo-Hernández, P., Espinoza-Vásquez, G. y Carrillo, J. (En revisión). Comprensión de las herramientas en el espacio de trabajo matemático y las conexiones con el conocimiento matemático del profesor. *Enseñanza de las Ciencias*.

Zakaryan, D., Ribeiro, C.M. y Espinoza-Vásquez, G. (2016). Relaciones entre el conocimiento del tema (MTSK) y los ETM idóneo y personal. En I.M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, P. Richard y L. Vivier (Eds.), *Espacio de Trabajo Matemático. Actas ETM5* (pp. 467-475). Universidad Macedonia Occidental.

O LUGAR DAS BIG IDEAS NO CONHECIMENTO DO PROFESSOR DE BIOLOGIA

The place of Big Ideas in Biology Teacher's Knowledge

Luís, M. [a]; Marques, M. [b]; Bitencourt, A. [c]

[a] Agrupamento de Escolas José Belchior Viegas; [b] Secretaria de Educação do Estado de Mato Grosso; [c] Centro Universitário FAMINAS

Temática: 5 – Extensões do MTSK

Resumo. Esta investigação é parte de outra, maior e de cariz qualitativo, que caracterizou o conhecimento especializado do professor de biologia (BTSK- *Biology Teacher's Specialised Knowledge*). A informação foi recolhida no decorrer do ensino formal da "Reprodução das plantas", no seu ambiente natural, a partir da observação de 14 aulas, audiogravadas e videogravadas, analisada através da análise de conteúdo e do instrumento BTSK em construção. Interessa, neste trabalho, compreender o lugar das *big ideas* no modelo. Foi incluida na categoria "Conhecimento das *big ideas*" e integra o conhecimento de como diferentes conteúdos se tocam por aspetos que têm em comum. Por exemplo, o conhecimento de que a reprodução das plantas e dos animais coincidem por apresentarem similaridades entre si, nomeadamente pelo facto dos embriões dentro de sementes ou dentro dos ovos se alimentarem das suas substâncias de reserva.

Palavras-chave. Biologia, Big ideas, Conhecimento especializado, Professores.

Abstract. This investigation is part of another, larger and qualitative investigation, which characterized the specialized knowledge of the biology teacher (BTSK- Biology Teacher's Specialized Knowledge). The information was collected during the formal teaching of "Plant reproduction", in its natural environment, from the observation of 14 classes, audio-recorded and video-recorded, analysed through content analysis and the BTSK instrument under construction. We aim, in this work, to understand the place of big ideas in the model. It was included in the category "Knowledge of Big Ideas" with the knowledge of how different contents are touched by aspects they have in common. For example, the knowledge that the reproduction of plants and animals coincide because they have similarities to each other, namely because embryos inside seeds or inside eggs feed on their reserve substances.

Keywords. Biology, Big ideas, Specialised knowledge, Teachers.

INTRODUÇÃO

As *big ideas* estão documentadas nos trabalhos de Harlen (2010) como as grandes ideias da educação em ciências. Estão definidas com sete temas abrangentes a partir dos quais as ciências podem ser trabalhadas em sala de aula. Porém, a definição de *big idea* não é consensual e, dependendo dos autores e investigadores, podem assumir diferentes características. Podem ser princípios universais ou ideias-chave que interrelacionam um reduzido número de conceitos e fenómenos (Mitchell et al., 2016); um conhecimento profundo do tema que permite estabelecer relações (Duncan et al., 2009) ou ferramentas para os estudantes estabelecerem conexões entre os conceitos (Olson, 2008). O Ministério de Educação em Portugal, nos diferentes documentos orientadores que produz e disponibiliza na página aficial na internet, apresenta os "Temas globalizadores" (Ministério da educação, 1991). Estes temas são mais limitados e específicos de uma determinada ciência (neste caso as ciências naturais) e permitem interrelacionar vários conceitos.

Luís, M., Marques, M., & Bitencourt, A. (2021). O lugar das Big Ideas no conhecimento do professor de Biologia. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 328–334). Congresseme.

Nas diferentes conceções apresentadas sobre as *big ideas* ressalta, sobretudo, a abrangência que podem ter essas grandes ideias. Por um lado, um tema globalizador que organiza vários conceitos, fenómenos e conteúdos em torno da mesma temática (ME, 1991), por outro as *big ideas* sobre a ciência de Wynne Harlen (2010) que incluem variadíssimos temas de várias disciplinas das ciências. Seja qual for a definição escolhida, implica, por parte do professor, conhecimento para estabelecer essas relações. Mas existe lugar para esse conhecimento no modelo do conhecimento especializado do professor de biologia (BTSK)? Como se caracteriza o conhecimento do professor sobre as *big ideas*?

O MODELO BTSK

O conhecimento especializado do professor de biologia, apresentado na figura 1 (BTSK- Biology Teacher's Specialised Knowledge), tem vindo a ganhar forma e dimensão nos anos mais recentes através dos trabalhos de Luís et al. (2019), Dahmer et al. (2019), Silva, et al. (2020), Luís e Carrillo (2020), Marques (2020), Luís, Soares, et al. (2021) e Luís, Carrillo, et al. (2021) e Luís (2021). Estes trabalhos surgem da necessidade de estabelecer, num modelo, o conhecimento mobilizado pelos professores de biologia quando ensinam um tema desta disciplina. O modelo integra apenas conhecimento, é específico do professor de biologia e está isento de avaliação, ou seja, a qualidade do conhecimento é desvalorizada (Schoenfeld, 2010).

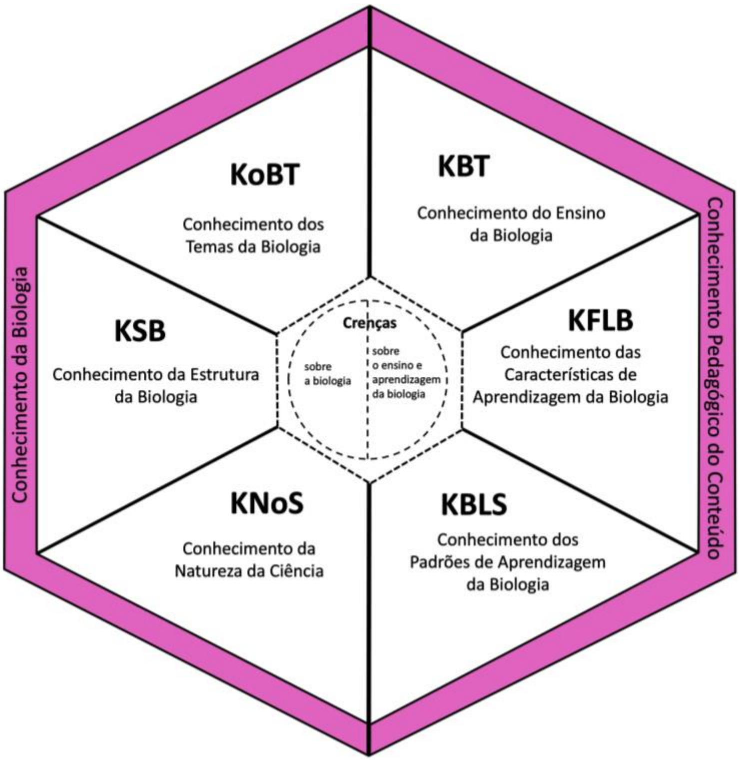


Figura 1. Modelo do Conhecimento especializado do professor de biologia (Luís e Carrillo, 2021)

Este modelo, que ganha solidez e robustez progressiva, apresenta, como o MTSK de Carrillo et al. (2018) (modelo original – Mathematics Teacher's Specialized Knowledge), dois domínios de conhecimento: "Conhecimento da Biologia" (BK) e "Conhecimento Pedagógico do Conteúdo" (PCK); e um domínio das crenças, que comporta um conhecimento subjetivo, intrínseco e pessoal dos professores de biologia. O domínio BK integra três subdomínios: Conhecimento dos temas da biologia, Conhecimento da estrutura da biologia (KSB) e Conhecimento da natureza da ciência. O domínio do PCK, específico para o ensino da biologia, integra igualmente três subdomínios: Conhecimento do ensino da biologia, Conhecimento das características de aprendizagem da biologia e Conhecimento dos padrões de aprendizagens da biologia.

O Conhecimento da estrutura da biologia

A designação de "estrutura da biologia" não surge na literatura consultada no âmbito das ciências. Os diferentes trabalhados de Luís (Luís et al, 2021; Luís, 2021) associam o conhecimento da estrutura da biologia ao mesmo tipo de conhecimento já anteriormente apresentado pelo modelo modelo homólogo (Carrillo et al., 2018). O subdomínio homólogo, presente no MTSK (KSM – Conhecimento da estrutura da matemática) na categoria "Conhecimento de conexões transversais", reúne o conhecimento que permite estabelecer ligação entre conceitos diferentes através de aspetos em comum (Carrillo et al., 2018).

Este estabelecimento de ligações entre conceitos está presente nas definições de *big idea*, apesar das diferentes definições. A conceção de *big idea*, ou grande ideia, apresentada Harlen (2010) não tem no lugar no BTSK já que o modelo diz respeito ao conhecimento do professor de biologia e as *big ideas of science education* abraçam várias ciências. Por exemplo, a big idea: "Organismos organizam-se a partir de uma base celular" podia albergar a reprodução das plantas, porém, é demasiado abrangente tornando-se difícil a sua delimitação no âmbito desta investigação. A definição de grande ideia presente nos trabalhos de Duncan et al. (2009) e de Mitchell et al. (2016) é a que melhor serve. Estes autores definem as grandes ideias como frases que contextualizam os temas em estudo e estabelecem relações com outros temas. É também segundo esta ideia que se alinha o Ministério da Educação português quando apresenta um tema globalizador, mais limitado, no qual se inclui a reprodução: "Processos vitais comuns aos seres vivos" (Ministério da Educação, 1991). Nesta *big idea* pode-se incluir não só a reprodução das plantas, mas também a dos animais e as similaridades que existem entre ambos.

Na investigação levada a cabo, procuraram-se evidências do conhecimento do professor que revelassem precisamente estas ligações entre conceitos ou fenómenos. Esta contribuição permite caracterizar o subdomínio do Conhecimento da estrutura da biologia, do BTSK.

METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO

Esta publicação que aqui se apresenta é parte de uma investigação mais abrangente que constitui uma tese de doutoramento e permitiu a construção do modelo BTSK a partir de dados empíricos (Luís, 2021). A construção do BTSK está sustentada pela teoria presente em publicações de autores de referência, no âmbito do conhecimento do professor, mas todo o conhecimento presente no modelo é resultado da observação direta de dois professores, em sala de aula. Trata-se de uma investigação qualitativa, de caráter interpretativo, na qual se pretendeu compreender e atribuir significado ao conhecimento do professor (Lincoln e Guba, 1989). É também naturalista já que o fenómeno foi estudado no lugar em que naturalmente ocorre.

No que diz respeito a este trabalho, o objetivo recai na caracterização do subdomínio "Conhecimento da estrutura da biologia": Como se integram as big ideas no modelo do BTSK? Como se caracteriza o conhecimento da estrutura da Biologia?

O desenho de investigação coincide com o estudo de caso (dois estudos de caso) instrumental segundo Stake (2005). Pretendeu-se conhecer em profundidade duas professores, a sua prática docente em escolas portuguesas e o conhecimento que mobilizaram no âmbito deste subdomínio, enquanto ensinaram o tema da Reprodução das plantas. A atenção recai particularmente na mobilização do conhecimento relacionado com a estrutura da biologia e das relações que estabelecem entre conceitos, factos ou fenómenos.

Os casos foram escolhidos entre os seus pares (Patton, 2002) e foram cumpridos todos os tramites legais de modo a garantir o anonimato das crianças, das escolas e das professoras (Lincoln e Guba, 1989). O total de 14 aulas foram videogravadas e audiogravadas e as transcrições realizadas. As aulas transcritas foram divididas em episódios atendendo às mudanças de conteúdo, de recurso material e tipo de atividade (Monteiro, 2005). O procedimento de análise usado foi a análise de conteúdo (Bardin, 2012) e o instrumento de análise o próprio BTSK, em constante construção e atualização. Os excertos de episódios de aula com evidências de conhecimento foram identificados (por exemplo [U210]), bem como as unidades de significado a eles associados (por exemplo [KSB1]).

De modo a garantir uma fiel interpretação dos dados e dando resposta à questão metodológica dos paradigmas interpretativos (Bassey, 1999), os resultados obtidos foram triangulados sob duas formas. Por um lado foram triangulados os dados uma vez que a informação foi recolhida durante o ensino por parte de duas professoras em dois momentos distintos e em dois anos escolares diferentes. Por outro, os dados foram triangulados entre investigadores. A triangulação de investigadores aconteceu entre os elementos do seminário de investigação em didática matemática (SIDM) que trabalha na contrução e aperfeiçoamento do MTSK (Stake, 2005).

RESULTADOS

As evidências recolhidas e transcritas revelam um conhecimento integrado e complexo que permitiu às professoras compreender as ligações entre os diferentes conceitos, factos e conceitualizações da disciplina. A análise revelou conhecimento de váriadas relações entre o tema da reprodução das plantas e o tema da reprodução dos animais, colocando em evidência, precisamente, o conhecimento sobre este conceito estruturante que é a Reprodução.

De entre as evidências disponíveis apresentam-se três, presentes na investigação mais abrangente com os códigos: [U210], [U211] e [U213]. O primeiro excerto ([U210]) torna evidente que a professora reconhece o caracol como animal hermafrodita. Esta característica pode ocorrer tanto em animais como em plantas. Porém, enquanto uma única planta se pode reproduzir sexualmente, nos animais (e no caso particular dos caracóis) esta característica não o torna autosuficiente no momento de se reproduzir e é necessária a intervenção de outro indivíduo do sexo oposto. Esta evidência está associada à unidade de significado [KSB1].

> P: As flores é que têm essa particularidade. Mas vocês sabem que também há animais...
>
> A: Os caracóis.
>
> P: Sim, os caracóis por exemplos, que tem os dois sexos. Não são é suficientes. Precisam sempre de outro para acasalar. Sim, sim... [U210]

Neste segundo excerto ([U211]), o foco está direcionado para o transporte da célula sexual masculina. Volta a observa-se a similaridade entre a reprodução das plantas e a reprodução dos animais.

> P: Eu não estou a ouvir nada. Diz lá João, que era isso que eu ia dizer. João Dores, diz lá que era isso que eu ia dizer.

A: As células, nesse caso, os grãos de pólen servem para transportar as células sexuais masculinas e…

P: É como…

A: É como os espermatozóides...

P: E? E?

A: E o óvulo.

P: Não

A: E o esperma.

P: E o esperma.

A: O esperma transporta a célula sexual masculina.

P: Exatamente. Era isso mesmo que eu ia dizer. [U211]

É evidente o conhecimento da professora sobre a proximidade entre o mecanismo de transporte das células sexuais masculinas das plantas com flor e das células sexuais dos animais. É revelado pela professora que é através do tubo polínico que a célula sexual masculina das plantas, ou seja, o grão de pólen, atinge os óvulos. De forma bastante semelhante, os espermatozóides são transportados pelo esperma ([KSB2]). É reconhecida a proximidade que existe entre a reprodução humana e a das plantas no que diz respeito ao transporte da célula sexual masculina.

Na terceira e última passagem ([U213]) é feita uma comparação entre a reprodução dos animais e a reprodução das plantas. A professora salienta, com os alunos, um aspeto comum entre estas duas formas de reprodução, nomeadamente quanto estabelece a comparação entre os animais ovíparos (que se desenvolvem fora do corpo dos progenitores, dentro de um ovo) e as sementes das plantas com flor (que produzem sementes). Segundo as suas declarações, os embriões destes animais e os embriões encerrados na semente dependem das substâncias de reserva para se desenvolverem. O pinto (usando e exemplo da professora) depende das substâncias de reserva do ovo e os embriões das plantas com flor dependem das substâncias de reserva da semente (os cotilédones) ([KSB4]).

A: Os animais bebés alimentam-se da mãe, não é. Por exemplo, a planta tem que se alimentar dos cotilédónes…

A: Cotiledónes.

[Risos por parte dos alunos]

P: Sim, sim.

(...)

P: Pronto. Chiu! Ele está a falar dos animais ovíparos.

A: Estou a comparar.

P: Estás a comparar a semente… Os animais ovíparos. A galinha, está lá o choco, está lá o ovo, também tem substâncias de reserva para alimentar o pintinho. São os animais ovíparos. Mas o nosso caso, já não. Quem alimenta o embrião é a própria mãe. Hum? Está? [U213]

Este conhecimento enquadra-se na caracterização do conhecimento das *big ideas*, ou seja, conhecimento amplo e abrangente do conteúdo que permite a sua integração e relação com outros temas. Esse conhecimento facilita ainda o encontro de aspetos e características comuns aos temas e a identificação daquilo que os distingue. Revela, em conteúdo, o mesmo tipo de conhecimento presente na categoria "Conhecimento das conexões transversais" do subdomínio homólogo do MTSK (Carrillo et al., 2018) que define este conhecimento como o conhecimento das relações entre dois conteúdos diferentes, pela qualidade que têm em comum ou pela proximidade de pensamento.

No MTSK existem outras categorias que caracterizam o conhecimento da estruturada matemática. No entanto, durante a análise dos dados não foram encontradas outras evidências do conhecimento de conexões entre conceitos e, por isso, a caracterização do subdomínio do Conhecimento da estrutura da biologia fica centrada numa única categoria denominada como Conhecimento de *big ideas*.

CONCLUSÕES

O professor, no desenvolvimento da sua atividade docente mobiliza conhecimento de diferentes naturezas e com diferentes características. Neste artigo pretendeu-se compreender que conhecimento mobilizam os professores (neste caso duas professoras) no âmbito do conhecimento da estrutura da biologia. Neste domínio, caracterizado por integrar conhecimento de conexões interconceituais e conhecimentos tanto avançados, como elementares que permitem ao professor trabalhar o conteúdo desse o ponto de vista integral e estruturado, foi identificada apenas uma categoria: conhecimento de *big ideas*.

Na categoria **conhecimento de *big ideas*** encontra-se o conhecimento do professor que lhe permite compreender as ligações entre os diferentes conceitos, factos e conceitualizações da disciplina. Este conceito de conhecimento abrangente e integrado é igualmente reconhecido entre a comunidade científica pela mesma designação (Harlen, 2010; Fiedler-Ferrara e Mattos, 2002; Duncan et al., 2009 e Mitchell et al., 2016). A reprodução constitui uma *big idea* na medida em que permite relacionar pelo menos dois temas: a Reprodução das Plantas e a Reprodução dos Animais.

Este estudo tem as limitações próprias de um estudo único pois, apesar de ser um estudo empírico, foi desenvolvido no decorrer do ensino de um tema específico da biologia, apenas com duas professoras e numa região portuguesa. Naturalmente que a repetição da investigação noutros contextos promoverá a validação da informação recolhida, mas também a identificação de outros conhecimentos ausentes no atual modelo (Luís, 2021).

Referências

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in taching and learning to teach: Knowing and using mathematics. Em J. Boaler, *Multiple Perspectives on Mathematics of Teaching and Learning* (pp. 83-104). Westport: Ablex Publishing.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings.* Buckingham: Open.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras-González, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., . . . Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20 (3)*, pp. 236-253. doi:10.1080/14794802.2018.1479981

Dahmer, C. i., Fernandes, C. T., & Luís, M. (2019). Práticas pedagógicas em biologia e alfabetização científica na ótica do BTSK (Apresentação de poster). *Anais do Congresso de Pesquisa em Educação - CONPEduc 2019.* Rondonópolis: Even3.

Duncan, R. G., Rogat, A. D., & Yarden, A. (2009). A Learning Progression for Deepening Students' Understandings of Modern Genetics Across the 5th–10th Grades. *Journal of Research in Science Teaching, 46(6)*, 655-674.

Fiedler-Ferrara, N., & Mattos, C. (2002). Seleção e organização de conteúdos escolares: Recortes na pandiscipliaridade., *8.*

Harlen, W. (2010). *Principles and Big Ideas of Science Education.* (A. f. Education, Ed.) Great Britain: Ashford Colour Press Ltd.

Lincoln, Y., & Guba, E. G. (1989). Ethics: The failure of positivist science. *The review of higher education, 12(3)*, 221-240. doi:10.1353/rhe.1989.0017

Luís, M. (2021). *O conhecimento especializado do professor quando ensina tópicos de biologia (tese de doutoramento).* Huelva: Universidade de Huleva.

Luís, M., & Carrillo, J. (2020). O modelo do conhecimento especializado do professor de Biologia (btsk). *Revista De Ensino De Ciências E Matemática, 11*(7), pp. 19-36. doi:doi.org/10.26843/10.26843/rencima.v11i7.2788

Luís, M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2019). Ensinar a reprodução das plantas com as lentes BTSK. Em J. Carrillo, M. Codes, & L. C. Contreras (Ed.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*, (pp. 71-78). Huelva.

Luís, M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2021). O conhecimento dos temas no ensino da reprodução das plantas. *Revista de Educação Pública, 30*, pp. 1-21. doi:10.29286

Luís, M., Soares, S., Lima, S., & Marques, M. (2021). Desenvolvimento dos modelos de conhecimento especializado do professor de biologia, física e química. *Revista Multidisciplinar, 3(1)*, pp. 33-53. doi:10.23882/DI2151

Marques, M. (2020). *Conhecimento Especializado de Professores de Biologia: análise de relatos de prática no Ensino Médio (Tese de mestrado).* Mato Grosso: Cuiabá: Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologias do Estado de Mato Grosso.

Ministério da educação. (1991). *Programa de ciências da natureza - Plano de organização do ensino-aprendizagem.* Editora nacional.

Ministério da Educação. (1991). *Programa de ciências da natureza - Plano de organização do ensino-aprendizagem.* Nacional, Ed.

Mitchell, I., Keast, S. P., & Mitchell, J. (2016). Using 'big ideas' to enhance teaching and student leraning. *Teachers and teaching, 23*(5), 596-610. doi:10.1080/13540602.2016.1218328

Mitchell, I., Keast, S., Panizzon, D., & Mitchell, J. (2016). Using 'Big Ideas' to Enhance Teaching and Student Learning. *Teachers and Teaching, 23*(5), 596–610.

Monteiro, R. (2005). *La enseñanza de las ciencias naturales desde el análisis cognitivo de la acción (Tesis doctoral).* Huelva: Universidad de Huelva.

Olson, J. K. (2008). Concept-focused Teaching: Using Big Ideas to Guide Instruction in Science. *Science and Children, 46*(4), 45-49.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods* (3ª ed.). California: Sage publications.

Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications.* New York: Routledge.

Silva, M. M., Carneiro, K. I., Soares, S. T., Lima, S. S., Moreira, J. S., Luís, M., & Mello, G. J. (2020). Conhecimento especializado de professor de biologia para ensinar embriologia humana. Em D. F. Andrade, & D. F. Andrade (Ed.), *Série Educar - Ciências, Biologia e Meio Ambiente* (Vol. 32, pp. 37-42). Poisson.

Stake, R. (2005). Qualitative case studies. Em Denzin, Lincoln, & &. Y. N. K. Denzin (Ed.), *Strategies of qualitative inquiry* (3ª ed., pp. 443-466). Sage publications.

CONHECIMENTO DO ENSINO NO TEMA SISTEMA RESPIRATÓRIO

Knowledge of Teaching in the Theme of Respiratory System

Marques, M. [a]; Bitencourt, A. H. C. [b]; Luís, M. [c]; Moriel-Junior, J. G. [d]

[a] Secretaria de Educação do Estado de Mato Grosso; [b] Centro Universitário FAMINAS; [c] Agrupamento de Escolas José Belchior Viegas; [d] Instituto Federal de Mato Grosso

Temática: 5 – Extensões do MTSK

Resumo. Essa investigação aborda parte da trajetória do desenvolvimento do modelo teórico Biology Teacher's Specialized Knowledge – BTSK em especial a fundamentação do subdomínio do Conhecimento do Ensino da Biologia (KBT). Para isso, realizamos análise de conteúdo comparando os resultados de um recorte de uma dissertação que caracterizou os conhecimentos mobilizados em uma aula sobre Sistema Respiratório com a fundamentação do BTSK atual. Nossos resultados apontam para uma evolução do BTSK que inicialmente continha Indicadores de Conhecimentos e que atualmente encontra-se mais sólido apresentando de forma mais detalhada os conhecimentos especializados que compõem o subdomínio do Conhecimento do Ensino da Biologia: as Categorias.

Palavras-chave. Conhecimento do ensino, Modelo teórico, Categorias, BTSK.

Abstract. This investigation addresses part of the development trajectory of the theoretical model Biology Teacher's Specialized Knowledge – BTSK, in particular the foundation of the subdomain of Biology Teaching Knowledge (KBT). For this, we performed content analysis comparing the results of a clipping of a dissertation that characterized the knowledge mobilized in a class on Respiratory System with the foundation of the current BTSK. Our results point to an evolution of BTSK, which initially contained Knowledge Indicators and which is currently more solid, presenting in more detail the specialized knowledge that make up the Biology Teaching Knowledge subdomain — the Categories.

Keywords. Teaching knowledge, Theoretical model, Categories, BTSK.

ENSINO DE BIOLOGIA E O CONHECIMENTO ESPECILIZADO DE PROFESSORES

O refletir da formação docente inicial e contínua, a partir da análise das práticas pedagógicas permeiam o saber e o fazer pedagógico dos professores que objetivam agir de forma coerente e transformadora, enfatizando o seu papel, compromisso e fortalecendo atuação docente (Pimenta, 2008; Nóvoa, 2009).

A função do ensino é a de facilitar a construção de conhecimentos pelo aprendiz, por meio do levantamento de problemas e da busca de soluções. Para que isto ocorra, o professor precisa criar um ambiente reflexivo, dinâmico, investigativo para que os alunos sejam estumilados a querer aprender. Deste modo, o ensino pode ser compreendido como prática social, processo de transmissão de conhecimentos, que exige apreensão da realidade e que se articula à aprendizagem. Já a aprendizagem pode ser compreendida como processo interno de apropriação de conhecimentos (Teodoro, 2017 como citado em Marques, 2020).

Nardi (2004) diz que nas áreas de práticas educacionais e didática das Ciências, há a necessidade explícita de repensarmos as formas de abordagem do conteúdo,

Marques, M., Bitencourt, A. H. C., Luís, M., & Moriel-Junior, J. G. (2021). Conhecimento do ensino no tema sistema respiratório. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 335–341). Congresseme.

proporcionando ao aluno a utilização de diversas estratégias de ensino, ampliando assim sua rede de significados. Pais (2019) considera que os recursos didáticos envolvem uma diversidade de elementos como suporte experimental e têm por finalidade servir de mediador na relação entre aluno e professor. Corroborando com os autores, Perrenoud (2000) manifesta-se dizendo que: "Torna-se necessário o domínio de métodos/técnicas de ensino e de estratégias para dirigir e orientar a aprendizagem dos alunos pelos professores de Ciências e Biologia."

Embasado nesse viés do conteúdo e práticas pedagógicas, nosso artigo traz um recorte dos resultados da dissertação da primeira autora sobre um dos temas — Sistema Respiratório, que teve sua investigação amparada pelo arcabouço de conhecimentos especializados de professores de Biologia que compõem o modelo teórico *Biology Teacher's Specialized Knowledge* - BTSK (Luís et al., 2017). Os resultados apresentados anteriormente, acerca da caracterização dos Subdomínios do BTSK trouxeram apenas os Indicadores de Conhecimento (Marques, 2020). No entanto, o modelo atual já apresenta as suas Categorias descritas (Luís & Carrillo, 2020) e é composto por três domínios: o do Conhecimento da Biologia (BK), do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) e o das Crenças. Esses três domínios são divididos em Subdomínios que, por sua vez, são subdividos em Categorias, sendo este, o referencial teórico desse artigo.

O modelo do BTSK é um modelo teórico-empírico fundamentado pela teoria e validado pela observação em sala de aula, adaptado do modelo do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática, o MTSK (Carrillo et al., 2014) que apesar das peculiaridades e distinções existentes no que diz respeito à natureza epistemológica de ambas as disciplinas.

Em face disso, o objetivo desse trabalho é demonstrar a evolução da fundamentação do Conhecimento do Ensino da Biologia (KBT) na trajetória da construção do BTSK atual apresentando detalhadamente os requisitos pertencentes a esse conhecimento, contrastando aos indicadores anteriores.

ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO

O tipo de pesquisa é qualitativo (Bogdan & Biklen, 1982; Silva, 2013), de caráter analítico-descritivo tendo como fonte de dados uma produção escrita em forma de relato de aula prática de ensino de Biologia definido por Loughran et al. (2001) como *Professional and Pedagogical Experience Repertoire* – PaP-eR, a saber: ser um relato de prática de ensino, estar inseridos em um cenário propício para o ensino, abordar o aspecto prático experimental do ensino e permitir a reconstrução do episódio de ensino.

E esse artigo é um recorte de um dos três PaP-eRs que foram analisados por Marques (2020) que para atender a necessidade de prazo na conclusão no mestrado apresentou a fundamentação do modelo ancorando-se na literatura trazendo Indicadores de Conhecimentos para os Subdomínios já descritos por Luís et al., (2017).

O PaP-eR no qual identificamos os conhecimentos especializados para ensinar Biologia e fizemos o recorte subtraindo apenas exemplos do Conhecimentos do Ensino da Biologia (KBT) é um relato de um Projeto de Ensino que intitulado "Sistema Respiratório: anatomia, fisiologia e a influência do meio ambiente externo" possuiu como público-alvo, alunos do ensino médio e foi baseado em dois livros didáticos e, devido à flexibilidade do planejamento, o projeto sofreu alterações durante a sua execução, de forma que os conteúdos e atividades fossem reorganizadas, possibilitando trabalhar, utilizando infográficos, atividade experimental e simulação. A interação entre os alunos foi perceptível e vinculada ao uso de metodologias diferenciadas (Santos, 2016 como citado em Marques, 2020).

Para a análise de dados utilizou a análise de conteúdo (Krippendorf, 2018), que permitiu fazer comparações sistemáticas entre os elementos de informação obtidos nos episódios por meio da utilização do instrumento de análise do MTSK (Moriel Junior & Alencar, 2019) adaptado para o BTSK por Marques (2020) contendo os Indicadores de Conhecimentos e a descrição do subdomínio do Conhecimento do Ensino da Biologia, suas Categorias trazidos por (Luís & Carrillo, 2020).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Subdomínio do Conhecimento do Ensino da Biologia

O subdomínio Conhecimento do Ensino da Biologia (*Knowledge of Biology Teaching* - KBT) foi fundamentado por Marques (2020) como "o conhecimento de estratégias de ensino da Biologia, como o uso dos recursos didático e material, a microscopia, trabalho experimental, aulas de campo, exposição dialógica, questionários, uso e/ou montagem de modelos tridimensionais e maquetes, uso de analogias, fragilidades e fortalezas do ensino." (pp. 32-33).

Ainda em 2020, Luís e Carrillo, fundamentaram que o Conhecimento do Ensino da Biologia diz sobre "o conhecimento das teorias de ensino, o conhecimento de estratégias, atividades, recursos, materiais no contexto do ensino das ciências e da biologia em particular" e a este subdomínio apresentaram duas Categorias: 1. *Conhecimento de estratégias, ciclos e sequências de aprendizagem, técnicas e atividades para o ensino de um conteúdo da biologia*: conhecimento de estratégias, atividades, técnicas específicas para o ensino de um tópico da biologia e da sua potencialidade enquanto promotora de aprendizagem. 2. *Conhecimento de recursos materiais, de linguagem ou virtuais de ensino associados a um conteúdo da biologia:* conhecimento dos recursos disponíveis para o ensino de um tópico da biologia, das suas potencialidades e limitações.

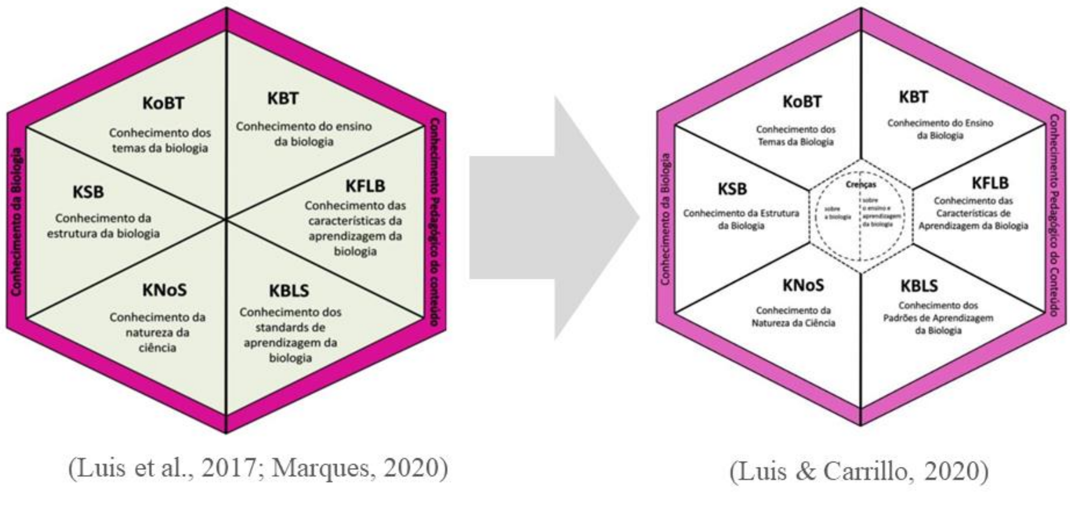


Figura 1. Modelos do BTSK

Dentre a análise apresentada por Marques (2020) desse PaP-eR sobre Sistema Respiratório foram caracterizados 15 (quinze) evidências do Conhecimentos do Ensino da Biologia, sendo que desses, 10 (dez) foram caracterizados como Indicadores de Conhecimentos de "Estratégias de ensino" e 5 (cinco) como Indicadores de Conhecimentos de "Recurso para ensinar".

Ao compararmos os resultados pautados nas fundamentações apresentadas por Marques (2020) e por Luís e Carrillo (2020) notamos que a análise contendo as Categorias no modelo sofreram duas alterações deixando de estarem caracterizadas como Conhecimento do Ensino da Biologia, pois se tratavam apenas de conhecimento do professor quanto à estratégia de ensino e a recursos materiais sem caracterizar o conhecimento especializado, e são elas, respectivamente:

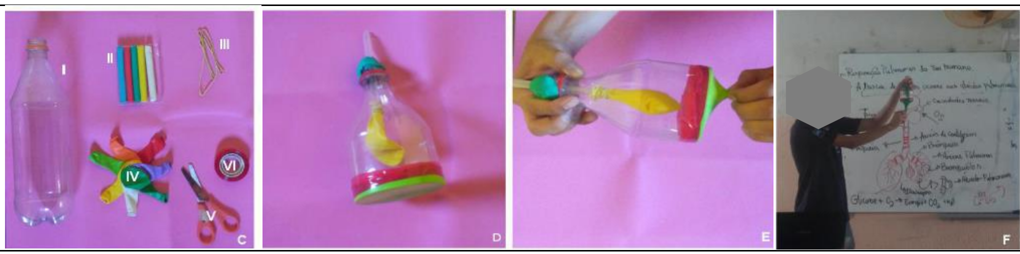
- **P2.§19.L5-6:** "Durante a análise foram realizadas perguntas que procurassem incentivar a curiosidade do aluno, bem como sua capacidade investigativa."
- **P2.§16.L2-3**: "Os principais recursos utilizados nas aulas seguintes foram o quadro branco e pinceis de quadro."

Todavia, as demais análises estavam de acordo ao se apresentarem como Indicadores de Conhecimento.

Esses Indicadores de Conhecimento foram descritos sucintamente sendo direcionados a estarem “associados a...” como sequência do que consiste o conhecimento. Dessa forma o “associado a...” ocupou o lugar da Categoria, fazendo alusão aos Indicadores de Conhecimentos, como demonstrado no T 1 como exemplo da posição que ocupam as designações referidas e a forma como foi organizada a informação disponível.

Tabela 1. Análise do BTSK

Trecho do artigo	Análise do Pesquisador		
Manifestação	Conhecimento	associado a	que consiste em
P2.§17.L6-9: "Devido à curta duração das aulas, ao invés da oficina utilizou-se do material (figura 1. c. d. e. f.) já preparado para realizar uma simulação dos movimentos respiratórios durante a explicação do conteúdo, caracterizando-se como uma estratégia rápida de adaptação à situação encontrada naquele momento."	do Ensino da Biologia (KBT)	recursos para ensinar	um recurso material para simular os movimentos respiratórios



Fonte: Marques (2020). Adaptado: Moriel Junior e Alencar (2019).

Elaborado pelos Autores.

No exemplo acima podemos notar que no decorrer da primeira análise, esta apresenta-se de forma superficial quanto à caracterização do detalhamento dos conhecimentos mobilizados pelo professor, por não possuir, nesse cenário, a Categoria.

No cenário atual, as evidências que antes foram apresentadas como Indicadores de Conhecimento, agora são integradas às Categorias e específicas ao ensino da Biologia, perdendo sua configuração genérica, conforme exemplificado na Figura 2. Nesses quadros apresentam-se quatro trechos analisados primeiramente com os indicadores pouco específicos e seguidamente com as Categorias já definidas no BTSK por Luis e Carrillo (2020).

Subdomínio do Conhecimento do ensino da Biologia - KBT
Trecho 1
P2.§9.L4-6: "Adotou-se três atividades em sua elaboração: (I) experimento para avaliar a qualidade do ar; (II) aula prática sobre o sistema respiratório; (III) oficina sobre a ventilação pulmonar."
Indicador de Conhecimento: Estratégias de ensino
Trecho 2
P2.§19.L5-6: "Durante a análise foram realizadas perguntas que procurassem incentivar a curiosidade do aluno, bem como sua capacidade investigativa."
Indicador de Conhecimento: Estratégias de ensino
Categoria: Conhecimento de estratégias, ciclos e sequências de aprendizagem, técnicas e atividades para o ensino de um conteúdo da Biologia.
Trecho 3
P2.§13.L3-5: "Para tornar o assunto mais didático e contribuir para o entendimento dos alunos foram preparados recursos audiovisuais para todas as aulas."
Indicador de Conhecimento: Recursos para ensinar
Trecho 4
P2.§18.L1-4: "Foi notável que a participação dos alunos tornou-se mais efetiva quando a aula não estava "presa" aos slides. Observou-se também que a aula com os slides se tornava mais rápida, menos interativa e muitas vezes se limitava ao que estava exposto na figura. Com o quadro, era possível retornar a outras partes, desenhar, apagar e redesenhar estruturas que fossem importantes."
Indicador de Conhecimento: Recursos para ensinar
Categoria: Conhecimento de recursos materiais, de linguagem ou virtuais de ensino associados a um conteúdo da Biologia.

Figura 2. Exemplos da Evolução do KBT

Fonte: Marques (2020). Elaboração dos Autores

Nesses exemplos acima, podemos ver que o Indicador de Conhecimento "Estratégia de ensino" tornou-se mais robusto e amplo sem perder a especificidade da disciplina em questão, sendo incluída à Categoria "Conhecimento de estratégias, ciclos e sequências de aprendizagem, técnicas e atividades para o ensino de um conteúdo da biologia". De igual forma, ao Indicador de Conhecimento dos "Recursos para ensinar" foi incorporado o detalhamento de conhecimentos sobre: Conhecimento de recursos materiais, de linguagem ou virtuais de ensino associados a um conteúdo da Biologia Luís & Carrillo, 2020).

Ao compararmos as descrições entre os Indicadores de Conhecimentos (Marques, 2020) e as Categorias (Luís & Carrillo, 2020) no modelo do BTSK, notamos que as Categorias trazem em suas descrições uma abrangência significativa e detalhada de conhecimentos embasadas em um referencial teórico robusto e específico ao ensino da Biologia como por exemplo: "Conhecimento de estratégias, ciclos e sequências de aprendizagem, técnicas e atividades para o ensino de um conteúdo da Biologia" caracterizada no Trecho 1 (P2.§9.L4-6) "Adotou-se três atividades em sua elaboração: (I) experimento para avaliar a qualidade do ar; (II) aula prática sobre o sistema respiratório; (III) oficina sobre a ventilação pulmonar."; ocasionando ao leitor a identificação e compreensão acurada do conhecimento referente ao Ensino de Biologia.

Ademais salientamos que as Categorias também trazem suas definições alicerçadas ao modelo teórico do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (Carrillo, et al., 2018), que mesmo sendo a Matemática distinta da Biologia epistemologicamente, deu-se por oportuno a fundamentação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando falamos sobre ensino da Biologia vemos um consenso sobre conhecimentos de professores e como esses devem ser refletidos em sua prática docente mobilizando tanto em aulas teóricas como práticas o conhecimento do conteúdo disciplinar ao conhecimento pedagógico, sendo esse último, amparado pelas necessidades de uso e inovação de estratégias e recursos didáticos.

O modelo do Conhecimento Especializado de Professores de Biologia vem passando pelo processo evolutivo apresentando em sua fundamentação robustez ao incorporar aos seus Conhecimentos, denominados Subdomínios, as Categorias com suporte teórico que permite incluir outros conhecimentos especializados ao ensino da Biologia, perdendo assim seus conceitos genéricos designados como Indicadores de Categorias.

É estimado o surgimento de novas Categorias à medida que Indicadores de Categorias sejam identificados na literatura e ressurtam de novas análises sobre o conhecimento de professores de Biologia (Luís & Carrillo, 2020).

Essa evolução traz ao BTSK maior significado e relevância ao que o modelo denomina como Conhecimentos Especializados que os professores de Biologia têm ou devem ter para ensinar determinados conteúdos, além do que, o BTSK tem apresentado potencial analítico e que poderá contribuir na formação de professores inicial e/ou continuada e na reflexão de sua prática.

Referências

Bogdan, R. C.& Birten, S. K. (1982). Qualitative research for education; an introduction for to theory and methods. Boston, .Allyn and Bacon, pp. 27-30.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., Montes, M.A., Escudero-Ávila, D. & Flores-Medrano, E. (Eds.) (2014). Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Krippendorf, K. (2018). Content analysis: An introduction to its methodology. Los Angeles: Sage Publications.

Loughran, J., Milory, P., Berry, A., Gunstone, R. & Mulhall, P. (2001). Documenting science teachers' pedagogical content knowledge through PaP-eRs. Research in Science Education, 31 (2), 289-307.

Luís, M., Monteiro, R., Carrillo, J. (2017). Conhecimento Especializado do Professor Quando Ensina Biologia e Matemática. Livro de Resumos do *XVII Encontro Nacional de Educação em Ciências, XVII ENEC, I Seminário Internacional de Educação em Ciências, I SIEC - Educação em Ciências em múltiplos contextos.* Viana do Castelo, Portugal. Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Luís, M., & Carrillo, J. (2020). O modelo do conhecimento especializado do professor de Biologia (btsk). Revista De Ensino De Ciências e Matemática, Luís, M., & Carrillo, J. (2020). O modelo do conhecimento especializado do professor de Biologia (btsk).11(7), pp. 19-36. doi:doi.org/10.26843/10.26843/rencima.v11i7.2788

Marques, M. (2020). Conhecimento Especializado de Professores de Biologia: análise de relatos de prática no Ensino Médio (Tese de mestrado). Mato Grosso: Cuiabá: Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologias do Estado de Mato Grosso.

Moriel Junior, J. G., & Alencar, A. P. (2019). Conhecimento especializado para ensinar Cálculo: um panorama da produção do COBENGE 2012-2017. Brazilian Journal of Development, 5(7), 7687-7702.

Nardi, R. (2009). Questões Atuais no Ensno de Ciências. Educação para Ciências. 2ª Ed. São Paulo: Escrituras Editora.

Nóvoa, A. (2009). Professores: imagens do futuro presente. Lisboa: Educa,

Pais, L.C. (2019). Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria. Disponível em: http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significado.pdf..

Perrenoud, P. (2000). Pedagogia diferenciada: das intenções à ação. Trad.Patrícia Chittoni Ramos.- Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

Pimenta, S.G. (2008). Formação de professores: Identidade e saberes da docência. In: PIMENTA, S.G. (Org.) Saberes pedagógicos e atividade docente. 6. ed.São Paulo: Cortez, pp. 15-34.

Silva, E. A. (2013). As metodologias qualitativas de investigação nas ciências sociais. Revista Angolana de Sociologia, pp. 77-99.

A RELEVÂNCIA DA LINGUAGEM PARA OS MODELOS TEÓRICOS DE CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DE PROFESSOR

The relevance of language to theoretical models of specialized knowledge of teachers

Moreira, J. [a]; Climent, N. [b]

[a] Instituto Federal de Mato Grosso; [b] Universidad de Huelva

Temática: 5 – Extensões do MTSK

Resumo. O objetivo deste artigo é identificar a relevância da linguagem para os modelos teóricos de Conhecimento Especializado de Professor partindo de uma análise o seu papel e importância para o ensino das ciências e matemática. A seleção de literatura foi realizada através das bases de dados ERIC e Google Acadêmico. A partir das buscas realizadas foram selecionados 4 artigos científicos originários de países distintos que descrevem a função da linguagem no ensino das ciências e matemática e apresentam o Conhecimento Especializado de Professor de Ciências sobre a linguagem do aluno.

Palavras-chave. Linguagem, Ciências, Matemática, MTSK.

Abstract. The aim of this article is to identify the relevance of language to theoretical models of Specialized Teacher Knowledge based on an analysis of its role and importance for the teaching of science and mathematics. The selection of literature was carried out through in the ERIC and Google Scholar databases. From the aforementioned search 4 scientific articles from different countries were selected, which describe the role of language in the teaching of Science and Mathematics and present the Science Teacher's Specialized Knowledge about the student's language.

Keywords. Language, Science, Mathematics, MTSK.

INTRODUÇÃO

Comunicar não é só transmitir uma mensagem, existem elementos que precisam se conectar a fim de que a informação seja compreendida pelo receptor e um deles é a linguagem. É através da linguagem, e quase que exclusivamente por ela, que a comunicação é estabelecida. A linguagem se desenvolve através da interação (Vygotski, 1986) e o pensamento está relacionado com ela, porque os indivíduos pensam através dela. A linguagem auxilia no processo de construção de conhecimento e estabelece as relações que propiciam o aprendizado.

Nesse sentido, é importante destacar que, embora sejam termos símiles, existem diferenças entre o significado de língua e de linguagem. De acordo com o linguista Marcuschi (2001), a língua é um sistema que vai além das regras e tem como objetivo promover a atividade sociointerativa. Sendo assim, compreende-se que a sua função vai além do próprio código e não está limitada a ser apenas um instrumento de transmissão de informações, pois ela contribui para a criação de novos mundos e para a construção do ser humano. A língua é uma parte da linguagem e é por meio dela que as ideias são expressas. Desse modo, pode-se notar a importância do seu uso em sala de aula quando um aluno prefere tirar dúvidas, sobre o que não entendeu de um conteúdo, com um colega de sala o qual fala a mesma língua que ele ao invés de recorrer a um professor (Breda et

Moreira, J., & Climent, N. (2021). A relevância da linguagem para os modelos teóricos de conhecimento especializado de professor. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 342–348). Congresseme.

al., 2013).

A linguagem está presente em todas as áreas do conhecimento, por isso é fundamental que os professores saibam a utilizar de modo adequado para ensiná-la aos seus alunos dentro de cada particularidade disciplinar. Shulman (1986) apontou uma das funções da linguagem no processo de ensino e aprendizagem na sua descrição do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, aludindo as formas de representações de ideias, analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações.

Muitos estudos foram desenvolvidos sobre o PCK[1] desde que Shulman introduziu a ideia sobre esse assunto. A partir disso, diversos modelos foram elaborados com o objetivo de descrever os conhecimentos necessários para a prática docente, entre eles o de Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK) (Carrillo, et al., 2014).

A partir da construção do modelo MTSK, outros modelos foram transpostos para outras disciplinas das ciências, primeiro para a Biologia (BTSK) (Luís, et al., 2015; Marques, 2020), em seguida para Física (PTSK) (Lima, 2018), depois para a Química (CTSK) (Soares, 2019) e para a Língua Portuguesa (PLTSK) há um projeto de transposição e alguns trabalhos realizados na área (Moreira, et al., 2019), as três últimas pesquisas foram desenvolvidas pelo PPGEn/Brasil[2].

O modelo teórico MTSK apresenta o formato hexagonal e em seu centro estão as crenças, que são os conceitos que norteiam as ações dos professores em relação ao ensino e à aprendizagem da matemática. Sua divisão apresenta dois domínios: Conhecimento Matemático (MK) e o Conhecimento Didático (PCK), sendo cada domínio dividido em três subdomínios e organizado da seguinte forma: Conhecimento Matemático (MK), Conhecimentos dos Tópicos (KoT), Conhecimento da Estrutura da Matemática (KSM), Conhecimento da Prática da Matemática (KPM); Conhecimento Didático do Conteúdo (PSK), Conhecimento do Ensino de Matemática (KMT), Conhecimento das Características da Aprendizagem de Matemática (KFLM), e Conhecimento das Normas da Aprendizagem de Matemática (KMLS). (Carrillo, et al., 2014).

O BTSK, modelo teórico da Biologia, também possui o formato hexagonal e tem um domínio das crenças e dois domínios denominados BK (Conhecimento da Biologia) e o PCK (Conhecimento do Conteúdo Pedagógico). O domínio BK possui três subdomínios, são eles: Conhecimento dos Temas da Biologia - KoBT (Knowledge of Topics of Biology); Conhecimento da Estrutura da Biología - KSB (Knowledge of the Structure of Biology) e o Conhecimento da Natureza da Ciência – KNoS (Knowledge of the Nature of Science). Os três subdomínios do PCK são: Conhecimento do Ensino da Biologia – KBT (Knowledge for Biology Teaching); Conhecimento das Características de Aprendizagem da Biologia – KFLB (Knowledge of the Features of Learning Biology) e o Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem da Biologia - KBLS (Knowledge of Biology Learning Standards) (Luís, et al., 2021).

chamados PK (Conhecimento da Física) e o PCK (Conhecimento do Conteúdo Pedagógico). Os subdomínios do PK são: Conhecimento dos Tópicos da Física - KoT (Knowledge of Topics of Physics); Conhecimento da Estrutura da Física - KSP (Knowledge of the Structure of Physics) e o Conhecimento da Prática da Física – KPP (Knowledge of Practices in Physics). Os subdomínios do PCK: Conhecimento das

[1] Sigla em inglês para: Pedagogical Content Knowledge
[2] Sigla para: Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Ensino do Instituto Federal de Mato Grosso – Brasil.

Características da Aprendizagem de Física KFLP (Knowledge of Features of Learning Physics); Conhecimento do Ensino de Física – KPT (Knowledge of Features of Knowledge of Physics Teaching) e o Conhecimento dos Parâmetros da Aprendizagem de Física – KPLS (Knowledge of Physics Learning Standards). Assim como os demais modelos, o PTSK possui crenças relacionadas ao ensino e aprendizagem da Física, porém os estudos realizados até o momento não apresentaram em que consiste esse conhecimento. (Luís, et al., 2021).

O modelo teórico de Química, CTSK, assim como os demais mencionados acima, é hexagonal e é composto por dois domínios: CK (Conhecimento da Química) e PCK (Conhecimento Pedagógico do Conteúdo). Os subdominios do CK: Conhecimento dos Tópicos da Química - KoTC (Knowledge of Topics of Chemistry); Conhecimento da Estrutura da Química - KSC (Knowledge of the Structure of Chemistry) e o Conhecimento de Pesquisa e Desenvolvimento da Química – KRDC (Knowledge of Research and Development of Chemistry). Os subdomíos do PCK: Conhecimento do Ensino de Química – KCT (Knowledge of Chemistry Teaching); Conhecimento das Características de Aprendizagem da Química – KFLC (Knowledge of Features of Learning Chemistry) e o Conhecimento dos Parâmetros da Aprendizagem de Química – KCLS (Knowledge of Chemistry Learning Standards). Semelhantemente ao PTSK, as crenças ainda não foram apresentadas para este modelo. (Luís, et al., 2021).

Esta revisão de literatura analisa o corpo de pesquisa existente sobre a linguagem no ensino das ciências e matemática e sua importância para os modelos teóricos de Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK), Biologia (BTSK), Química (CTSK) e Física (PTSK). A problemática que norteou esta investigação foi: Qual é a relevância da linguagem para os modelos teóricos de Conhecimento Especializado de Profesores de ciências e matemática?

Com o intuito de obter respostas para essa questão, foram selecionados quatro trabalhos científicos publicados em revistas científicas do Brasil, Inglaterra e Taiwan, entre os anos 2005 e 2020 sobre a linguagem no processo de ensino e aprendizagem das ciências e matemática.

METODOLOGIA

A presente pesquisa qualitativa (Bogdan e Biklen, 1982) foi realizada partir do levantamento e seleção de artigos científicos no Eric – Education Resources Information Center (Institute of Education Sciences) e no Google Acadêmico em dois momentos: a primeira busca utilizou o descritor “O papel da linguagem no ensino” e a segunda o descritor “O papel da linguagem no ensino das ciências. A coleta de dados foi realizada a partir das buscas dos artigos selecionados e analisados, que foram os seguintes: Linguagem e estruturação do pensamento na ciência e no ensino de ciências de Maurício Pietrocola (2005); Estudos envolvendo linguagem e educação química no período de 2000 a 2008 – Algumas Considerações de Cristhiane Cunha Flor e Suzani Cassiani (2012); Can the principles of topic specific PCK be applied across topics? Attending to science language demands in multilingual classrooms: a case study de Lay Hoon Seah e Rita Elaine Silver (2018); e A case study of a science teacher’s knowledge of students in relation to addressing the language demands of science de Lay Hoon Seah e Kennedy Kam Ho Chan (2020).

O critério estabelecido para a seleção dos trabalhos que foram examinados, era que todas as pesquisas apresentassem um estudo da linguagem relacionado às disciplinas de diversas áreas do conhecimento. Após a seleção dos artigos foi realizada a análise dos dados que consistiu em uma identificação dos conceitos de linguagem e de sua importância para o ensino das ciências e matemática.

A LINGUAGEM E O ENSINO DAS CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

A linguagem pode ser considerada uma ferramenta eficiente que viabiliza a comunicação e auxilia na transmissão de conhecimento, contudo o seu estudo em sala de aula, na maioria das vezes, está relacionado apenas à disciplina de língua portuguesa. Na realidade a linguagem está presente em todas as disciplinas e isso faz com que qualquer professor se torne também um professor de linguagem.

Pietrocola (2005) argumenta que a ciência possui diversas linguagens específicas para as disciplinas, entre elas está a "nominalizada" ou descritiva que ocorre durante o processo de ensino e requer a elaboração e uso de substantivos específicos para que os processos descritos pelos professores possam ser compreendidos pelos alunos. De acordo com o autor, o uso dos substantivos são recorrentes no ensino das ciências e matemática, pois os processos mais complexos progridem ao ser transformados em nomes.

Segundo o autor, existem outros tipos de linguagem na área das ciências como: a linguagem interpretativa (utiliza analogias, suposições, metáforas e as comparações); a linguagem de ideias e a linguagem de ordens. Essa variedade se justifica pela necessidade de adequação linguística em sala de aula, porque o aluno corre o risco de não compreender os termos utilizados pelo professor, considerando que muitos deles ainda não têm a noção da dimensão interpretativa da linguagem científica, por isso seria fundamental que o professor utilizasse uma linguagem mais próxima da realidade concreta do aluno. Pietrocola não excluiu a importância do uso da linguagem científica em sala de aula, ele propõe que a linguagem interpretativa seja usada no início, porque é necessário que os alunos compreendam o novo para que sejam inseridos no universo da linguagem científica.

A área de matemática também utiliza a linguagem científica e da mesma forma que nas ciências os alunos apresentam dificuldade no seu uso. Assim, no ensino de teoria dos conjuntos, os professores, geralmente, abordam conjunto e subconjuntos por meio de símbolos, porém alguns alunos apresentam dificuldade em atribuir um significado ao conteúdo por esses não se ajustarem a sua realidade local.

Além disso, a matemática está inserida de forma definitiva no seio das ciências e possui uma linguagem que se relaciona com o ensino de conhecimentos científicospossibilitando a organização do conhecimento (Pietrocola, 2005).

O desenvolvimento de pesquisas na área do ensino de ciências começou a inserir a linguagem em seus programas de pesquisa a partir da década de 90. Todavia para o ensino de química, relacionado à linguagem e educação química no ensino médio e superior entre os anos de 2000 a 2008, Flor e Cassiani (2012) identificaram apenas 17 pesquisas realizadas no Brasil.

Com base nisso, torna-se notório que a linguagem tem um papel significativo no ensino e aprendizagem em qualquer área do conhecimento, para este estudo é enfatizada as áreas das ciências e matemática. Na prática docente a linguagem tem uma função inigualável, considerando que é através dela que os alunos aprendem, logo é imprescindível que o professor saiba fazer o seu uso de modo adequado. Moraes (2009, p.69) destaca que "É pela leitura e pela escrita que se podem atingir conhecimentos mais complexos, com aproximação dos conhecimentos dos alunos do conhecimento da ciência.".

Seah e Silver (2018) analisaram como três professores de ciências secundária atenderam às demandas de linguagem da ciência. Foram realizadas gravações de vídeo em três classes compreendendo três conjuntos completos de lições sobre o Sistema Circulatório Humano (HCS), um tópico de biologia que é complexo até mesmo para os docentes. A investigação mostrou que o papel da linguagem nas ciências requer o conhecimento da terminologia específica do tópico, a terminologia para conceitos científicos, o uso da linguagem e dos conceitos de forma adequada. A análise dos dados apontou que dos três professores participantes da pesquisa apenas uma tinha uma visão mais ampla sobre a necessidade do aluno em relação à linguagem da ciência. Esse diferencial está ligado ao Conhecimento dos Professores sobre os Alunos. De acordo com as autoras, um estudo antecedente realizado por Seah (2013) mostrou que o Knowledge Students (KS) desempenha um papel importante sobre como os professores promovem a instrução focada na linguagem para lidar com o demandas de linguagem das ciência. Apenas avaliar a escrita dos alunos conforme a "correção" científica não é o suficiente, pois

> Os professores precisam examinar o uso da linguagem de seus alunos além de uma visão dicotômica de precisão científica. Em vez disso, eles precisam entender existe a possibilidade de que o uso inadequado da linguagem pelos alunos pode ser uma questão conceitual e / ou representacional (Seah, 2013). Este é um tópico que pode ser abordado no desenvolvimento profissional de professores (Seah e Silver, 2018, p.15).

Seah e Chan (2020) buscaram desvendar o KS de um professor relacionado ao uso da linguagem em Ciências e descobrir como esse KS informa as práticas de ensino. Os autores salientaram que o KS tem cinco aspectos que informam quatro práticas de ensino: 1. conhecimento prévio da e sobre a linguagem; 2. dificuldades com a linguagem; 3. habilidades nos modos de linguagem; 4. habilidades nas áreas de estudo e 5. progresso de aprendizagem. Sob ese viés, é válido reforçar que o estudo de caso realizado apresenta uma análise do KS que muitas vezes é esquecida na literatura atual sobre o Conhecimento do Conteúdo Pedagógico (PCK) para o ensino de ciências.

> [...] os estudos atuais de PCK de KS tendem a se concentrar na compreensão dos professores sobre os alunos (pré -) - concepções e / ou dificuldades relacionadas aos conceitos, em vez das capacidades dos alunos aprender a linguagem relacionada a conhecimentos científicos específicos (Seah e Chan, 2020, p. 1).

Por fim, Seah e Chan (op. citada) concluíram que é importante explicitar os aspectos do KS assim como encorajar os professores a refletir sobre eles, prestando mais atenção ao uso da linguagem dos alunos em sala de aula. Os autores reforçaram que o KS sozinho não atenderá todas as necessidades de linguagem dos alunos, pois outros elementos são importantes, como buscar recursos e oportunidades de desenvolvimento que trarão aos professores as estratégias necessárias para as abordagens instrucionais.

CONCLUSÃO

O artigo apresentou o papel significativo da linguagem em qualquer área do conhecimento, com ênfase para as ciências e matemática. A análise dos artigos selecionados enuncia que a falta de adequação da linguagem no ensino dos conteúdos tem sido uma das barreiras que dificulta a aprendizagem dos alunos, tendo em vista que existem diversas linguagens, inclusive a advinda dos discentes, que muitas vezes são desconsideradas no processo, por isso torna-se fundamental que o docente não priorize apenas a linguagem científica em sala de aula.

Sob esse viés, é válido enfatizar que, na maioria das vezes, a adequação linguística no ensino de conteúdos não ocorre em sala de aula pelo fato do professor "desconhecer" ou não perceber essa necessidade, sendo esse fato uma das limitações para a eficácia no processo de ensino e aprendizagem das disciplinas. Nesse sentido, o Conhecimento do professor sobre o aluno (KS) surge como um caminho para atenuar esses entraves, considerando que em um de seus elementos encontra-se a alfabetização disciplinar que visa atender às necessidades de linguagem dos alunos e promover a compreensão conceitual das áreas do conhecimento.

É fundamental enfatizar que o MTSK já apresenta os conceitos do KS em seu subdomínio Conhecimento das características de aprendizagem (KFLM), mais especificamente, na categoria denominada "Conhecimento sobre as Formas de Interação dos Alunos com o Conteúdo matemático" que se refere ao "conhecimento que o professor possui sobre a processos e estratégias dos alunos, típicos e não habituais, e para o conhecimento sobre a possível linguagem ou vocabulário comumente usado ao abordar um determinado conteúdo (Sosa, Aguayo e Huitrado, 2013)." (Carrillo, et al., 2014, p. 81)

Em suma, seria relevante para a educação que o KS fosse abordado nos cursos de formação docente com o objetivo de aprimorar o conhecimento dos professores sobre as demandas linguísticas no ensino. Outrossim, a inserção do KS nos modelos de conhecimentos especializados de professores (BTSK, PTSK, CTSK e PLTSK) desponta como uma possibilidade que contribuirá para a instrução dos professores em relação à linguagem nos modelos das ciências e de língua portuguesa, tendo em vista que o KS é considerado um conhecimento especializado, evidenciando desse modo a relevância da linguagem para os referidos modelos teóricos. Todavia é necessário refletir: o KS poderia ser inserido como uma categoria nos demais modelos de conhecimentos especializados de professor? O KS coadunaria com a epistemologia destes modelos teóricos de conhecimento especializado de professor? Esses questionamentos poderão ser desenvolvidos em futuras investigações sobre o tema.

Referências

Bogdan, R. C. e Biklen, S. K. (1982). *Qualitative research for education; an introduction for to theory and methods.* Boston. Allyn and Bacon, pp. 27-30.

Breda, A., Pelicioni, A. F., e Ramos, M. G. (2013). A função da linguagem no ensino de ciências e matemática: um olhar sobre o que pensam os professores. *XI Congresso Nacional de Educação, EDUCERE*, Curitiba. 8098-8115.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., Montes, M.A., Escuro-Ávila, D., e Flores-Medrano, E. (Eds.) (2014). Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas. Huelva: *Universidad de Huelva Publicaciones*.

Flor, C. C. e Cassiani, S. (2012). Estudos envolvendo linguagem e educação química no período de 2000 a 2008 – Algumas considerações. *Revista Ensaio*. Belo Horizonte, 14(1), 181-193.

Lima, S.S. (2018) *Conhecimento Especializado de Professores de Física: Proposta de Modelo*. (Dissertação de mestrado). Instituto Federal de Mato Grosso em associação com Universidadede Cuiabá, Cuiabá. (Documento Inédito).

Luís, M., Monteiro, R., e Carrillo, J. (2015). Conhecimento especializado de professor para ensinar ciências. In: *Encontro Nacional de Educação em Ciências, XVI.* Lisboa. Lisboa: APEduC, 1-6.

Marcuschi, L. A. (2001). *Da fala para a escrita: atividades de retextualização*. São Paulo: Cortez. 3(2), 1-133.

Marques, M. (2020). *Conhecimento Especializado de Professores de Biologia para ensinar Reprodução.* (Dissertação de mestrado). Instituto Federal De Mato Grosso em associação coma Universidade de Cuiabá, Cuiabá. (Documento Inédito).

Moraes, R. (2009). Educar pela pesquisa: possibilidades para uma abordagem transversal no ensino da Química. *Acta Scientiae*, 11(1), 62-72.

Moreira, J., Marques, M., e Evangelista, E. (2020). Conhecimento especializado de professores de Língua Portuguesa PLTSK: transposição direta do MTSK. *Research, Society and Development*, 9(1), 1-20. Doi: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i11.9513.

Pietrocola, M. (2005). Linguagem e estruturação do pensamento na ciência e no ensino de ciências. Em M. Pietrocola (Org.), *Filosofia, Ciência e História*. Discurso editorial, 1-18.

Seah, L. H., e Yore, L. D. (2017). The roles of teachers' science talk in revealing language demands within diverse elementary school classrooms: a study of teaching heat and temperature in Singapore. *International Journal of Science Education*, 39(2), 135-157. Doi: https://doi.org/10.1080/09500693.2016.1270477.

Seah, L. H. e Silver, R. E. (2018). Attending to science language demands in multilingual classrooms: a case study, *International Journal of Science Education*. 1-20. Doi: doi:10.1080/09500693.2018.1504177.

Seah, H. L. e Chan, K. K. H. (2020). A case study of a science teacher's knowledge of students in relation to addressing the language demands of science. *International Journal of Science and Mathematics Education*. 1-21.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Education Researcher*. 15(2), 4 - 14.

Soares, S.T.C. (2019) *Conhecimento Especializado de Professores de Química: Proposta de Modelo com* detalhamento *do Conhecimento dos Tópicos*. (Dissertação de mestrado). Instituto Federal de Mato Grosso em associação com Universidade de Cuiabá, Cuiabá. (Documento Inédito).

Vygotsky, L. S. (1986). *Pensamento e linguagem*. Cambridge, MA: The MIT Press.

RELACIONANDO EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMATICAS CON LA COMPETENCIA NOTICING

Linking the mathematics teacher specialized knowledge with noticing competence

López, L. M. [a], Zakaryan, D. [b]

[a, b] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Temática: 5 – Extensiones del MTSK

Resumen. El propósito de esta comunicación es realizar una aproximación hacia las relaciones entre el conocimiento especializado y las creencias del profesor de matemáticas, y la concepción del noticing como competencia profesional, dada la importancia de estos constructos en la educación matemática. Exponemos algunos antecedentes relevantes sobre el tema y discutimos teóricamente las potenciales relaciones. Como resultado de esta discusión, presentamos un esquema que pretende orientar la relación entre el MTSK y el noticing. Concluimos con la necesidad de una instancia de diálogo con investigadores interesados en el tema y de estudios empíricos que permitan confirmar, fortalecer o modificar el esquema propuesto, comprendiendo mejor tales relaciones.

Palabras clave. MTSK, noticing, creencias, profesor de matemáticas

Abstract. The purpose of this paper is to make an approach towards the relationships between the specialized knowledge and beliefs of the mathematics teacher, and the conception of noticing as a professional competence, given the importance of these constructs in mathematics education. We expose some relevant background on the topic and discuss theoretically the potential relationships. As a result of this discussion, we present a diagram that aims to guide the relationship between MTSK and noticing. We conclude with the need for a dialogue with researchers interested in the subject and for empirical studies to confirm, strengthen or modify the proposed diagram, in order to better understand these relationships.

Keywords. MTSK, noticing, beliefs, mathematics teacher

INTRODUCCIÓN

El estudio del *noticing* es una de las líneas de investigación en Didáctica de la Matemática que ha adquirido mayor relevancia durante las últimas décadas (Sherin, Jacobs y Phillip, 2011; Dindyal, Shack, Choy y Sherin, 2021), está en constante desarrollo y es explorado desde distintas perspectivas. Se entiende por noticing el acto de *percibir y darse cuenta de algo*. Es un acto sencillo que se realiza en la cotidianidad pero que adquiere connotaciones relevantes en ámbitos profesionales. De acuerdo a Goodwin (1994), los profesionales ven el mundo de forma relevante para su profesión, observan características claves para su trabajo y dan sentido a los acontecimientos como una actividad situada dentro de un grupo social concreto. Es decir, en un mismo contexto, distintos profesionales realizan noticing según sus propias competencias e intereses, este acto tiene sentido y relevancia para una comunidad de profesionales en específico. Conviene reconocer que en educación existen distintos profesionales, sin embargo, en particular, nos interesan los profesores de matemáticas.

El noticing es algo que los profesores realizan todo el tiempo, ya que todo acto de enseñanza depende del noticing (Mason, 2002). Tal como declara el autor, aunque

López, L. M., & Zakaryan, D. (2021). Relacionando el conocimiento especializado del profesor de matematicas con la competencia noticing. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 349–356). Congresseme.

percibimos todo el tiempo, “ciertamente no nos damos cuenta de todo” (Mason, 2002, p. 29), ya que el noticing “requiere tres cosas: estar presente y ser sensible en el momento, tener una razón para actuar y tener un acto diferente en mente.” (p.1). Es decir, por mucho que se crea estar atento a lo que está sucediendo, inevitablemente hay aspectos que se escapan de ser notados (Mason, 2002; Sherin, 2007). Esta sensibilidad, entendida desde la postura de Mason (2002), está asociada a la conciencia y significa que solamente se puede percibir aquello para lo que se está preparado para notar, por lo que, se debe y se puede desarrollar.

Consecuentemente, el constructo del noticing del profesor es particularmente relevante en la educación matemática (van Es y Sherin, 2021) de manera que, actualmente es considerado por distintos investigadores como un aspecto fundamental de la competencia profesional del profesor de matemáticas en relación con las distintas prácticas que realiza en el aula (Dindyal et al., 2021; Fernández y Choy, 2020; Mason, 2002, 2011).

El propósito de esta comunicación es realizar una aproximación hacia las relaciones entre el conocimiento especializado y las creencias del profesor de matemáticas y la concepción del noticing como competencia profesional. Realizamos una discusión teórica y presentamos un esquema que pretende orientar la relación entre el MTSK y el noticing a partir del modelo de van Es y Sherin (2002, 2021), que detallaremos más adelante.

CONOCIMIENTO DEL PROFESOR Y SU NOTICING

Referente a las investigaciones que focalizan el conocimiento del profesor conviene distinguir dos posturas no declaradas, una que asume el conocimiento de manera implícita, y la otra que explicita y enfoca la articulación de modelos, marcos teóricos o referentes para comprender esta relación. Es así que se, se observa una tendencia a utilizar la noción de *conocimiento matemático para la enseñanza* (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT) (Ball, Thames, y Phelps, 2008).

En esta línea, Dick (2017) realiza un estudio con cuatro estudiantes en práctica en el aula de primer grado que busca encontrar la relación entre el desarrollo del MKT, específicamente el subdominio del *Conocimiento especializado del contenido* (Specialized Content Knowledge, SCK), con el *professional noticing* propuesto por Jacobs et al. (2010) (identificar, interpretar y decidir), a través del análisis de muestras de trabajo donde los estudiantes dejan evidencia de su pensamiento matemático. Sus resultados muestran que el SCK, es una parte integral del *noticing profesional* y sugieren que en tareas matemáticas situadas y centradas en el desarrollo del SCK, así como en el marco del *professional noticing*, los profesores en formación pueden aumentarlo.

Por otra parte, Thomas, Jong, Fisher, y Schack (2017) sugieren que existen potenciales conexiones entre el profesional noticing y otras perspectivas y constructos, como las actitudes y creencias, pero su objetivo principal está en determinar la posible relación entre el profesional noticing y el MKT. Asimismo, Brown, Fernández, Helliwell, y Llinares (2019) se focalizaron en explorar las diferentes formas en la que los futuros profesores construían su propio conocimiento en una variedad de ambientes sociales, buscando comprender el aprendizaje de futuros profesores sobre la enseñanza de las matemáticas. Para ello, establecen un diálogo entre el profesional noticing de la postura de Jacobs et al. (2010) y el conocimiento del profesor, MKT.

Asimismo, en el trabajo de Zapatera y Callejo de la Vega (2018), los investigadores caracterizan los perfiles de estudiantes para maestro a partir del conocimiento matemático y la mirada profesional (professional noticing) en el contexto de la generalización de patrones. Para el noticing ocupan las ideas de Jacobs et al. (2010), tomando solamente las destrezas identificar e interpretar; mientras que para el conocimiento matemático asumen de manera general la propuesta de Ball et al. (2008). Además de la caracterización de perfiles, que ha sido el propósito de la investigación, los autores manifiestan (con base en sus resultados) que el tener un conocimiento alto no garantiza tener la habilidad de la mirada profesional.

Por último, los resultados de Cross, Eker, Lloyd, Jinqing, y Alhayyan (2017) documentan que un profesor con un fuerte MKT es capaz de identificar eventos más significativos, interpretarlos con sentido y conectarlos con las prácticas instructivas; en contraste, un profesor con bajo MKT también puede notar el pensamiento de los alumnos, pero puede tener dificultades para interpretarlo o conectarlo de forma más significativa con las soluciones pedagógicas. Los resultados también sugieren que puede haber otros factores en juego o que hay dimensiones del MKT que pueden apoyar de mejor manera el noticing y no fueron tomados en cuenta en este estudio.

COMPETENCIA DE NOTICING Y MTSK

En cuanto a los estudios que han investigado sobre la relación entre el noticing y el MTSK, cabe destacar el trabajo de Badillo y Fernández (2018) quienes analizan nexos y diferencias entre estos dos constructos. Así, consideran la competencia mirar profesionalmente desde las destrezas de atender, interpretar y decidir cómo responder (Jacobs, et al. 2010); y el MTSK como un modelo que ofrece herramientas y constructos teóricos para caracterizar el conocimiento que un profesor posee. A partir de estas ideas, muestran cómo distintos conocimientos asisten de distintas maneras a los tres momentos del noticing. Así, inicialmente argumentan que atender e interpretar se relacionan con el KoT, el KSM, el KPM y el KFML, mientras que para decidir cómo responder se debe usar el KMT, el KFLM y el KMLS; aunque esto "no significa que el resto de subdominios no estén implicados en las diferentes destrezas de atender, interpretar y decidir" (Badillo y Fernández, 2018, p.69). Para las autoras, el MTSK permite comprender cómo el profesor usa el MK y el PCK para identificar e interpretar aspectos relacionados al pensamiento matemático de los estudiantes, y posteriormente decidir.

En esta comunicación, de manera diferente al estudio anterior, consideramos el Learning to notice framework para la discusión de su relación con el MTSK, por tanto, nos detendremos brevemente en su descripción. El *learning to notice* framework construido por van Es y Sherin (2002) y Sherin (2007), define el noticing como la habilidad para notar e interpretar características significativas de las interacciones en el aula y propone dos subprocesos para tal visión: (1) la atención selectiva (attending) y (2) el razonamiento basado en el conocimiento (interpreting).

Tabla 1. Dimensiones y procesos del learning to notice framework.

Dimensión	Procesos
Atención selectiva	Identificar las características más destacadas de las interacciones en el aula
	Ignorar determinadas características de las interacciones en el aula
Interpretación	Utilizar los conocimientos y experiencias propios para dar sentido a lo que se observa
	Adoptar una postura de indagación
Perfilar (shaping)	Construir interacciones y contextos que den acceso a información adicional

Fuente: van Es y Sherin (2021, p.19). Traducción propia.

Posteriormente, las autoras añaden un tercer proceso denominado "formación" (shaping), relacionado con la interacción que ocurre en el momento, así como la creación de interacciones con el fin de acceder a información adicional, en este caso sobre el pensamiento de los alumnos, que puede convertirse en objeto de una mayor atención e interpretación (van Es y Sherin, 2021). El modelo original de van Es y Sherin (2002) ha recibido una expansión en 2021. En esta nueva visión, el modelo cuenta con tres dimensiones y cinco procesos. La Tabla 1 presenta de manera resumida los elementos del *learning to notice framework d*e la versión expandida.

A continuación, describiremos cada una de estas dimensiones en relación con el modelo de MTSK y discutiremos cómo los tres dominios (conocimiento matemático, conocimiento didáctico del contenido y las creencias) del modelo se presentan en las distintas dimensiones del noticing para atender, interpretar y dar forma a lo notado.

Atención selectiva

En cuanto a la dimensión de atención selectiva, van Es y Sherin (2021) la definen como el acto de identificar acontecimientos dignos de mención. Así, el primero de los procesos, *identificar*, se refiere a identificar lo que es digno de mención en una situación educativa, el profesor debe en cada clase prestar atención a lo que hacen y dicen los alumnos, cómo piensan sobre el tema, qué analogías o representaciones utilizan para transmitir mejor las ideas y qué experiencias pueden ofrecer para que los estudiantes se impliquen en el aprendizaje (van Es y Sherin, 2002). Sin embargo, el profesor presta atención a otras características que surgen de las interacciones que se producen en el aula. Muchas de ellas se categorizan en aspectos pedagógicos, otras, no son de interés en determinada situación. El segundo proceso del modelo va en esta dirección: la atención selectiva toma en consideración aquellas características que *ignora*. Atender implica no sólo observar atentamente algunas características del entorno del aula, sino también desatender otros aspectos de ese entorno (van Es y Sherin, 2021).

Sin pretensión de hacer una revisión exhaustiva de las creencias de los profesores de matemáticas, asumimos que el interés del profesor hacia algo que le llama la atención, está relacionado con las creencias que tiene, ya que las creencias se perciben "constantemente en la toma de determinaciones y en el análisis e interpretación de las producciones que conforman su investigación [sobre matemáticas, su enseñanza y aprendizaje]" (Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar, y Carrillo, 2014, p.83), las creencias se vuelven "las lentes a través de las cuales se mira al interpretar el mundo" (Philipp, 2007, p. 258). Lo que a un profesor le llama la atención, posiblemente, para el otro no sea así, esto se debe a distintos factores: el contexto, la experiencia, la influencia que ejerce sobre él la comunidad científica a la que pertenece, la propia epistemología científica, la identidad profesional, las concepciones sobre enseñanza-aprendizaje, en resumen, las creencias que del profesor.

Asimismo, aceptamos la postura que las creencias del profesor influyen en su conocimiento especializado, por lo que su estudio ayuda a comprender cuál es la filosofía que subyace en el actuar del profesor (Carrillo et al., 2018). En consecuencia, el noticing, que es un acto que el profesor realiza, también se ve afectado por las creencias de éste. En el esquema presentado en la Figura 1, partimos de la noción que son las creencias del profesor las que influyen en lo que, en principio, considera se debe atender o desatender, es decir, las creencias sobre la matemática y sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se vuelven el primer punto de partida al realizar noticing.

Interpretación

La segunda dimensión, *interpretación*, se relaciona a la habilidad para hacer conexiones entre un hecho específico y las ideas más amplias que este representa. El profesor debe utilizar lo que sabe sobre el contexto para razonar sobre las interacciones en el aula, debe utilizar su conocimiento de la materia, el conocimiento de cómo los estudiantes piensan en la materia, así como el conocimiento de su contexto local para razonar sobre los acontecimientos a medida que se desarrollan. En otras palabras, las interacciones que se producen entre un profesor de matemáticas en su aula de clase, no son las mismas que las que se producen entre un profesor de literatura o de ciencias. Esta dimensión incluye una amplia gama de procesos cognitivos (Sherin, 2007). El segundo proceso, *tomar una postura de indagación,* es el proceso mental por el cual el profesor asume "un nuevo marco epistemológico para el trabajo de notar, uno que implica tratar de averiguar lo que los estudiantes quieren decir" (van Es y Sherin, 2021, p. 22).

Una vez identificados los elementos matemáticos de las interacciones con los estudiantes, el profesor pasa a interpretar estas interacciones. En una primera instancia, consideramos que se necesita del *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)* que permite al profesor interpretar el proceso de comprensión de los estudiantes sobre la situación atendida, reconocer el lenguaje utilizado, las fortalezas y dificultades que presenta, las estrategias habituales, errores o dificultades y decidir si debe o no crear nuevas formas de interacción.

Por otra parte, para identificar los elementos matemáticos que se observan en las interacciones con los estudiantes, se pone en acción el MK del profesor con alguno o todos los tres subdominios (KoT, KSM y KPM) dependiendo de lo notado. Así, puede darse que es a partir del *Conocimiento de los Temas (KoT*) que el profesor comience a interpretar lo observado, es a través de los aspectos fenomenológicos, significados, definiciones, ejemplos, propiedades, los registros de representación, que se puede caracterizar diferentes aspectos del tema abordado para encontrar la conexión existente entre conceptos más elementales con aquellos conceptos avanzados o viceversa; así como encontrar las conexiones transversales o auxiliares entre contenidos matemáticos (*Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas, KSM*). Esta primera interpretación también puede darse desde su *Conocimiento de la práctica matemática (KPM*) con el fin de establecer una suerte de conciencia para gestionar los razonamientos matemáticos puestos en uso por los estudiantes (y así proceder para avanzar o "dar forma" a lo atendido, en la siguiente dimensión).

Dar forma

La tercera dimensión, *"shaping",* la cual hemos traducido como "dar forma", implica que los profesores construyan interacciones (preguntas o acciones), en medio del noticing, para acceder a información adicional sobre el pensamiento de los estudiantes que apoye al noticing previamente realizado y que le permitirá avanzar o interpretar lo notado de manera más precisa. Ciertamente, todas las preguntas de un profesor o la interacción entre un profesor y un alumno no constituyen una forma de enseñar, es decir, las preguntas e interacciones de interés son aquellas destinadas a revelar más el pensamiento de un estudiante proporcionando información adicional para que los maestros noten para dar sentido a la idea de un estudiante (van Es y Sherin, 2021). A nuestra consideración, esta dimensión no siempre va a aparecer, es, por lo tanto, un elemento que aparece y desaparece según sea el nivel de interpretación que alcance el profesor con base a lo atendido.

Consideramos que, en esta instancia, el profesor necesita el *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT)* que permite dar forma a partir del conocimiento que el profesor posee de las teorías de enseñanza formales o personales asociadas a un contenido matemático, sobre las características matemáticas específicas de recursos didácticos para la enseñanza de un determinado contenido, así como las estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático las que permiten al profesor decidir si la primera comprensión es suficiente o si requiere establecer nuevas interacciones. También requiere del *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)* que permite al profesor ubicar lo atendido en un momento, en un tiempo, en un nivel educativo, en un currículo específico. De esta manera, el profesor puede establecer un referente sobre la profundidad de lo observado, lo que debe/puede mostrar y lo que muestra, y decidir si requiere profundizar más en el pensamiento del estudiante.

En resumen, el marco de noticing propuesto por van Es y Sherin (2007, 2021) involucra las creencias para seleccionar lo que es (o no es) relevante de una interacción didáctica (práctica), interpretarla al usar conocimiento (teórico) y crear otras interacciones a fin de *elicitar* más el pensamiento de los estudiantes para que el profesor pueda dar sentido a las ideas de los estudiantes, lo que puede ser posteriormente el objeto de atención e interpretación. Obsérvese que este modelo se interesa por la acción (los procesos mentales) que realiza el profesor en el momento y no por lo que se hará después, lo cual es coherente con la definición previamente dada de noticing: el profesor percibe algo de interés para él, la enseñanza o el aprendizaje de las matemáticas, y lo comprende a través de la interpretación y la formulación de nuevas interacciones que esclarecen lo previamente notado.

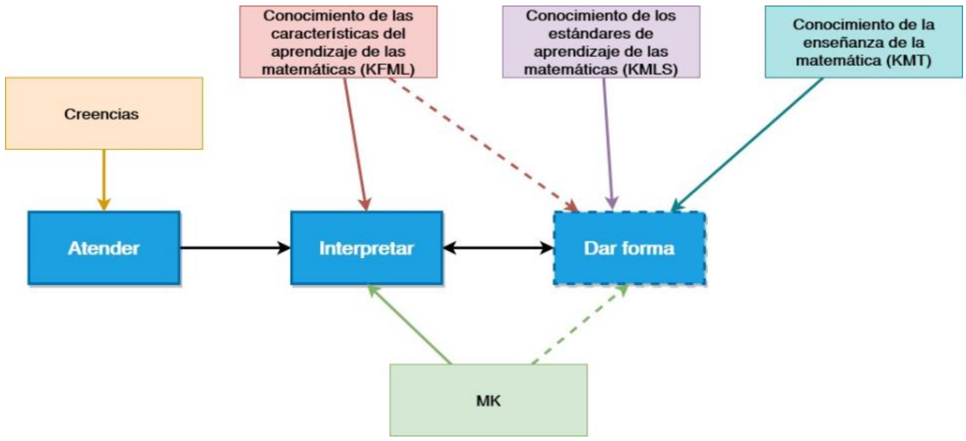


Figura 1. Esquema de relación entre el modelo MTSK y la competencia noticing. Elaboración propia.

De este modo, el esquema presentado parte de los procesos definidos de noticing: atender, interpretar y dar forma. En la atención selectiva del profesor se involucran sus creencias acerca de la matemática y de su enseñanza y aprendizaje. Cabe destacar que el conocimiento especializado del profesor en algunas ocasiones aparece de forma explícita (línea continua) mientras que, en otras, aparece como auxiliar frente a otros conocimientos más directos; esta relación se presenta con las flechas cuya línea es punteada. Por ejemplo, para dar forma, el KMT se visualiza claramente como un conocimiento fuertemente involucrado ya que es el que permite establecer los medios y formas para crear las nuevas interacciones. Sin embargo, detrás de este conocimiento está el MK que permea el conocimiento implicado para a la vez, interpretar y dar forma. La flecha que relaciona los procesos la interpretación y el dar forma es bidireccional. La línea punteada del dar forma indica que, en ocasiones, este proceso puede no aparecer.

IMPLICACIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Como formadores de profesores e investigadores, uno de nuestros objetivos es comprender cómo el MTSK está involucrado en el noticing. Nuestros primeros avances giran en torno a comprender desde la teoría la relación entre creencias, conocimiento especializado y la competencia de noticing: este documento es producto de una primera aproximación hacia esta relación. Sin embargo, se requieren estudios empíricos que permitan confirmar, fortalecer o modificar el esquema propuesto, comprendiendo mejor tales relaciones. A partir de ello, la tesis doctoral que pretendemos desarrollar tratará de contribuir a esta comprensión. Somos conscientes que la relación descrita es asumida desde la postura de van Es y Sherin, pero podría suceder que otros investigadores estén más interesados en relacionar el MTKS con las destrezas descritas por Jacobs et al. (2010), lo cual es un producto en construcción. De todas maneras, es interesante discutir y encontrar puntos comunes o posturas diferentes al respecto. En este sentido, la presente comunicación se plantea como una instancia para generar diálogos entre colegas con un mismo interés y como un punto de partida para profundizar en ambos constructos con el fin de realizar estudios relacionados.

AGRADECIMIENTOS

Beca ANID, Doctorado Nacional año 2021, folio: 21210589

Referencias

Aguilar-González, Á., Muñoz-Catalán, M. C., & Carrillo, J. (2019). An Example of Connections between the Mathematics Teacher's Conceptions and Specialised Knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(2), 1-15. https://doi.org/10.29333/ejmste/101598

Amador, J., Estapa, A., Kosko, K., y Weston, T. (2019). Prospective teachers' noticing and mathematical decisions to respond: using technology to approximate practice. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 52*(1), 3-22. https://doi.org/10.1080/0020739x.2019.1656828

Badillo, E. y Fernández, C. (2018). Oportunidades que emergen de la relación entre perspectivas: Análisis del conocimiento y/o competencia docente. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 66-80). Gijón, España: SEIEM.

Ball, D., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Brown, L., Fernández, C., Helliwell, T., y Llinares, S. (2019). Prospective mathematics teachers as learners in university and school contexts: From university-based activities to classroom practice. En O. Chapman, y G. Lloyd (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 3: Participants in Mathematics Teacher Education* (2ed., Vol. 3, pp. 434-366). Leiden, Netherlands: Brill Academic Publishers.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20* (3), 236–253.

Cross Francis, D., Eker, A., Lloyd, K., Jinqing, L., y Alhayyan, A. (2017). Exploring the relationship between teacher's noticing, mathematical knowledge for teaching, efficacy and emotions. En Galindo, E., y Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 1222-1225). Indianapolis, USA: Association of Mathematics Teacher Educators.

Dick, L. K. (2017). Investigating the Relationship Between Professional Noticing and Specialized Content Knowledge. En E. O. Schack, M. H. Fisher, y J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 339-358). Nueva York: Springer https://doi.org/10.1007/978-3-319-46753-5_20

Dindyal, J., Schack, E.O., Choy, B.H. y Sherin, M.G. (2021). Exploring the terrains of mathematics teacher noticing. *ZDM Mathematics Education 53*, 1–16. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01249-y

Fernández, C., y Choy, B. H. (2020). Theoretical lenses to develop mathematics teacher noticing. En S. Llinares y O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education* (Vol. 2, pp. 337–360). Leiden, Netherlands: Brill Academic Publishers.

Flores-Medrano, E., Escudero-Avila, D., Montes, M., Aguilar, A., y Carrillo, J. (2014). Nuestra Modelación del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, N. Climent, L. C. Contreras, M. Montes, D. Escudero-Avila, y E. Flores-Medrano (Eds.), *Un Marco Teórico para el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 71–93). Huelva, Spain: Universidad de Huelva Publicaciones.

Goodwin, C. (1994). Professional vision. *American Anthropologist, 96*(3), 606–633. https://doi.org/10.1525/aa.1994.96.3.02a00100

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C., y Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169–202.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Londres: Routledge.

Mason, J. (2011). Noticing: Roots and branches. En M. Sherin, V. Jacobs, y R. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 35–50). Nueva York: Routledge.

Philipp R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En Lester F.K. Jr (Ed) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics.* (pp. 257-315). Charlotte, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sherin, M. G. (2007). The development of teachers' professional vision in video clubs. En R. Goldman, R. Pea, B. Barron, y S. Derry (Eds.), *Video research in the learning sciences* (pp. 383–395). Hillsdale: Erlbaum.

Sherin, M. G., Jacobs, V. R., y Philipp, R. A. (Eds.). (2011). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge.

Thomas, J., Jong, C., Fisher, M. H. y Schack, E. O. (2017). Noticing and knowledge: Exploring theoretical connections between professional noticing and mathematical knowledge for teaching. *The Mathematics Educator*, *26*(2), 3-25.

van Es, E. A. (2011). A framework for learning to notice students' thinking. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs, y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 134–151). Nueva York: Routledge.

van Es, E. A., y Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10*(4), 571–596.

van Es, E. A., y Sherin, M. G. (2021). Extending on prior conceptualizations of teacher noticing. *ZDM Mathematics Education, 53*, 17-27. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01211-4

Zapatera, A., y Callejo de la Vega, M. L. (2018). El conocimiento matemático y la mirada profesional de estudiantes para maestro en el contexto de la generalización de patrones. Caracterización de perfiles. *Revista Complutense De Educación*, *29*(4), 1217-1235. https://doi.org/10.5209/RCED.55070

EVIDENCIAS DE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO QUE SE PRESENTAN DURANTE EL DISEÑO DE ACTIVIDADES BASADAS EN LA TEORÍA APOE

Evidence of specialized knowledge presented during the design of activities based on the APOS theory

Sánchez-García, J.A. [a]; Flores-Medrano, E. [a]; Hernández, L.A. [a]; Juárez-Ruiz, E. [a]

[a] Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México

Temática: 5 – Extensiones del MTSK

Resumen. En este trabajo se presenta una investigación que utiliza como herramienta metodológica al modelo MTSK. Dicho modelo fue utilizado con el propósito de identificar los conocimientos que dos profesores de matemáticas presentan durante el diseño de actividades. La base teórica que ambos profesores utilizaron para dicho diseño corresponde a la teoría APOE. Se analizaron sus trabajos finales de máster donde se encuentran las secuencias de actividades junto con su descripción, se complementó el análisis con una entrevista y un cuestionario. En las conclusiones se reporta que, al diseñar actividades con base en la teoría APOE se pone en práctica conocimiento correspondiente al MK, teniendo mayor presencia el considerado en el KoT, en contraste, se menciona que, en comparación con el MK, se encontró mayor evidencia de conocimiento enmarcado en el PCK, observando que, además de utilizar a la teoría APOE como teoría de aprendizaje, esta es interpretada también como teoría de enseñanza.

Palabras clave. MTSK, Teoría APOE, Conocimiento especializado, Teorías institucionalizadas.

Abstract. This paper presents an investigation that uses the MTSK model as a methodological tool. This model was used with the purpose of identifying the knowledge that two mathematics teachers present during the design of activities. The theoretical basis that both professors used for this design corresponds to the APOS theory. Their final master's works where the activity sequences are found together with their description were analysed, the analysis was complemented with an interview and a questionnaire. In the conclusions it is reported that, when designing activities based on the APOS theory, knowledge corresponding to MK is put into practice, the one considered in the KoT having a greater presence, in contrast, it is mentioned that, compared to MK, it was found to be greater evidence of knowledge framed in the PCK, observing that, in addition to using APOS theory as learning theory, it is also interpreted as teaching theory.

Keywords. MTSK, APOS theory, Specialized knowledge, Institutionalized theories.

INTRODUCCIÓN

Un interés que se tiene en relación con el conocimiento especializado de matemáticas corresponde al conocimiento que se requiere para abordar determinadas situaciones de aprendizaje.

Esta investigación se acerca a dicho interés, pues la teoría APOE (acción, proceso, objeto y esquema) es una teoría institucionalizada de la matemática educativa enfocada al aprendizaje de los objetos matemáticos, particularmente al proceso de construcción de dichos objetos. Tomarla como base teórica para el diseño de actividades, implica que el docente comience a presentar o utilizar conocimientos relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje y de la matemática misma, puesto que, la teoría APOE marca la

Sánchez-García, J.A., Flores-Medrano, E., Hernández, L.A., & Juárez-Ruiz, E. (2021). Evidencias de conocimiento especializado que se presentan durante el diseño de actividades basadas en la Teoría APOE. In J.G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 357–364). Congresseme.

construcción del objeto a partir de estructuras y mecanismos mentales que se encuentran señalados en una descomposición genética.

MARCO TEÓRICO

Dado que nuestra investigación involucra a la teoría APOE como base teórica de nuestros instrumentos, es importante que, basados en Escudero-Ávila et al. (2016), obtengamos la sensibilidad teórica correspondiente a dicha teoría, por esta razón, se presenta a continuación una pequeña introducción al modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK), así como una sección correspondiente a la teoría APOE.

El conocimiento especializado del profesor de matemáticas

El modelo MTSK, como es sabido, es un modelo que mantiene su enfoque en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, dicho modelo, como lo mencionan Flores-Medrano et al. (2014) además de ser una propuesta teórica encargada de modelar el conocimiento del profesor de matemáticas, también es considerado como una herramienta metodológica. Es este último enfoque del MTSK el que se usó durante esta investigación.

En 2018, Carrillo-Yáñez y colaboradores, mencionan que el MTSK es una reconfiguración del conocimiento matemático (MK por sus siglas en inglés) y reinterpretación del conocimiento didáctico del contenido (PCK por sus siglas en inglés) considerados en el Mathematical Knowledge for Teaching (MKT).

Gracias a lo mencionado previamente, el MTSK, además de ser dividido en dos dominios (MK y PCK), cada uno de éstos se basta de tres subdominios y éstos a su vez en categorías, lo que permite considerar una noción más específica del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Además de considerar a las creencias del docente. Como se observa en la Figura 1, el MK se compone del conocimiento que se tiene acerca del contenido propio de las matemáticas (conocimiento de los temas), la relación entre estos contenidos (conocimiento de la estructura de las matemáticas) así como todo lo relacionado con el quehacer matemático (conocimiento de la práctica matemática). En el caso del PCK, éste considera los conocimientos acerca de lo marcado curricularmente con respecto a un concepto matemático (conocimiento de los estándares del aprendizaje), de las estrategias didácticas y herramientas para su enseñanza (conocimiento de la enseñanza de las matemáticas), así como todo lo relacionado con su proceso de aprendizaje (conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas).

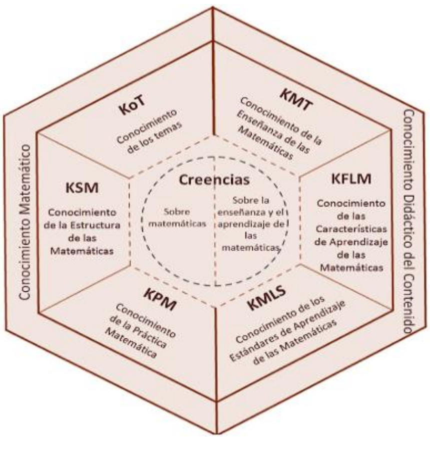


Figura 1. Modelo MTSK (Flores-Medrano et al., 2014)

En Sánchez-García et al. (2021) se puede encontrar una síntesis de las categorías que consideran cada uno de los subdominios descritos previamente (Ver Tabla 1 y Tabla 2).

Tabla 1. Subdominios y categorías del MK (Sánchez-García et al. 2021, p. 57)

Dominio	Subdominio	Categoría
Conocimiento Matemático (MK)	Conocimiento de los temas (KoT)	Procedimientos Definiciones, propiedades y fundamentos Registros de representación Fenomenología y aplicaciones
	Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)	Conexiones de simplificación Conexiones de complejización Conexiones auxiliares Conexiones transversales
	Conocimiento de la práctica matemática (KPM)	Metaconocimiento correspondiente al quehacer matemático (definir, demostrar, usar heurísticos, ejemplificar)

Tabla 2. Subdominios y categorías del PCK (Sánchez-García et al. 2021, p. 58)

Dominio	Subdominio	Categoría
Conocimiento didáctico del contenido (PCK)	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)	Teorías de enseñanza de la matemática Recursos de enseñanza (físicas y digitales) Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
	Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)	Teorías de aprendizaje de las matemáticas Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas Interacción del estudiante con el contenido Intereses y expectativas del aprendizaje de las matemáticas
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)	Contenidos que se requieren enseñar Nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado Secuenciación de los temas

Teoría APOE

La teoría APOE, acrónimo de acción, proceso, objeto y esquema, es una teoría de aprendizaje basada en la abstracción reflexiva de Piaget, en la que se considera una secuencia de acciones por parte del sujeto en un sistema de operaciones previamente interiorizadas (Arnon et al., 2014).

En Villabona y Solange (2016) se menciona que, para los términos de la teoría APOE, se entiende por estructura mental a todo aquello que se construye, y que continúa en construcción, dentro de la mente del sujeto que aprende y que además utiliza para dar sentido a situaciones matemáticas. Por otro lado, se considera como mecanismo mental, a todo medio por el que las estructuras mentales llevan a cabo su desarrollo o transformación.

Como se menciona previamente, dado un objeto matemático, la teoría APOE describe su proceso de construcción por parte del sujeto que aprende. Dicho proceso de construcción consiste en realizar acciones sobre el objeto, de tal forma que, al repetir y reflexionar sobre ellas, el sujeto las interioriza para transformarlas en procesos que puede imaginar completamente en su mente. Después, los procesos se encapsulan en objetos sobre los que nuevamente puede aplicar acciones para continuar con un ciclo de construcción mediante el cual logra estructuras más complejas (Arnon et al., 2014).

Este proceso también puede ser resultado de la transformación o interacción entre dos o más procesos previos (coordinación). Cuando el sujeto se ve en la necesidad de utilizar un objeto para la construcción de un nuevo proceso, debe llevar a cabo otro mecanismo, en el cual debe deconstruir dicho objeto, es decir, debe desepcapsularlo (Sánchez-García et al., 2021).

Como se observa, el análisis de construcción de un objeto matemático, en términos de la teoría APOE, considera mecanismos y estructuras mentales que generan en su conjunto un esquema, el cual es dinámico gracias a la génesis que se presenta durante el proceso de aprendizaje. Dicho análisis permite crear un modelo organizado que posibilita al docente o al investigador determinar los distintos momentos o pasos que se deben considerar durante el proceso de construcción, dicho modelo recibe el nombre de descomposición genética.

MÉTODO

Como lo menciona Escudero-Ávila et al. (2016), las investigaciones donde se utiliza el modelo MTSK como herramienta metodológica son de tipo cualitativo e interpretativo, y en este caso, es a partir de un estudio de caso instrumental, ya que se busca comprender el impacto que tiene la aplicación de la teoría APOE en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Nuestro caso corresponde a dos profesores de matemáticas que cuentan con estudios de máster profesionalizante y cuyos trabajos terminales utilizaron a la teoría APOE. Uno de ellos, Fernando (nombre ficticio), basó su trabajo de investigación en una descomposición genética para el tema de ecuación lineal a partir del trabajo de Borja (2015), apoyando su diseño en GeoGebra; y Adrián, en una descomposición genética para el tema de límites, así como en una secuencia de actividades propuesta por Pons (2014).

Siguiendo las etapas de una investigación con el modelo MTSK propuestas por Escudero-Ávila y colaboradores en 2016, se llevó a cabo la sensibilidad teórica con respecto a la teoría APOE. Después, la obtención de datos, a través de los instrumentos conformados por: la secuencia de actividades diseñada y presentada en los trabajos de máster de ambos informantes y un cuestionario que se aplicó en una entrevista. Se concluyó con la organización y el análisis de la información para su categorización en evidencia, indicio y oportunidad de investigación.

Es importante mencionar que, para el caso del profesor Fernando se analizó una secuencia de 21 actividades para el tema de ecuaciones lineales y para el caso del profesor Adrián, se analizó una secuencia de 16 actividades diseñada para el tema de límites.

ANÁLISIS

En esta sección se presentan algunos de los datos extraídos de los instrumentos, en donde se puede observar la presencia de conocimiento de los informantes, así como una síntesis de los conocimientos puestos en juego por parte de los profesores durante el diseño de su secuencia de actividades.

Con respecto al MK, nuestros informantes presentaron evidencia de conocimiento en los tres subdominios, principalmente en el conocimiento de los temas (KoT), dentro de este subdominio, las evidencias se inclinan más hacía la categoría de registros de representación. Un ejemplo de esto se puede observar en el caso de Fernando en el uso del constructo de multi-representaciones en un entorno virtual de aprendizaje, en su diseño de actividades (Ver Figura 2).

Esperamos que el presentar al estudiante el mismo objeto matemático en distintos registros de representación semiótica (algebraico, matricial y geométrico) favorezca la construcción del concepto.

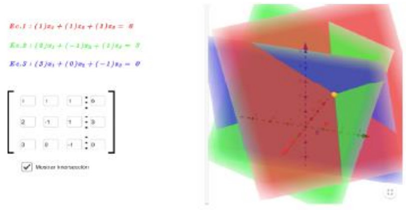


Figura 2. Extracto de la tesis de Fernando, actividad 11

Como se observa en la Figura 2, Fernando incluye en su diseño de actividades diversas representaciones que apoyan a la actividad, e incluso, describe el objetivo de dicho uso, esto junto con su conocimiento sobre el constructo de multi-representaciones que explica en el marco teórico de su trabajo, conforma una evidencia de conocimiento de Fernando que corresponde a la categoría de registros de representación del KoT.

Una situación interesante de mencionar, es que, de nuestros dos informantes, solamente uno presentó evidencia de conocimiento correspondiente a la categoría Fenomenología y aplicaciones del KoT (Ver Figura 3), esto se lo adjudicamos a que, en este caso, Fernando, consideró que su secuencia de actividades fue diseñada para un grupo de ingenieros y que dentro de los intereses y expectativas de los estudiantes se encuentran las aplicaciones, y que para el caso de Adrián, la secuencia de actividades fue diseñada para alumnos de nivel bachillerato y en este nivel no se consideran aplicaciones a detalle.

Asignación de Recursos
En una fábrica de ropa se producen tres estilos de camisas que llamaremos 1, 2, 3. Cada prenda pasa por el proceso de cortado, cosido, planchado y empaquetado. Las camisas se elaboran por lote. Para producir un lote de camisas del tipo 1 se necesitan 30 minutos para cortarlas, 40 minutos para coserlas y 50 minutos para plancharlas y empaquetarlas. Para el tipo 2, 50 minutos para cortar, 50 minutos para coser y 50 minutos para planchar y empaquetar. Para el tipo 3, 65 minutos para cortar, 40 minutos para coser y 15 minutos para planchar y empaquetar. ¿Cuántos lotes se pueden producir si se trabajan 8 horas en cortar, 8 horas en coser y 8 horas en planchar y empaquetar? Sean: x= lotes de la camisa 1 al día y= lotes de la camisa 2 al día z= lotes de la camisa 3 al día

Figura 3. Extracto de la tesis de Fernando, actividad 21

Otra situación interesante que se observó corresponde al KPM, principalmente en la Práctica de demostrar, pues en este caso, Fernando presenta un indicio de conocimiento y en el caso de Adrián se presenta una evidencia.

Basados en la caracterización de la práctica de demostrar que hacen Campos-Cano y Flores-Medrano (2019), la evidencia por parte de Adrián corresponde a que muestra conocimiento con respecto al papel de la demostración como verificación y comunicación, así como la fase de interpretación de esta (Ver Figura 4).

La pregunta 3 busca que los estudiantes coordinen las aproximaciones en el dominio con las aproximaciones en sus imágenes en términos de desigualdades, guiándolos a la reflexión de que para cualquier valor que tome x en la tabla siempre se cumplirá que la distancia en valor absoluto de $f(x)$ y 4 es menor que 0.0001.

La pregunta 4 busca que el estudiante manifieste formalmente la existencia del límite, teniendo en cuenta que cuando los valores de las diferencias en valor absoluto entre los valores de x y 4 se aproximan a 0, los valores de las diferencias en valor absoluto entre los valores de $f(x)$ y -2 son cero, por lo tanto cuando x tiende a 4, el límite de la función $f(x)$ es 4. (DG5)

Figura 4. Extracto de la tesis de Adrián, actividad 11

Como se observa en la Figura 4, el papel de verificación se presenta, puesto que Adrián menciona que se busca que el estudiante manifieste formalmente la existencia del límite y el papel de comunicación al explicar cómo se espera que lo manifieste. La parte de interpretación corresponde a la explicación de Adrián al mencionar la forma en la que se busca que el alumno coordine las aproximaciones en el dominio e imagen.

El indicio de Fernando corresponde a la categoría de usos de registros de representación en la demostración considerada por Campos-Cano y Flores-Medrano (2019), pues como se puede observar en la Figura 5, Fernando explicita la intencionalidad de presentar un applet para que alumno verifique geométricamente un teorema.

La actividad inicia presentando el concepto de SEL Homogéneo esto con la intensión de que el estudiante verifique incluso geométricamente este teorema al menos en $\mathbb{R}^3$.

Figura 5. Extracto de la tesis de Fernando, actividad 16

El indicio radica principalmente en que, aunque nuestro informante explicita la intencionalidad del registro geométrico, no explica la forma en la que se puede llevar a cabo dicha verificación, lo cual es confirmado por Fernando durante la entrevista.

Con respecto al PCK, por parte de nuestros informantes se encontró evidencia de conocimiento para todos los subdominios y categorías. Sin embargo, para la categoría recursos físicos y digitales para la enseñanza del KMT, solamente se encontró evidencia de conocimiento por parte de Fernando.

La evidencia de Fernando radica principalmente en que él decide utilizar la herramienta digital GeoGebra, pues como se observa en el siguiente diálogo, menciona que conoce las fortalezas y debilidades de dicho recurso y por tanto las virtudes que le puede proporcionar a su secuencia de actividades.

Investigador: ¿Qué conocimientos acerca de GeoGebra pusiste en juego durante el diseño de las actividades?

Fernando: Mucho de las construcciones, fueron prueba y error, y estar trabajando muchísimo (…). Yo tomé un diplomado en el INAOE (…) sobre el uso de tecnología y la primera parte es con GeoGebra, ahí aprendí bastantes cosillas, pero todo lo demás pues fue, estar trabajando de manera autodidacta.

Un fenómeno interesante de observar es que ambos informantes presentaron evidencias de conocimiento con respecto a teorías de enseñanza, aun utilizando una teoría de aprendizaje como base teórica para el diseño. Dicha evidencia de conocimiento está basada en que ambos informantes, al considerar una descomposición genética (la cual es presentada en el marco teórico de cada uno de los trabajos), esta les proporciona información sobre las estructuras mentales que se deben construir y, por tanto, ambos diseñaron o ajustaron actividades que promovieran estas construcciones.

CONCLUSIONES

Del trabajo de investigación se puede concluir que se evidenciaron todos los subdominios del modelo MTSK. Algunos de ellos se evidenciaron mucho más, como fue el caso del conocimiento de los temas, ya que en ambos informantes se observaron las diversas categorías que lo conforman. Una de las categorías del KoT que se presentó con mayor frecuencia en ambos informantes fue la de representaciones, principalmente en Fernando, quién realizó una secuencia didáctica asistida por GeoGebra, pues tenía muy clara la importancia del uso de la teoría de multi-representaciones para fomentar la comprensión y aprendizaje de los conceptos.

Con respecto al subdominio de la práctica matemática, se observó evidencia en todas las categorías, excepto la de recursos físicos y digitales para la enseñanza, de la que se encontró evidencia de conocimiento en solo un informante, aquel que utilizó GeoGebra en el diseño de su secuencia didáctica (Fernando).

Por otro lado, también se puede observar que nuestros informantes utilizan la teoría APOE como una teoría de enseñanza, esto gracias a la descomposición genética, pues esta marca claramente las estructuras mentales que se deben construir. Además, ellos se apoyaron en la metodología denominada ciclo de enseñanza ACE (actividades, discusión y ejercicios) y nutrieron el diseño con la teoría de representaciones y multi representaciones, así como del trabajo de Pons (2014), en el caso de Adrián y el modelo 3UV en el caso de Fernando.

De igual manera, aparecen evidencias de conocimientos en relación con la categoría de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos del subdominio KMT, pues ambos informantes diseñan actividades pensadas en la descomposición genética y se basan en ejemplos intencionados.

Por otro lado, también se puede observar que, gracias al propio orden marcado en la descomposición genética, nuestros informantes presentan una tendencia didáctica de tipo tecnológica, ya que el orden de actividades es intencionado y logístico.

En resumen, el utilizar una teoría institucionalizada, en este caso la teoría APOE, permitió el desarrollo y utilización de conocimiento especializado por parte de los docentes, principalmente el correspondiente al conocimiento didáctico del contenido. De igual manera les permitió utilizar el correspondiente a la práctica matemática puesto que, la propia descomposición genética es un análisis cognitivo del objeto matemático, sus propiedades y relaciones con otros conceptos u objetos matemáticos.

Por tanto, considerar la instrucción en teorías institucionalizadas en la formación docente y fomentar el diseño de actividades basadas en dichas teorías, permite desarrollar en el docente un conocimiento especializado más enfocado en el conocimiento didáctico del contenido.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación fue realizada gracias al financiamiento del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México, mediante la beca de maestría asignada con CVU: 1028924.

Referencias

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer Science & Business Media.

Campos-Cano, M. y Flores-Medrano, E. (2019). Prácticas matemáticas: un avance en su caracterización. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (87-94). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Escudero-Ávila, D., Gomes, J., Muñoz-Catalán, M. C., Flores-Medrano, E., Flores, P., Rojas, N., y Aguilar, A. (2016). Aportaciones metodológicas de investigaciones con MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M., Montes (Eds.). *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (60–68). Universidad de Huelva Publicaciones.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á., y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, M.A. Montes, D. Escudero y E. Flores (Eds.), *Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas* (71–93). Universidad de Huelva. https://doi.org/10.13140/2.1.3107.4246

Sánchez-García, J. A., Flores-Medrano, E., Hernández, L. A., Juárez-Ruiz, E., (2021) ¿Cómo impacta el conocimiento que tiene un profesor acerca de la teoría APOE sobre su conocimiento especializado? *Revistamultidisciplinar.com, 3 (1), 55-67.* https://doi.org/10.23882/DI2159

Villabona, D. P. y Roa, S. (2016). Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría APOE. *Educación matemática*, *28*(2), 119-150. https://doi.org/10.24844/EM2802.05

INDICADORES DE CATEGORIAS PARA O CTSK COM ENSINO DE AGROTÓXICOS

Category Indicators for CTSK Teaching Pesticides

Soares, S. T. [a]; Marques, M. [b]; Luís, M. [c]

[a] Instituto Federal de Ciência e Tecnologia de Mato Grosso; [b] Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso; [c] Agrupamento de Escolas José Belchior Viegas

Temática: 5 – Extensões do MTSK

Resumo. O modelo do Conhecimento Especializado de Professores de Química – CTSK foi proposto em 2019 por meio de um projeto de pesquisa de mestrado desenvolvido no Instituto Federal de Mato Grosso, entretanto o modelo ainda encontra-se em desenvolvimento quanto às categorias dos subdomínios. Dessa forma, este artigo teve como objetivo buscar identificar indicadores de conhecimento para futuras proposições das categorias dos subdomínios referentes ao Conhecimento Pedagógico do Conteúdo – PCK do CTSK. Para atender ao objetivo foi realizada uma pesquisa qualitativa para identificar evidências de conhecimento especializado de química em busca de indicadores de conhecimento tendo como base dos resultados a comparação com as categorias do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática – MTSK e aporte teórico.

Palavras-chave. Extensões do MTSK, CTSK, PCK, Indicadores de Conhecimento.

Abstract. The Chemistry Teachers' Specialized Knowledge – CTSK model was proposed in 2019 through a master's research project developed at the Federal Institute of Mato Grosso, however the model is still under development regarding the categories of subdomains. Thus, this research aimed to identify knowledge indicators for future propositions of the categories of subdomains related to Pedagogical Content Knowledge – PCK of CTSK. To meet the objective, a qualitative research was carried out to identify evidence of specialized knowledge of chemistry in search of knowledge indicators based on the results of comparison with the categories of Mathematics Teachers' Specialized Knowledge - MTSK and theoretical support.

Keywords. MTSK Extensions, CTSK, PCK, Knowledge Indicators.

TRAJETÓRIA DO CTSK

O ensino de química tem enfrentado algumas dificuldades cotidianas em diversos contextos, como o fato de existir uma desconexão entre o conhecimento químico e o pedagógico (Garcia, 2009), assim como de existir uma valorização do conhecimento da química pura, em contrapartida uma desvalorização do conhecimento sobre o ensino de química, trazendo inclusive a influência desta valorização/desvalorização na formação de professores de química (Oliveira e Rezende, 2011). A literatura ainda aponta problemas relacionados à existência de material didático desatualizados (Lopes, 2005), algumas vezes serem limitados não contemplando determinados assuntos, teorias e/ou modelos (Melo e Lima Neto, 2013), assim como o problema da abordagem descontextualizada dos conteúdos (Silva, 2012), a existência da linguagem química que envolve símbolos, equações, reações, modelos, fórmulas estruturais, gráficos (Roque e Silva, 2008), levando ao que outra autora denomina de alta complexidade da disciplina (Silva, 2012) e o fato da química possuir um currículo sobrecarregado (Schnetzler, 1992), de modo que todas estas pontuações são importantes e inclusive entende-se quando autores apontam a necessidade de melhorarias no ensino da área (Massena, Guzzi Filho e Sá, 2013).

Soares, S. T., Marques, M., & Luís, M. (2021). Indicadores de categorias para o CTSK com ensino e agrotóxicos. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 365–372). Congresseme.

Em 2019 partindo dos estudos do modelo Conhecimento Especializado de Professores de Matemática – MTSK (Carrillo et al., 2018), área pioneira na proposta de um modelo do conhecimento especializado do professor que integra apenas conhecimento e é específico do professor quanto ao ensino da matemática, iniciou-se a proposta do modelo adaptado à química – Conhecimento Especializado de Professores de Química – CTSK[1]; contendo o Conhecimento da Química – CK: Conhecimento dos Tópicos da Química – KoTC; o Conhecimento da Estrutura da Química – KSC; Conhecimento de Pesquisa e Desenvolvimento da Química – KRDC; e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo – PCK: Conhecimento do Ensino de Química – KCT; Conhecimento das Características de Aprendizagem da Química – KFLC, e; Conhecimento dos Parâmetros da Aprendizagem de Química – KCLS.

Com o objetivo de identificar indicadores de categorias para os subdomínios do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo – PCK (Figura 1) detalha-se os seus subdomínios a seguir:

- Conhecimento do Ensino de Química – KCT, este subdomínio compreende conhecimentos do professor de química referentes a potencialidade de determinada atividade, a escolha de recursos materiais, laboratoriais e/ou virtuais para determinado tópico da química e conhecimento de estratégias de ensino de química;
- Conhecimento das Características de Aprendizagem da Química – KFLC, este subdomínio compreende conhecimentos do professor de química quanto ao processo de ensino e aprendizagem de tópicos da química, considerando conhecimentos referentes ao processo de assimilação, erros que são comuns entre os estudantes ou mesmo algumas dificuldades. Consideram-se ainda neste subdomínio, os conhecimentos quanto ao interesse, a curiosidade e a expectativa do discente, não somente quanto a determinado tópico da química, mas também quanto à uma das áreas da química como um todo, e;
- Conhecimento dos Parâmetros da Aprendizagem de Química – KCLS, este subdomínio abrange conhecimentos relativos à sequência dos conteúdos, à expectativa de determinada aprendizagem conforme o nível escolar e a meta, quanto ao desenvolvimento de determinado tópico da química.

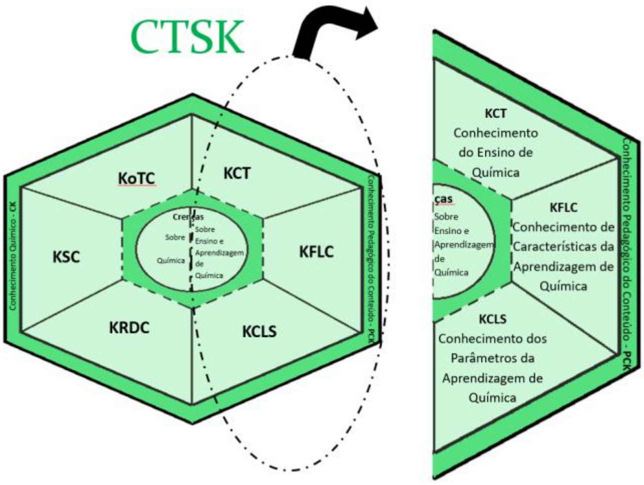


Figura 1. Modelo do Conhecimento Especializado de Professores de Química – CTSK, com destaque do subdomínio do PCK (Soares, 2019).

[1] Todas as siglas citadas no decorrer do artigo são padronizadas no idioma da língua inglesa, conforme padrão determinado no modelo MTSK

METODOLOGIA

Os dados foram coletados de um episódio de ensino caracterizado como Relatório da Experiência Profissional Pedagógica – PaP-eR (Loughran et al., 2001) com a temática Agrotóxicos (Cavalcanti et al., 2010), contemplando os três níveis do ensino de química no ensino médio brasileiro, visando correlacionar o conhecimento cotidiano ao conhecimento escolar do ensino de química. Embora a temática tenha sido a mesma, os conteúdos trabalhados foram distintos e correlatos aos seus anos de ensino.

A pesquisa é de cunho qualitativo (Bogdan e Biklen, 1994), de caráter exploratória-descritiva (Gil, 2002) e a análise dos dados ocorreu por intermédio da interpretação e análises de conteúdo (Bardin, 1995).

Após as análises sistemáticas para mobilização dos conhecimentos especializados no PaP-eR aplicando o CTSK para verificar a mobilização de conhecimentos especializados de química, foram investigados possíveis indicadores de categorias para os subdomínios pertencentes ao PCK, do CTSK, dessa forma foram realizadas análises dos trechos com objetivo de identificar a correspondência de tal conhecimento com relação às categorias existentes no modelo MTSK, tendo como referencial teórico a proposta das categorias em Carrillo et al. (2018).

RESULTADOS E DISCUSSÕES

O PaP-eR apresentou um total de 26 (vinte e seis) evidências de conhecimentos especializados sendo 19 (dezenove) referentes ao domínio do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e distribuídos em todos os seus subdomínios.

Dentre os indicadores de categorias evidenciados, para o subdomínio Conhecimento do Ensino de Química, relativo ao ensino de química, houve significativos indicadores do conhecimento especializado de química, quanto às estratégias aplicadas ao ensino de química e quanto aos recursos didáticos que podem ser utilizados no ensino de química quando se utiliza a temática Agrotóxicos em sala de aula (Tabela 1).

A literatura aponta que os materiais didáticos alternativos auxiliam no aprendizado do ensino de química e, inclusive que há professores de química que criam os próprios recursos didáticos e que isso tem contribuído não somente para aprendizagem significativa na área, como também para auxiliar os alunos a entenderem a aplicabilidade dos conteúdos de química ensinados (Teixeira et al., 2019). Além disso, a literatura também traz informações quanto ao potencial pedagógico de determinado recurso proposto ao ensino de química, correlacionando-o com a abordagem utilizada, enfatizando que a determinação da estratégia no ensino de química é significante, uma vez que influencia no aprendizado, podendo ou facilitar o ensino de química ou repercutir negativamente no aprendizado da disciplina, se não for planejada adequadamente (Garcez, 2014). Em Carrillo et al. (2018), quando os autores propõem categorias para o MTSK, há também uma discussão quanto à escolha do recurso e da escolha da estratégia para o ensino da matemática, uma vez que o professor de matemática deve conhecer o potencial de determinada atividade, tarefa e estratégia, assim como possuir conhecimento crítico de recursos que possam auxiliar no ensino de determinado conteúdo, de modo a conhecer o recurso, saber utilizá-lo, conhecer as limitações e como podem facilitar o ensino de matemática, propondo três categorias para o modelo MTSK: 1. Recursos de ensino (físicos e digitais); 2. Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos, e; 3. Teoria do ensino de matemática.

Tabela 1. Conhecimentos mobilizados indicadores de categorias do CTSK comparados as categorias do MTSK (Carrillo et al., 2018, tradução nossa).

<table>
<tr><td colspan="4">CTSK
Conhecimento do Ensino de Química - KCT</td><td>MTSK
KMT[1]</td></tr>
<tr><td colspan="4">Estratégia e Sequência Didática de Ensino de Química</td><td>Categoria</td></tr>
<tr><td>Aula</td><td>Série</td><td>Duração</td><td>Atividades</td><td rowspan="8">1. Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos.</td></tr>
<tr><td>1ª</td><td>1ª, 2ª, 3ª</td><td>50 min</td><td>Apresentação de uma fotografia de uma criança nascida com má-formação congênita, devido ao uso indiscriminado de agrotóxicos. Aplicação de questionário (Tabela 2) com questões correspondentes aos conteúdos de cada série.</td></tr>
<tr><td>2ª</td><td>1ª, 2ª, 3ª</td><td>50 min</td><td>Aplicação de um segundo questionário com questões relacionadas ao uso dos agrotóxicos e comuns às três séries (Tabela 3).</td></tr>
<tr><td>3ª, 4ª, 5ª</td><td>1ª, 2ª, 3ª</td><td>150 min</td><td>Estudo do meio: Excursão pedagógica ao campo de trabalho dos agricultores.</td></tr>
<tr><td>6ª e 7ª</td><td>1ª, 2ª, 3ª</td><td>100 min</td><td>Apresentação de um seminário intitulado: Agrotóxicos – mocinho ou vilão?</td></tr>
<tr><td>8ª</td><td>1ª, 2ª, 3ª</td><td>50 min</td><td>Leitura, interpretação e discussão do texto “Agrotóxico: de mocinho a bandido”. Síntese do texto.</td></tr>
<tr><td>9ª</td><td>1ª, 2ª, 3ª</td><td>100 min</td><td>Painel integrado sobre: substâncias e misturas (1ª série), funções químicas (2ª série), estudo do carbono (3ª série). Síntese dos conteúdos pela professora com auxílio de retroprojetor.</td></tr>
<tr><td>10ª</td><td>1ª, 2ª, 3ª</td><td>50 min</td><td>Trabalho em grupos de quatro ou cinco estudantes para análise de rótulos e/ou embalagens vazias de agrotóxicos. Preenchimento de fichas com informações retiradas de rótulos e/ou embalagens de agrotóxicos. (...)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Estratégia e Recursos para o ensino de química</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">(...) a abordagem do cotidiano relacionando a Química e a sociedade vem sendo utilizada numa tentativa de despertar o interesse dos alunos por essa disciplina. Logo, notícias em jornais, revistas, internet e também vídeos podem levar a uma discussão de temas relevantes no contexto escolar e promover o esclarecimento de conceitos frequentemente distorcidos, sejam os conceitos químicos/científicos ou os cotidianos.

Agrotóxico faz criança nascer deformada
Bebê veio ao mundo, em Bonito, com olho na testa e só viveu três minutos
Figura 1: Reportagem: Agrotóxico faz criança nascer deformada em Bonito (PE).</td><td>1. Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos

2. Recursos de ensino (físicos e digitais)</td></tr>
</table>

Notas. 1 - Conhecimento do Ensino de Matemática.

Deste modo, os resultados da análise do episódio de ensino relacionados ao Conhecimento do Ensino de Química, apresenta evidencia de conhecimento quanto: aos recursos utilizados no ensino de química, quando se utiliza a temática agrotóxicos; à estratégia do ensino de química, e o conhecimento do planejamento da sequência didática no ensino de química com a temática agrotóxicos, tornando-se fortes indicadores de categorias para o modelo CTSK, uma vez que houve a evidencia dos conhecimentos, há categorias correlatas no modelo MTSK e também existe uma base teórica na literatura que vai de encontro com o que foi evidenciado no episódio de ensino, faltando agora apenas um estudo empírico para finalizar com a proposta das categorias para este subdomínio e suas respectivas descrições.

Quantos aos conhecimentos evidenciados sobre o Conhecimento das Características de Aprendizagem da Química houve evidencia quanto a despertar o interesse do estudante, dificuldades dos estudantes sobre o ensino de química e a influência do conhecimento prévio dos estudantes numa aula de química.

Em 2008, Almeida et al. (2008) realizaram um estudo com estudantes do ensino médio, para verificar opinião, interesse e motivações nas aulas de química, o resultado foi que a contextualização da química, a utilização de aulas práticas e dinâmicas, contribuem para despertar o interesse dos estudantes e motivá-los nas aulas de química. Em outras pesquisas, a literatura aponta que o professor ter ciência do conhecimento prévio dos estudantes, possibilita não somente criar um ambiente investigativo de aprendizagem no ensino de química, despertando interesses dos estudantes (Lopes et al., 2011), mas também conhecer as dificuldades conceituais apresentadas pelos mesmos (Cavalcanti et al., 2010). Assim como, a literatura também apresenta a existência de fatores que podem influenciar na aprendizagem do ensino de química, como os psicodinâmicos, sociais, emocionais e motivacionais, intelectuais e escolares, na qual apontam algumas dificuldades de aprendizagem escolares no ensino de química causados pela utilização de aulas tradicionais, aulas descontextualizadas, dificuldade de aprender o conceito e relacioná-lo com o cotidiano, inadequação metodológica e até mesmo a contribuição da perturbação emocional no aprendizado (Rocha e Vasconcelos, 2016).

Carrillo et al. (2018) trazem uma discussão das características da aprendizagem da matemática, na qual o professor de matemática deve conhecer as dificuldades ou os elementos facilitadores para o ensino de determinado conteúdo matemático, incluindo ter o conhecimento de possíveis erros ou equívocos que podem ocorrer ao ensinar determinado tópico da matemática, a necessidade de conhecer a interação do estudante com os conteúdos matemáticos, conhecer os aspectos emocionais da aprendizagem matemática e o que possibilita motivar os estudantes, despertar o interesse dos mesmos sobre determinado conteúdo matemático. Dessa forma, o MTSK traz 4 categorias para o subdomínio Conhecimento das Características de Aprendizagem da Matemática: 1. Teorias de aprendizagem matemática; 2. Pontos forte e fracos na aprendizagem da matemática; 3. Maneira dos alunos interagirem com o conteúdo matemático, e; 4. Aspectos emocionais da aprendizagem da matemática (Carrillo et al., 2018).

Dessa forma, a partir dos resultados do subdomínio KFLC (Tabela 2) têm-se os indicadores de duas categorias: Aspectos emocionais e motivacionais da aprendizagem da química e elementos facilitadores ou que dificultam na aprendizagem da química, uma vez que houve a evidencia dos conhecimentos, há categorias correlatas no modelo MTSK e também existe uma base teórica na literatura que vai de encontro com o que foi evidenciado no episódio de ensino.

Tabela 2. Conhecimentos mobilizados indicadores de categorias do CTSK comparados as categorias do MTSK (Carrillo et al., 2018, tradução nossa).

CTSK Conhecimento das Características de Aprendizagem da Química - KFLC	MTSK KFLM[1]
Interesse do Estudante	Categoria
(...) a utilização de temas diferentes para se ensinar Química tem sido uma das melhores maneiras encontradas pelos professores para chamar a atenção dos alunos, fazendo com que estes se interessem pelo conteúdo.	1. Aspectos emocionais da aprendizagem da matemática
Dificuldades e Conhecimento Prévio dos Estudantes	
Após a leitura e análise exaustiva das respostas constantes nos questionários, foi possível conhecer as noções dos estudantes (...) Estes definiram mistura e substância, usando a linguagem do senso comum (por exemplo, mistura é água misturada com sal e substância é o ferro), mas não souberam diferenciar um conceito do outro (...)	1. Pontos fortes e fracos na aprendizagem da matemática

Notas. 1 - Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática.

O episódio de ensino analisado também apresentou evidência de conhecimentos do subdomínio Conhecimento dos Parâmetros da Aprendizagem de Química, quanto ao conhecimento dos parâmetros curriculares e o conhecimento da sequência dos conteúdos conforme o nível escolar. Em análise do documento oficial brasileiro, Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN+ para Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, foi possível verificar a organização dos temas básicos orientadores no que se refere a sequência dos conhecimentos conforme o nível escolar do ensino de química, uma vez que em tal documento tem-se a sugestão de sequências de temas norteadores como planejamento, por exemplo: 1º ano, Reconhecimento e caracterização das transformações químicas e Primeiros modelos de constituição da matéria; 2º ano, Energia e transformação química, Aspectos dinâmicos das transformações químicas e Química e hidrosfera, e; 3º ano, Química e atmosfera, Química e biosfera e Química e litosfera.

Ressaltando que o Ministério da Educação Brasileira, além do PCN+ também tem a Base Nacional Comum Curricular – BNCC que estabelece habilidades mínimas necessárias para cada nível escolar através, entretanto é a instituição de ensino que desenvolve a ementa das disciplinas conforme o nível escolar, atendendo as legislações, contudo o docente é quem deve determinar o sequenciamento dos conteúdos necessários ao desenvolvimento pretendido.

O MTSK no subdomínio do Conhecimento dos Parâmetros da Aprendizagem de Matemática descreve sobre o conhecimento do professor da sequenciação dos tópicos matemáticos, conforme a série do estudante, uma vez que pertence ao docente o conhecimento do tópico a ser trabalhado, conforme as competências e habilidades exigidas em documentos curriculares, apresentando assim, este subdomínio, três categorias: 1. Resultados de aprendizagem esperados; 2. Nível esperado de desenvolvimento conceitual ou procedimental; 3. Sequenciação de tópicos (Carrillo et al., 2018).

Dessa forma, a partir dos resultados do subdomínio KCLS (Tabela 3) têm-se indicador de uma categoria para este subdomínio: Sequenciação de tópicos, conforme nível escolar, uma vez que houve a evidencia do conhecimento, tem-se categoria correlata no modelo MTSK e a organização e sequencia dos níveis de ensino é indicada em documento oficial brasileiro PCN+.

Tabela 3. Conhecimentos mobilizados indicadores de categorias do CTSK comparados as categorias do MTSK (Carrillo et al., 2018, tradução nossa).

CTSK Conhecimento dos Parâmetros da Aprendizagem de Química - KCLS			MTSK KMLS[1]
Parâmetros Curriculares e Sequência dos conteúdos (conforme as séries)			Categoria
Turmas	Conteúdos trabalhados	Conceitos construídos pelos estudantes	
1ª A	Substâncias e misturas	Densidade, ponto de fusão e ponto de ebulição, mistura, substância, elementos químicos, condensação, separação de componentes de misturas, destilação.	1. Sequenciação de tópicos
	Tabela Periódica	Período, família.	
	Noção de Química Ambiental	Ambiente, poluição, herbicida, fungicida, acaricida.	
2ª A	Funções químicas	Ácidos, bases, sais, indicador, acidez, basicidade, pH.	
	Soluções	Solubilidade, polaridade, mol, soluto, solvente, concentração.	
	Noção de química ambiental	Ambiente, poluição, herbicida, fungicida, acaricida.	
3ª A	Estudo do carbono	Valência, ligação, ligação pi, ligação sigma, fórmula estrutural, hibridação, orbital. (...)	

Notas. 1 - Conhecimento dos Parâmetros da Aprendizagem de Matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A metodologia, embora limitada por não proporcionar o aprofundamento nas análises dos dados, como por exemplo, fazer o uso de entrevistas semiestruturas, apresentou um resultado bastante promissor, pois possibilitou a identificação de indicadores de conhecimentos de categorias para três subdomínios do CTSK: KCT, KFLC e KCLS, visto que houve a evidencia dos conhecimentos especializados, há categorias correlatas no modelo MTSK e também existe uma base teórica na literatura que vai de encontro com o que foi evidenciado no episódio de ensino.

Como objetivos futuros ao CTSK estão estudos empíricos que permitam identificar outros indicadores assim como, testificar os já mencionados assegurando a proposição das categorias para estes subdomínios e suas respectivas descrições.

Referências

Almeida, E. C. S., Silva, M. D. F. C., Lima, J. P., Silva, M. L., Braga, C. D. F., e Brasilino, M. D. G. A. (2008). Contextualização do ensino de química: motivando alunos de ensino médio. *XVI Encontro Nacional de Ensino de Química (XVI ENEQ) e X Encontro de Educação Química da Bahia (X EDUQUI)*, Salvador, BA, Brasil, 1-9.

Bardin, L. (1995) *Análise de Conteúdo*. Lisboa, Portugal: Edições 70, 93-150.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994) *Investigação qualitativa em Educação: fundamentos, métodos e técnicas*. Porto, Portugal: Porto Editora, 47-51.

Brasil. Ministério da Educação. (2006) *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+): Ensino Médio Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília, Brasil.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. e Muñoz-Catalán, M. C. (2018) The mathematics teacher’s specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, Taylor & Francis, London, UK, 1-18.

Cavalcanti, J. A., Freitas, J. C. R., Melo, A. C. N. e Freitas Filho, J. R. (2010) Agrotóxicos: Uma Temática para o Ensino de Química. *Química Nova na Escola*, SBQ, São Paulo, v. 32, n. 1, 31-36.

Garcez, E. S. C. (2014) O Lúdico em Ensino de Química: um estudo estado da arte. Dissertação de mestrado. Goiás, Brasil: Universidade Federal de Goiás, 1-178.

Garcia, I. T. S. (2009) Implantação das Diretrizes Curriculares Nacionais para Formação de Professores de Química em uma Instituição Federal de Ensino Superior: Desafios e Perspectivas. *Química Nova*, SBQ, São Paulo, v. 32, n. 8, 2218-2224.

Gil, A. C. (2002) Como elaborar projetos de pesquisa. 4. ed. São Paulo: Atlas, 1-176.

Lopes, A. C. (2005) Discursos Curriculares na Disciplina Escolar Química. *Ciência & Educação*, UNESP, Bauru, v. 11, n. 2, 263-278.

Lopes, R. M., Silva Filho, M. V., Marsden, M., e Alves, N. G. (2011). Aprendizagem baseada em problemas: uma experiência no ensino de química toxicológica. *Química Nova*, 34(7), 1275-1280.

Loughran, J., Milroy, P., Berry, A., Gunstone, R. e Mulhall, P. (2001) Documenting science teachers’ pedagogical content knowledge through PaP-eRs. *Research in Science Education*, New York, USA, v. 31, n. 2, 289-307.

Luís, M. e Carrillo, J. (2020). O modelo do conhecimento especializado do professor de Biologia (BTSK). *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 11(7), 19-36.

Massena, E. P., Guzzi Filho, N. J. e Sá, L. P. (2013) Produção de Casos para o Ensino de Química: Uma Experiência na Formação Inicial de Professores. *Quimica Nova*, SBQ, São Paulo, v. 36, n. 7, 1066-1072.

Melo, M.R. e Lima Neto, E.G. (2013) Dificuldades de Ensino e Aprendizagem dos Modelos Atômicos em Química. *Química Nova na Escola*, SBQ, São Paulo, v. 35, n. 2, 112-122.

Oliveira, I. e Rezende, F. (2011) Discurso de Estudantes e Habitus Pedagógico em Cursos de Graduação em Ciências Naturais. *Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências - RBPEC*, UFMG, Belo Horizonte, v. 11, 55-73.

Rocha, J. S. e Vasconcelos, T. C. (2016). Dificuldades de aprendizagem no ensino de química: algumas reflexões. XVIII Encontro Nacional de Ensino de Química, 1-10.

Roque, N. F. e Silva, J. L. P. B. (2008) A Linguagem Química e o Ensino da Química Orgânica. *Química Nova*, SBQ, São Paulo, v. 31, n. 4, p. 921-923.

Schnetzler, R. P. (1992) Construção do Conhecimento e Ensino de Ciências - O Modelo Transmissão-Recepção e o Ensino de Ciências. *Em Aberto*, MEC, Brasília, ano 11, 16-23.

Silva, A. A. (2012) A Construção do Conhecimento Científico no Ensino de Química. *Revista Thema*, IFSUL, Pelotas, v. 09, n. 02, 1-16.

Soares, S. T. C. (2019) *Conhecimento Especializado de Professores de Química – CTSK: Proposta de Modelo Teórico.* Dissertação de mestrado. Cuiabá, Brasil: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso, 1-113.

Teixeira, V. M. M. D. L., Santos, A. R., e Graebner, I. B. (2019). O docente de química e a busca do fazer diferente: um estudo sobre as formas alternativas para ensinar. *Scientia Naturalis*, 1(3), 250-264.

O USO DO MODELO MTSK PARA A ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO: ALGUMAS PROBLEMÁTICAS

Use of MTSK model for analysing textbook analysis: some emerging questions

Ribeiro, N. S. [a]; Oliveira, F. [b]; Dalben, A. [c]; Ribeiro, M. [d]

[a, b, c, d] Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Temática: 5 – Extensões do MTSK

Resumo: Este artigo traz uma discussão metodológica inicial, presente em uma pesquisa que pretende usar o modelo MTSK para descrever e categorizar o conhecimento especializado identificado nos livros didáticos de matemática, com foco nas definições, conceitos, procedimentos e registros de representação relacionadas às medidas de comprimento e de área. Nesta discussão, são apresentados os seguintes questionamentos: (1) É possível usar o modelo MTSK para cumprir o objetivo de identificar, descrever e categorizar o conhecimento registrado nos livros didáticos? (2) Que conhecimento é possível identificar nos livros didáticos? e (3) De quem é o conhecimento identificado nesse material? O uso do modelo MTSK pode colaborar para a melhoria da qualidade matemática da discussão em pesquisas desta natureza e em outras que podem envolver o conhecimento interpretativo e especializado do professor de matemática.

Palavras-chave: MTSK, livro didático, medida de comprimento, medida de área

Abstract: This article provides an initial methodological discussion, present in research that intends to use the MTSK model to describe and categorize the specialized knowledge identified in mathematics textbooks, with a focus on definitions, concepts, procedures, and representation records related to measurements of length and of area. In this discussion, the following questions are presented: (1) Is it possible to use the MTSK model to fulfill the objective of identifying, describing, and categorizing the knowledge recorded in textbooks? (2) What knowledge can be identified in textbooks? and (3) Whose knowledge is identified in this material? The use of the MTSK model can contribute to improving the mathematical quality of the discussion in research of this nature and in others that may involve the interpretive and specialized knowledge of the mathematics teacher.

Keywords: MTSK, textbook, length measurement, area measurement.

INTRODUÇÃO

De acordo com o *Programme for International Student Assessment – PISA,* em 2018, cerca de 32% dos alunos no Brasil alcançaram o Nível 2 (considerado o mínimo adequado) ou superior em matemática, enquanto a média dos países da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) é de 76%[1].

Muitos são os fatores que podem propiciar a aproximação do resultado brasileiro ao dos demais países, sendo um deles o conhecimento do professor. Visto que esse conhecimento impacta significativamente o aprendizado dos alunos (Hill, Rowan & Ball, 2005; Grossman, 2010). Algo preocupante, uma vez que "muitos professores não detém o conhecimento necessário para realização de suas práticas pedagógicas" (Lorenzato, 1995). Outro fator significativo no processo de aprendizagem que propiciaria essa

[1]Disponível em http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil/21206. Acesso em 03 jun. 2021.

Ribeiro, N. S., Oliveira, F., Dalben, A., & Ribeiro, M. (2021). O uso do modelo MTSK para a análise do livro didático: algumas problemáticas. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 373–380). Congresseme.

aproximação é o uso do livro didático, por ser um recurso pedagógico orientador do trabalho docente (Silva & Carvalho, 2004) usado para o planejamento, elaboração, desenvolvimento e avaliações, influenciando diretamente nos tópicos a serem ensinados nas metodologias adotadas em sala de aula (Matic, 2019).

Considerados de grande relevância, esses fatores justificam a realização de uma pesquisa mais ampla, cujo objetivo é identificar o conhecimento expresso nos livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental – do 1.º ao 9.º ano, onde estão matriculados os alunos de 6 a 14 anos de idade – e seus respectivos manuais do professor (a partir de agora, neste artigo, ambos serão referidos apenas como LD), com foco nos tópicos de medidas de comprimento e de área.

Estes tópicos foram selecionados porque, embora sejam essenciais na vida dos indivíduos e presentes em diversos anos de escolarização, a literatura específica para medição ainda é escassa (Cawley et al., 2009). Os conceitos de medição devem ser considerados durante todo o processo de ensino e, quando o professor reconhece essa importância, se torna capaz de desenvolver a compreensão dos alunos por meio de perguntas que os levarão ao entendimento dos princípios envolvidos (Clements & Stephan, 2004).

Em busca da resposta para "Que conhecimento pode ser identificado nos LD mais adotados no Ensino Fundamental nos tópicos de medida de comprimento e de área?", acredita-se que o modelo *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK[2] (Carrillo et al., 2018) seja uma ferramenta analítica adequada por ter a abrangência e profundidade necessárias para identificar, descrever e categorizar o conhecimento registrado no LD. Dessa forma, espera-se com esse artigo realizar uma discussão metodológica inicial sobre o uso do modelo MTSK para descrever e categorizar o conhecimento especializado em livros didáticos de matemática.

No entanto, a escolha do modelo MTSK para esta finalidade traz um conjunto de problemáticas metodológicas que são foco de atenção neste artigo. Em particular, a problemática emerge do interesse em empregar o modelo MTSK em um contexto de análise distinto daqueles de onde as discussões até ao momento têm ocorrido e de onde foi a sua gênese. Obviamente, não basta efetuar uma análise do conteúdo do livro como se faria no caso das informações coletadas nas produções de (futuros) professores ou a partir de contextos de sua prática. Assim, para além da problemática da possibilidade de utilizar o modelo MTSK para reconhecer, categorizar e descrever o conhecimento identificado nos LD, emerge um conjunto de problemáticas. Essa reflexão pode ajudar no aprimoramento das abordagens metodológicas de pesquisas que não se propõem a analisar o conhecimento revelado por (futuros) professores.

REFERENCIAL TEÓRICO

O livro didático brasileiro

O livro didático "embora não seja o único material de que professores e alunos vão valer-se no processo de ensino e aprendizagem, pode ser decisivo para a qualidade do aprendizado resultante das atividades escolares" (Lajolo, 1996, p. 4). A "relação entre os conteúdos dos livros didáticos e o que os alunos aprendem" pode ser fator decisivo quando falamos em desempenho escolar (Wijaya et al., 2015, p. 43). Cientes da relação

[2] Optamos por utilizar a nomenclatura em inglês por ser esta uma conceitualização já reconhecida internacionalmente e por poder a tradução acarretar a ressignificação que se encontra associada a cada uma das dimensões desta conceitualização.

entre os conteúdos dos livros didáticos e o que os alunos aprendem, faz-se necessário que o docente esteja atento à qualidade e coerência desse material.

No Brasil, os livros didáticos são distribuídos gratuitamente pelo governo federal aos alunos das escolas públicas pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD)[3]. Para elaboração desse material, visando garantir o padrão de qualidade, o PNLD especifica, através de edital, as orientações metodológicas e os critérios que devem ser considerados para que as coleções sejam aprovadas. Dentre essas especificações, como dimensões e quantidade de páginas do livro, uma das principais exigências tem sido a aderência do conteúdo às competências e habilidades presentes na Base Nacional Comum Curricular – BNCC[4] (Brasil, 2018). Consequentemente, as editoras e suas equipes editoriais, incluindo os autores, passam a ter uma autonomia limitada para a produção dos conteúdos e em suas propostas pedagógicas.

Após a aprovação das coleções pelo programa, o Guia do Livro Didático, contendo suas resenhas, princípios e critérios, é disponibilizado aos professores para a escolha do LD. Após a avaliação do material, os professores devem refletir e considerar os conteúdos do livro didático para que este propicie uma mediação entre os currículos oficiais e as práticas docentes (Amaral; Ribeiro & Godoy, 2014). Para o êxito dessa escolha, é essencial ao professor o conhecimento especializado (Carrillo et al., 2018).

Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK)

Por conhecimento especializado do professor de matemática, é entendido todo conhecimento específico para o exercício da sua função, que engloba o conhecimento matemático e o conhecimento pedagógico, excluindo-se todo os outros que são comuns aos professores das demais áreas.

O MTSK trata-se de um modelo analítico que fundamenta pesquisas sobre o conhecimento especializado do professor (ou do futuro professor) de/que ensina matemática. É constituído por dois grandes domínios: o *Mathematical Knowledge* – MK, que se refere ao conhecimento do conteúdo matemático, e o *Pedagogical Content Knowledge* – PCK, referente aos aspectos pedagógicos para o ensino do conteúdo. No modelo, também são incluídas as crenças do professor sobre a matemática e sobre o ensino e aprendizagem da matemática, considerando que este elemento perpassa por todos os subdomínios e norteia sua prática.

No domínio MK, há três subdomínios: O subdomínio *Knowledge of Topics*–KoT envolve o que e de que forma o professor de matemática conhece os tópicos que ensina e implica em um conhecimento profundo dos conteúdos matemáticos e seus significados, o *Knowledge of the Mathematical Structure*-KSM envolve o conhecimento do professor sobre conexões entre tópicos matemáticos que permitem reconhecer certas estruturas da matemática como um sistema de elementos integrados e o *Knowledge of the Pratice of Mathematic*–KPM engloba o modo de funcionamento e reprodução da prática matemática, ou seja, é o conhecimento relacionado ao fazer matemático.

Outros três subdomínios constituem o PCK. O *Knowledge of Mathematics Teaching*–KMT (envolve o conhecimento do potencial das atividades, estratégias e técnicas de

---

[3] Compreende um conjunto de ações voltadas para a distribuição de obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, destinados aos alunos e professores das escolas públicas de Educação Básica do país.

[4] É um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.

ensino específico do conteúdo matemático), o *Knowledge of Features of Learning Mathematics*–KFLM (abrange o conhecimento do professor de como os alunos aprendem ao abordar tarefas matemáticas) e o *Knowledge of Learning Standards*-KMLS (engloba o conhecimento sobre as especificações curriculares envolvendo o que está previsto em cada etapa da educação escolar em termos de conteúdos, competências, normas e padrões para a avaliação).

Com essa abrangência e profundidade, tal como ocorre nas pesquisas que revelam o conhecimento do professor, torna-se possível revelar também aqueles registrados no LD.

Medidas de comprimento e de área

Para medir, é necessário escolher uma unidade de medida, ou seja, estabelecer um padrão único de comparação para todas as grandezas de mesma espécie para verificar quantas vezes a unidade de medida cabe na grandeza que se mede e atribuir um valor numérico ao resultado dessa medição (Caraça, 1963).

De acordo com Clements & Stephan (2004), a aprendizagem dos alunos sobre a medição linear envolve seis conceitos: particionamento, iteração de unidade, transitividade, conservação, acumulação de distância e relação da medida com o valor numérico. O particionamento é a atividade mental que divide um objeto em unidades do mesmo tamanho. A iteração da unidade é o procedimento no qual o comprimento de um bloco menor é colocado repetitiva e sequencialmente, sem deixar espaços ou sobreposições, até que o comprimento do bloco maior seja preenchido. A transitividade é o processo pelo qual se pode comparar a grandeza de dois objetos distintos por meio dessa mesma grandeza em um terceiro objeto. A conservação é o entendimento de que conforme um objeto é movido, seu comprimento não altera. A acumulação de distância compreende a iteração de uma unidade ao longo do comprimento de um objeto, resultando na quantidade de vezes que o espaço coberto foi iterado. A relação da medida com o valor numérico é o número de iterações realizadas para cobrir toda a grandeza a ser medida. Portanto, a medida é um número relacionado à quantidade de iterações (Clements & Stephan, 2004).

A compreensão sobre a medição linear é uma condição necessária para entender a medição de área, visto que área representa uma quantidade de superfície bidimensional que está contida dentro de um limite e que pode ser quantificada de alguma forma. Como primeiro entendimento para a medição de área, é necessário "investigar a cobertura de regiões com uma unidade de medida, sabendo que não deve haver lacunas ou sobreposições e que toda a região deve ser coberta" (Clements & Stephan, 2004, p. 17).

Ainda de acordo com os autores, a medição de área envolve cinco conceitos básicos fundamentais: particionamento, iteração de unidades, conservação, arranjo matricial e medição linear. O particionamento é o ato mental de dividir o espaço bidimensional com uma unidade bidimensional. O conceito de iteração envolve cobrir regiões com unidades de área sem lacunas ou sobreposições. A conservação de área diz respeito ao ato de dividir uma determinada região e ao reorganizar suas partes para formar outra forma, entender que a área permanece a mesma. O arranjo matricial se faz necessário para que o aluno entenda a área como verdadeiramente bidimensional. Portanto, a medição de área decorre do produto de duas medições lineares, sendo fator imprescindível para realização do cálculo de área (Clements & Stephan, 2004).

Além disso, é importante salientar que o processo de medição de área é distinto do processo de seu cálculo. Para a compreensão do segundo, é essencial que o aluno compreenda o primeiro. A medição da área pode ser feita recobrindo a superfície por uma unidade de medida, explorando uma estrutura de linhas por colunas (ou vice-versa). Assim se configura o arranjo matricial, levando à compreensão de que há um determinado número de unidades em cada linha e em cada coluna (Battista, Clements, Arnoff, Battista & Borrow, 1998), obtendo, então, o resultado da área por meio da multiplicação, deduzindo a fórmula para o cálculo (Huang & Witz, 2013).

METODOLOGIA

O presente artigo é fruto das reflexões metodológicas associadas a uma pesquisa que tem por objetivo identificar e descrever o conhecimento especializado presente nos LD de matemática do 1.º ao 9.º ano, à luz do modelo MTSK, com foco nos tópicos de medidas de comprimento e de área. Na pesquisa, foram adotadas como objeto de análise as três coleções[5] mais distribuídas aos alunos das escolas públicas brasileiras nos anos de 2019 e 2020 e seus respectivos manuais do professor, com disponibilização para todo o Ensino Fundamental e que contemplem os tópicos pesquisados.

Em uma fase inicial da pesquisa, pretende-se realizar a análise das características gerais do livro didático (Charalambous, et al., 2010), e uma análise global e local (Litoldo, Almeida & Ribeiro, 2018) que permitirá obter e descrever a estrutura e conteúdo do livro individualmente e da coleção como um todo. Com a análise global, será possível verificar como os tópicos pesquisados se encontram em apenas um capítulo ou distribuído ao longo de todo o livro didático e, com a análise local, analisam-se os recortes dos enunciados, exemplos, tarefas e orientações pedagógicas com foco de medidas de comprimento e de área. Nesta etapa, o uso do modelo MTSK se tornará imprescindível, uma vez que serão buscadas evidências sobre conceitos, definições, propriedades, procedimentos e registros de representação, categorias presentes no KoT.

A partir da decisão metodológica do uso do modelo MTSK na identificação do conhecimento matemático no livro didático, surgem algumas problemáticas que precisam ser consideradas, sintetizadas em três questionamentos discutidos na próxima seção.

IMPLICAÇÕES DO USO DO MODELO MTSK NA ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO.

Uma vez que o modelo MTSK tenha sido elaborado com o propósito de reconhecer, identificar e analisar o conhecimento do professor ou futuro professor, depara-se com a problemática do artigo: (1) É possível usar o modelo MTSK para cumprir o objetivo de identificar, descrever e categorizar o conhecimento registrado nos LD?

Esse questionamento é, *a priori*, problemático, uma vez que, ao investigar o LD, certamente, qualquer conhecimento identificado não será do professor. Daí decorrem outras questões que serão discutidas posteriormente: (2) Que conhecimento é possível identificar nos LD? (3) De quem é o conhecimento identificado nesse material?

A despeito dessas problemáticas iniciais, o uso do modelo MTSK pode ser viável na abordagem metodológica para identificar o conhecimento especializado nos LD de matemática, pois, em outros contextos nos quais ele já é usado de forma mais recorrente, o conhecimento especializado é reconhecido, identificado e analisado a partir de falas e/ou produções de (futuros) professores na sua prática ou durante a sua formação. Tais falas são geralmente captadas em áudio ou vídeo e, posteriormente, transcritas. Essas

[5] No Brasil, cada coleção é um conjunto de nove livros didáticos, sendo um para cada ano escolar.

pesquisas, por vezes, podem ainda ser complementadas por observações e entrevistas, que também são registradas na forma escrita. Dessa forma, evidencia-se que, de uma forma ou outra, a pesquisa sobre o conhecimento especializado é feita a partir de registros escritos e que a pesquisa para identificar o conhecimento especializado no LD parece ocorrer de maneira análoga, onde estão presentes diferentes formas de registros de representação – *e.g.*, textuais, pictóricos, imagéticas.

Diante dessa consideração, a segunda questão é retomada: (2) Que conhecimento é possível se identificar nos LD?

Como a pesquisa que motivou este artigo não busca analisar o LD em si, mas sim o conhecimento nele expresso, poderá ser identificado o conhecimento especializado da mesma maneira que outras que usam o modelo MTSK. Nela, serão investigados os conceitos, definições, registros de representação, propriedades e procedimentos sobre medidas de comprimento e de área expressos em exemplos e/ou tarefas, além de orientações teóricas metodológicas presentes no LD. Assim, acredita-se que o conhecimento identificado no LD de matemática pode ser apontado como conhecimento especializado, pois essas são categorias presentes nos subdomínios do modelo MTSK.

Além da questão "que conhecimento" é identificado, emerge também a questão (3) "de quem é esse conhecimento" identificado no LD? É importante salientar que não se trata do conhecimento requerido para o uso do LD, mas sim do conhecimento especializado nele expresso. Algumas respostas elencáveis são: do autor, do professor, do aluno.

Parece não ser plausível afirmar que o conhecimento revelado no LD seja do autor que o assina, quando o assina. Atualmente, o processo de elaboração de um LD no Brasil é altamente complexo e envolve uma equipe muito grande composta, para além dos autores, por editores, diagramadores, produtores de conteúdo, revisores técnicos. Ou seja, o conhecimento registrado no livro não pode ser considerado como conhecimento do autor, uma vez que o conhecimento expresso no LD é influenciado por diversos profissionais envolvidos na produção e, ao mesmo tempo, significativamente delimitado por documentos oficiais, como a BNCC e os editais do PNLD. Enfim, o objetivo da pesquisa não é analisar o conhecimento de qualquer um desses envolvido, mas sim identificar o conhecimento especializado expresso no LD.

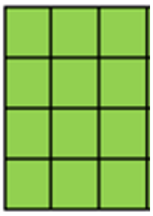
Também não é razoável considerar que se trata do conhecimento do professor que utilizará o LD. Para esta finalidade, outra pesquisa precisaria ser feita colocando como foco o professor ao usar o LD em qualquer uma das etapas de sua prática docente.

Do mesmo modo, não se trata do conhecimento do aluno que usará o livro didático, pois o material é elaborado e utilizado com o objetivo de desenvolver no aluno o conhecimento de acordo com o seu nível de escolaridade, por meio da mediação do professor.

Diante do exposto, até o momento, parece ser coerente assumir que não é possível identificar de quem é o conhecimento expresso no LD, mas sem perder de vista que há um conhecimento nele registrado.

Considerando válida a possibilidade do uso do modelo MTSK e visando apenas exemplificar o que foi apresentado anteriormente, a Figura 01 retrata parte da introdução do tópico de área presente em um dos LD que serão analisados. Na pesquisa, a identificação não ocorrerá usando apenas um recorte, e sim todo o contexto que envolve essas introduções e outros itens tais como exemplos, exercícios resolvidos, outras tarefas e o manual do professor.

Área de um retângulo



O engenheiro mostrou a ele o seguinte esboço do espaço a ser ladrilhado. Ele pensou: Cabem 4 fileiras cada uma com 3 ladrilhos quadrados.

Paulo deseja ladrilhar o seu espaço gourmet de 4m por 3m. De quantos ladrilhos quadrados, com lados de 1m, ele precisará?

Então, ao todo cabem 12 ladrilhos quadrados (4 . 3) com lados de 1 m.

Em um retângulo, é costume chamar um dos lados de comprimento (ou base) e o outro de largura (ou altura).

Figura 1 – Exemplo da introdução do tópico de área.

Nesse exemplo, é feita a introdução do cálculo de área do retângulo, onde é possível identificar o "conhecimento de que para realizar o cálculo da área de uma figura geométrica plana retangular é preciso conhecer a medida do comprimento da base e medida do comprimento da altura" (Huang & Witz, 2013). De acordo com a teoria do modelo MTSK, esse conhecimento pertence ao subdomínio KoT, categoria procedimentos, onde, para calcular a área da figura, é necessário saber fazer uma multiplicação. Daqui decorre outro conhecimento especializado: "conhecimento de que o cálculo de área tem conexão com a multiplicação". Esse conhecimento pertence ao subdomínio KSM, pois faz uma conexão transversal entre os tópicos de área e de multiplicação.

Ao observar a representação do espaço gourmet de forma retangular, é possível identificar o "conhecimento de que o recobrimento deve ser feito de maneira que não haja sobreposição dos ladrilhos e espaços livres entre eles como está presente na imagem". Este é um dos conceitos que "as crianças também podem desenvolver, a iteração de unidades para medir a área ao cobrir com unidades de área sem lacunas e sobreposições" (Clements & Stephan, 2004, p. 16). E tal conhecimento se refere a um fundamento, categoria do KoT.

Ainda que de maneira não explícita, é possível identificar o conhecimento também relacionado ao subdomínio KoT, na categoria registros de representação, de que ao representar o arranjo matricial na figura geométrica plana retangular com seis colunas e quatro linhas, oportunizará o entendimento de área como verdadeiramente bidimensional (Clements & Stephan, 2004; Battista, Clements, Arnoff, Battista, & Borrow, 1998).

EM BUSCA DE ENCAMINHAMENTOS

O propósito deste trabalho é promover uma discussão acerca de questões metodológicas iniciais necessárias para o desenvolvimento de uma pesquisa cujo objetivo é identificar o conhecimento especializado nos LD de matemática nos tópicos de medida de comprimento e de área, com foco no subdomínio KoT. Trata-se de uma extensão para o uso do modelo MTSK, uma vez que ele não foi concebido para esta finalidade. As questões iniciais colocadas foram: (1) É possível usar o modelo MTSK para cumprir o objetivo de identificar, descrever e categorizar o conhecimento registrado nos LD? (2) Que conhecimento é possível identificar nos LD, e (3) De quem é o conhecimento identificado nesse material? Com a pretensão de explicitar algumas discussões já realizadas, algumas possíveis respostas a estes questionamentos foram trazidas e entendidas como hipóteses, ainda que de maneira provisória. Essas respostas serão imprescindíveis para o delineamento da trajetória metodológica e sua respectiva fundamentação para o adequado uso do modelo MTSK também para a análise de LD.

Referências

Amaral, R., Ribeiro & M., Godoy, J. (2014). Choosing Textbooks without Looking at the textbooks – The role of the other's interpretations. International Conference on Mathematics Textbook. Reino Unido, UK: *Research and Development, University of Southampton*.

Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K., & Borrow, C. V. A. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(5), 503-532.

Caraça, B. de J. (1963). *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Bertand (Irmãos).

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D. et al (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), (pp.236–253).

Cawley, J. F., Foley, T. E. & Hayes, A. M. (2009). Geometry and Measurement: A Discussion of Status and Content Options for Elementary School Students with Learning Disabilities. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal*, 7(1), 21-42.

Charamlambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H-Y. & Mesa, V. (2010). Comparative Analysis of the Addition and Subtraction of Fractions in Textbooks from Three Countries. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 117-151.

Clements, D. H. & Stephan, M. (2004). Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. In: D. Clements, J. Sarama e A.-M. DiBiase (Eds*.), Engaging young children in mathematics*: Standards for early childhood mathematics education. Mahwah, NJ: Erlbaum, pp. 299–317.

Grossman, P. L. (2010). Learning to practice: the design of clinical experience in teacher preparation. Policy Brief, Washington. D.C.: NEA.

Hill, H. C.; Rowan, B. & Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal*, 42(2), 371-406.

Huang, H-M. E. & Witz, K. G. (2013). Children's Conceptions of Area Measurement and Their Strategies for Solving Area Measurement Problems. *Journal of Curriculum and Teaching*, 2(1), 10-26.

Kamii, C., & Clark, F. B. (1999). Measurement of length: The need for a better approach to teaching. *School Science and Mathematics*, 97(3), 116–121.

Lajolo, M. (1996). Livro Didático: um (quase) manual de usuário. *Em Aberto*, Brasília, 16(69), 3–9.

Litoldo, B.; Almeida, M. & Ribeiro, M. (2018). Conhecimento especializado do professor que ensina matemática: uma análise do livro didático no âmbito das frações. *TANGRAM - Revista de Educação Matemática*. Dourados - MS, 1(3), 03–23.

Lorenzato, S. (1995). Por que não ensinar Geometria? *Educação Matemática em Revista,* Blumenau, 3(4), 3-13.

Matic, L. J. (2019). The Pedagogical Design Capacity of a Lower Secondary Mathematics Teacher and Her Interaction with Curriculum Resources. REDIMAT – *Journal of Research in Mathematics Education*, 8(1), 53-75.

Silva, R. C. & Carvalho, M. A. (2004). O Livro Didático como Instrumento de Difusão de Ideologias e o Papel do Professor Intelectual Transformador. *In Educação, Práticas Pedagógicas e Políticas de Inclusão Social*, 1(1), (pp. 1–11).

Wijaya, A.,Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *This article is published with open access at Springerlink.com*. Educ Stud Math (2015) 89(4), pp. 1–65. DOI 10.1007/s10649-015-9595-1.

VI CIMTSK, CHILE 2023

Nos vemos lá.

AGRADECIMENTOS

Obter informações sobre os mais variados assuntos se tornou muito mais rápido e prático com a expansão da internet e dos meios de comunicação que, embora o acesso seja amplo, a divulgação científica ainda se encontra distante de muitas pessoas. Democratizar, inserir o conhecimento científico na sociedade e melhorar a vida das pessoas através dele, é um desafio que a Congresse.me se propôs.

Fazemos com que as ações científicas tenham maior visibilidade, divulgando os avanços nas mais variadas áreas e segmentos, de modo que as pesquisas sejam mais facilmente assimiladas pelas pessoas, se tornando essencial para o conhecimento e para a melhoria de vida da sociedade como um todo.

Através desta divulgação acreditamos que estamos transmitindo novas ideias através de pesquisas inovadoras, estamos propagando e democratizando o aprendizado e contribuindo para a criação e existência de novos conceitos relativos a diversas áreas do conhecimento. O reconhecimento da pesquisa através da comprovação e publicação é fundamental para que se produzam novos e melhores materiais científicos, de forma que estimule o pensamento crítico dos leitores.

Agradecemos à todos os envolvidos pela confiança, dedicação e parceria para a concretização deste evento e pelos novos conhecimentos compartilhados através deste livro.

V CIMTSK
2021

CONGRESSE.ME