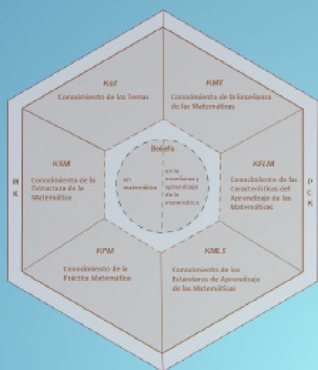
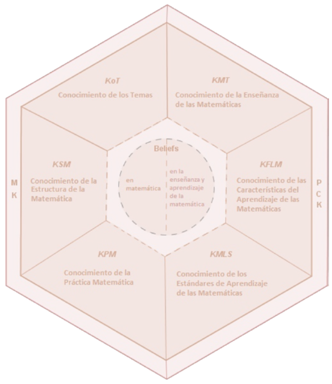
Avances, utilidades y retos del modelo MTSK

ACTAS DE LAS III JORNADAS DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD DE HUELVA

17 Y 18 DE JULIO 2017



Avances, utilidades y retos del modelo MTSK
Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva.
17 y 18 de julio de 2017.



Coordinación de la edición

Los responsables de la edición de esta obra son José Carrillo Yáñez y Luis C. Contreras González, miembros del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (SIDM), inserto en el Grupo de Investigación DESYM (HUM 0168) del Plan Andaluz de Investigación.

ISBN

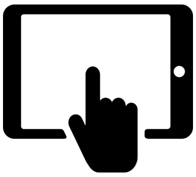
978-84-09-02175-8

Año Edición

2017

Composición y diseño

CG.SE



La configuración de esta publicación le permite una satisfactoria navegación dentro del documento gracias a la inclusión de marcadores e hipervínculos con los que podrá desplazarse entre los diferentes capítulos.

Además, incluye la opción de retroceso, con lo que si el/la lector/a quiere volver al índice, lo puede hacer a través de los marcadores "clicando" tanto en el enunciado de cada capítulo como en el número de página.

Los enlaces web y los emails referenciados en esta publicación están diseñados para que pueda utilizarlos en su navegador web y en su proveedor de correo electrónico.

Igualmente puede realizar anotaciones, incluir notas y realizar búsquedas internas.

Esta obra se realiza al amparo del proyecto de investigación "Caracterización del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas" (EDU2013-44047P), financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad del Gobierno de España.

Para su financiación se ha contado también con la colaboración del Programa Oficial de Doctorado en Investigación en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales, Sociales, Matemáticas y de la Actividad Física y Deportiva de la Universidad de Huelva.

ÍNDICE

PONENCIAS, TALLERES Y MESAS REDONDAS

COMUNICACIONES

PONENCIAS, TALLERES Y MESAS REDONDAS

1 IDIOSINCRASIA DEL MTSK, INVESTIGACIONES REALIZADAS Y UTILIDADES

Carrillo, J.

Introducción

Tras varios años reflexionando sobre el desarrollo profesional y luego el conocimiento profesional del profesorado de Matemáticas (incluyendo a los maestros cuando enseñan Matemáticas), el grupo SIDM (Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática), coordinado desde la Universidad de Huelva, y en el que se insertan diversos proyectos de investigación, (e.g. "Caracterización del conocimiento especializado del profesorado de Matemáticas", EDU2013-44047-P), ha construido un modelo de Conocimiento Especializado del Profesorado de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés, figura 1), sobre la base de modelos anteriores (e.g. Shulman, 1987; Ball, Thames y Phelps, 1998).

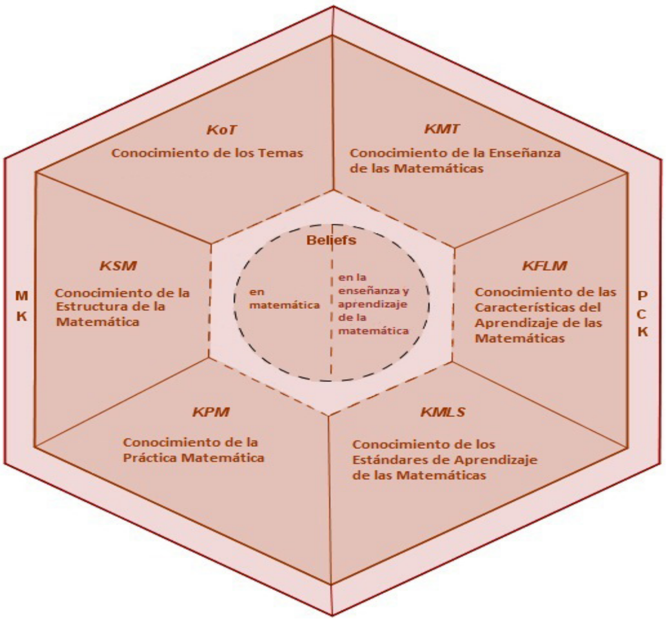


Figura 1: Modelo MTSK

Carrillo, J. (2017). Idiosincrasia del MTSK, investigaciones realizadas y utilidades. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 7-10). Huelva: CGSE.

Una de las características del MTSK es la adopción de una perspectiva intrínseca para caracterizar los subdominios del MK (dominio del conocimiento matemático), lo cual, pensamos, facilita la asignación de unidades de información al tiempo que no necesita de explicaciones de utilidad exclusiva del conocimiento en relación con otras profesiones. El MK queda caracterizado por la propia matemática: sus temas, las conexiones entre temas y la forma de hacer matemáticas. Por otra parte, la especialización se asocia al modelo completo. Es acerca del conocimiento relacionado con las matemáticas que se usa/necesita en/para la enseñanza, independientemente de que sea compartido con otros.

En el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático (PCK), se contempla solo aquello que esté determinado o condicionado por la matemática. Además, se incluye el dominio de Creencias y Concepciones sobre la Matemáticas y sobre su Enseñanza y Aprendizaje.

En nuestra aproximación al conocimiento del profesor, asumimos la noción de conocimiento de Schoenfeld (2010): “Yo defino el conocimiento de un individuo como la información que tiene disponible para usar para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea. ¡Nótese que, de acuerdo a esta definición, el conocimiento no ha de ser necesariamente correcto!” (p. 25). Es evidente que esta perspectiva de conocimiento se corresponde con un posicionamiento epistemológico, ontológico y metodológico que se asocian al paradigma interpretativo. No obstante, la aplicación del MTSK en contextos de formación inicial no puede obviar el carácter normativo que es exigible a los responsables o administradores de la misma.

Asimismo, en las investigaciones desarrolladas nos ha sido útil establecer una diferenciación con relación al grado de confianza en la interpretación de las unidades de información. Ahí surgieron las nociones de evidencia, indicio y oportunidad (Flores, Escudero y Aguilar, 2013), y la noción reciente de conocimiento evocado (Liñán, 2017).

Las tesis doctorales de miembros del SIDM (Nielka Rojas, Jeferson Moriel-Junior, Miguel Á. Montes, Eric Flores, Dinazar Escudero, Diana Vasco, Álvaro Aguilar, Mar Liñán) han permitido desarrollar el modelo, particularmente su sistema de categorías e indicadores, en el que también ha participado el resto de miembros. Por otra parte, se han desarrollado ejemplos completos de análisis de MTSK; los artículos Carrillo, Montes, Contreras y Climent (2017) y Carrillo, Climent, Contreras y Ribeiro (2017) son una buena muestra de ello.

Hasta ahora las investigaciones sobre MTSK han abordado los niveles educativos de Educación Infantil (comenzando), Primaria, Secundaria y Bachillerato, y Universidad, han enfocado temas de Aritmética, Geometría, Algebra, Análisis y Estadística, y mayoritariamente han sido estudios cualitativos. Se ha puesto de relieve la operatividad del modelo analítico (dominios/ subdominios/ categorías/ descriptores), sobre todo del sistema de categorías, su aplicación como herramienta para trabajar con profesores en formación inicial y continua, su utilidad para diseñar actividades para la formación, su posibilidad de servir de herramienta para diseñar y discutir programas de formación de profesores, y su aplicabilidad como herramienta para la reflexión del formador de profesores.

De las tesis doctorales presentadas y las que se encuentran en curso versa la publicación Cabanha, Maltempi y Carrillo (en prensa), cuyo objetivo es presentar el modelo MTSK como un constructo teórico y metodológico desarrollado de manera colaborativa.

Quedan algunos desafíos para orientar la investigación presente y futura:

a) Describir los subdominios y categorías con más profundidad

b) Reflexionar sobre el significado del MTSK en Educación Infantil

c) Aplicar MTSK a diferentes temas

d) Profundizar en las relaciones entre subdominios (ya iniciado en la tesis de Álvaro Aguilar)

e) Abordar el dominio afectivo (incluyendo creencias)

f) Desarrollar investigaciones que relacionen procesos de aprendizaje de alumnos con el MTSK

g) Testar el MTSK con profesores que apliquen perspectivas críticas o visiones culturales singulares (respecto de la matemática o del currículum, por ejemplo)

h) Enfocar el Mathematics Teacher Educators' (Specialized) Knowledge

i) Proyectar el MTSK sobre prácticas de enseñanza concretas

j) BTSK (Biología), ScTSK (Ciencias), STSK (Estadística), PhTSK (Física), QTSK (Química)

Nuestro trabajo futuro debería orientarse en los siguientes sentidos: seguir desarrollando el modelo, pero, sobre todo, aproximarnos a responder a preguntas esenciales de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, y realizar aportaciones a la formación (inicial y continua) del profesorado. Con esta orientación nos enfrentaremos al desarrollo teórico, la aplicabilidad-implementación del modelo y las conexiones con otras perspectivas o intereses.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Cabanha, D., Maltempi, M.V., & Carrillo, J. (2017). *Conhecimento Especializado do Professor de Matemática: o MTSK*. Brasil.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L.C., & Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 22, 185-205.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Ribeiro, M. (2017). Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) in the "Dissecting an equilateral triangle" problem. RIPEM. *International Journal for Research in Mathematics Education,* 7(2), 88-107 (Thematic issue "Education of teachers for the teaching of mathematics in the 21st century")

Flores, E., Escudero, D.I., & Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G.

Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Liñán, M. (2017). *Conocimiento Especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Huelva.

Schoenfeld, A.H. (2010). How we think. New York: Routledge.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. Harvard Educational Review, *57*(1), 1-22.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS PARA CONFORMAR UN MODELO DE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL FORMADOR DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Contreras, L.C.
Montes, M.
Muñoz-Catalán, Mª C.
joglar, N.

1. Una revisión teórica

Si en las tres últimas décadas se ha hecho un esfuerzo importante por caracterizar el conocimiento del profesor de Matemáticas, sobre todo a partir de los trabajos seminales de Lee Shulman (1986, 1987), en esta segunda década del siglo XXI parece existir una creciente preocupación por caracterizar el conocimiento del formador. Somos conscientes de que la formación del formador es la menos regulada; metafóricamente hablando, las exigencias de formación como profesor, en relación con la etapa educativa, pueden aproximarse gráficamente con una función decreciente. Quizás por ello, la literatura acerca del conocimiento del formador del profesor de matemáticas (por supuesto, desde la perspectiva de la Educación Matemática) no es demasiado abundante.

La respuesta a la pregunta ¿qué tipologías pueden caracterizar el conocimiento especializado[1] de un formador de profesores que enseñará matemáticas[2]?, podrá ser dada de diferentes formas dependiendo de la formación de quien la responde. En este sentido, es de esperar respuestas diferentes si provienen de matemáticos (no especialistas en Educación Matemática), profesores de matemáticas o didactas de la matemática. Es posible que esto explique las nomenclaturas que se han barajado en las aproximaciones al problema que nos planteamos: Mathematics Teacher Educator Knowledge (Jaworski, 2008), Mathematical Knowledge for Teaching Teachers (Zopf, 2010), Knowledge of Mathematics Teacher Trainer, o Mathematics' Teacher Trainer Specialized Knowledge

[1] Asumimos que en la formación de profesores que enseñarán matemáticas intervienen diversos actores, cada uno de los cuales aporta a la formación una perspectiva diferente (psicopedagógica, sociológica, desde las didácticas específicas). Nos centraremos exclusivamente en la perspectiva que procede de la Educación Matemática.

[2] Entendido como profesor que enseña matemáticas, aunque puede enseñar también otras materias, o incluso puede enseñar elementos matemáticos de un modo indirecto. Incluimos aquí, por tanto, a los maestros de Infantil y Primaria. Para facilitar la lectura nos referiremos a ellos en adelante como profesores de matemáticas.

Contreras, L.C., Montes, M., Muñoz-Catalán, M.C. y Joglar, N. (2017). Fundamentos teóricos para conformar un modelo de conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 11-25). Huelva: CGSE.

(entre otros). Dicho de otra forma, las concepciones del formador sobre el contenido de la formación, sobre los modelos de profesor de matemáticas y, consecuentemente, sobre la matemática y sus procesos de enseñanza y aprendizaje condicionan la respuesta a nuestra pregunta. Esto podría parecer que no facilita la resolución del problema, sin embargo, desde nuestra perspectiva puede ilustrar el camino hacia su solución, ofreciendo quizá una respuesta integrada desde varias visiones complementarias en muchas ocasiones. Así, si representamos a los tres colectivos anteriores (matemáticos, profesores de matemáticas y didactas de la matemática) como vértices de un triángulo (¿equilátero?), la caracterización que buscamos podría emerger de las tensiones internas entre los vértices que, de alguna manera podría converger en su baricentro (Figura 1).

Si nos preguntamos por las fuentes que pueden inspirar a un formador en su toma de decisiones acerca del contenido de esa formación o lo que caracterizará su visión acerca del conocimiento del formador, un modelo tridimensional cuyos ejes son el conocimiento matemático, el conocimiento sobre Educación Matemática y la práctica o identidad profesional, podría representar las distintas pirámides triangulares que pondrían de relieve las diferentes aproximaciones como respuestas a nuestro problema (Figura 2). La perspectiva que adoptaremos en este documento es la que emerge del Modelo de conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK).

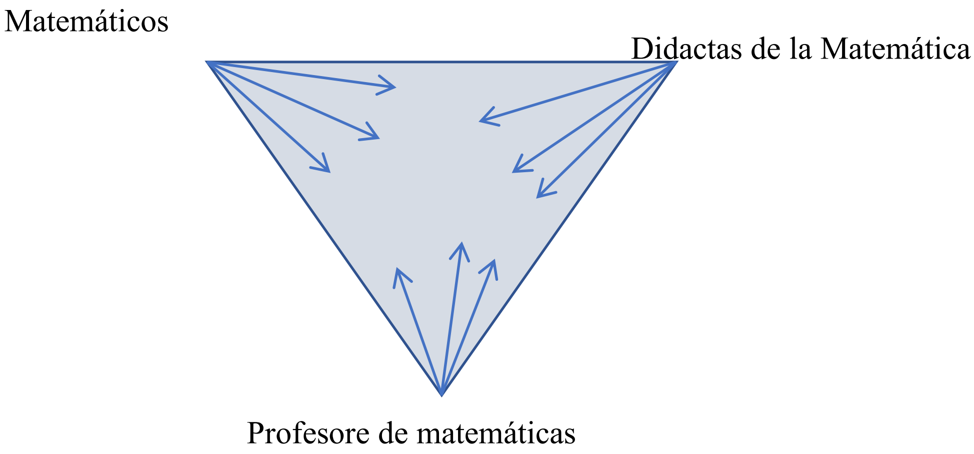


Figura 1

Desde nuestra perspectiva, resulta obvio que un formador de profesores que enseñará matemáticas debe tener una imagen clara del conocimiento que pretende que sus estudiantes construyan. Este conocimiento puede estar modelado informalmente por la experiencia, o formalmente por un modelo de conocimiento profesional, en nuestro caso MTSK[3], pues su intención es desarrollar los conocimientos que este modelo encierra, desde la formación inicial a la permanente. Sin embargo, no es tan claro qué otros elementos han de formar parte de su propio conocimiento y tampoco está claro, si asumimos que parte del conocimiento del formador estará

[3] En el sentido de que debe tener conocimiento especializado para la enseñanza de la matemática en relación con la matemática que enseñarán los profesores a los que forma (al menos).

vinculada a MTSK, si existe y cuál es el lugar que supone el límite superior de MTSK del profesor de matemáticas y a su vez el límite inferior exigible al conocimiento del formador.

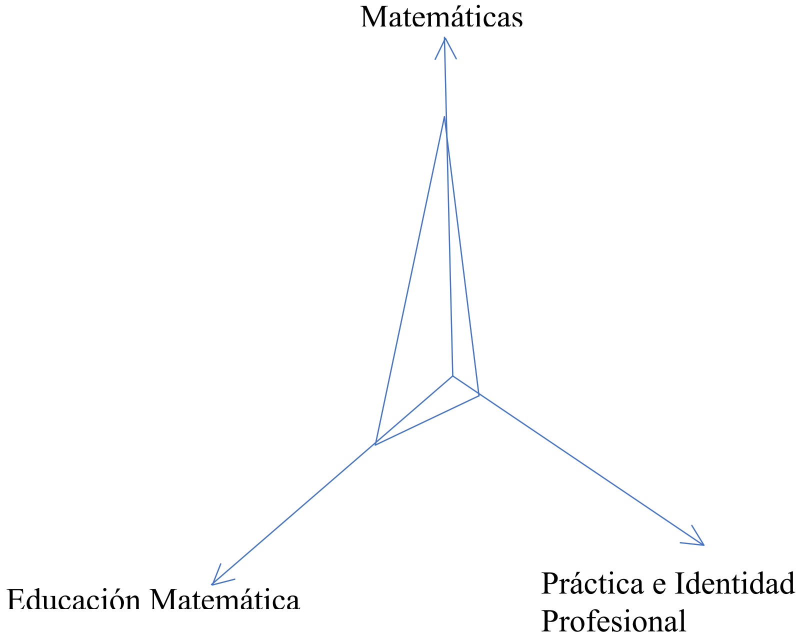


Figura 2

En la literatura revisada se encuentra más información relativa a las acciones que ha de realizar el formador en su trabajo que al conocimiento necesario para ello. Esto nos hace pensar que deberíamos utilizar esas acciones como oportunidades para identificar los conocimientos. Ello implica que, probablemente, la observación de las prácticas del formador será nuestra fuente de información para acceder a su conocimiento, así como las investigaciones sobre la propia práctica, incluyendo por ejemplo grabaciones, o sesiones de discusión entre pares, dado que el desempeño profesional de aquellos que investigamos en Educación Matemática suele ser la formación de maestros.

Zaslavsky y Leikin (2004) discuten sobre una adaptación de la triada de enseñanza de Jaworski (1992, 1994) a la formación de profesores[4]. La creación de oportunidades para que los estudiantes aprendan matemáticas se transformaría en la creación de oportunidades para que los EPP (estudiantes para profesor) aprendan a enseñar matemáticas. Así, los elementos de la triada serían la gestión del aprendizaje de los profesores de matemáticas, contenidos desafiantes (no solo matemáticos) para ellos y sensibilidad hacia los EPP. Dentro de los contenidos desafiantes se encuentra la triada referida a los estudiantes, es decir, contenidos matemáticos desafiantes para los estudiantes, gestión del aprendizaje de los estudiantes y sensibilidad hacia los estudiantes. Por ejemplo, el conocimiento de casos o viñetas, elaboradas *ad hoc* o extraídas de la realidad, en las que situar al EPP ante problemas de enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático, se encontrarían

[4] Jaworski se refiere aquí a estudiantes; en el caso de los EPP, el contenido lo formarían tanto de MK como de PCK, por supuesto.

en esta línea, poniendo de relieve estrategias que formarían parte del conocimiento para la enseñanza[5].

Si nos apoyamos en las componentes[6] que Cooney y Krainer (1996) establecen para los programas de formación de profesores, el formador debería facilitar el aprendizaje de los EPP (en lo referente a MK y PCK), promover su habilidad para reflexionar sobre su aprendizaje y sus experiencias de enseñanza y mejorar su socialización en el contexto donde trabaja. Esto nos lleva a la implicación del formador en el desarrollo de una determinada identidad profesional de sus EPP. Desde luego, no es lo mismo una formación acrítica de corte academicista, que una formación centrada en la reflexión sobre la práctica profesional. Por ello, al igual que en MTSK, el núcleo central está formado por las concepciones y creencias, estas han de formar también parte del modelo de análisis el conocimiento del formador.

Algunos autores han sugerido que el conocimiento del formador de profesores es cualitativamente diferente al de los EPP (Ball, 2008; Jaworski, 2008; Perks y Prestage, 2008; Rider y Lynch-Davis, 2006; Smith, 2003; Zopf, 2010). La primera diferencia es que no es lo mismo enseñar a niños que a adultos. A los primeros se les enfrenta a conocimientos nuevos, a los EPP se les moviliza una información que con frecuencia conocen o, al menos, creen que conocen[7]; como dice Lloyd (2006), lo que conocen es débil y les concede una visión reducida de la matemática y de su enseñanza. Desde esta perspectiva, los retos a los que debemos enfrentar a los EPP deben caracterizarse por la creación de oportunidades para construir y desarrollar ideas útiles tanto en MK como en PCK. Ello nos lleva a pensar en que una diferencia entre el conocimiento del EPP y de su formador ha de estar, por tanto, en el alcance y la profundidad del conocimiento que manejan, matizando así nuestra idea informal de límites inferior y superior a que nos hemos referido anteriormente.

Para Zopf (2010) la diferencia no es solo la profundidad y extensión, también señala que el contenido matemático es diferente; mientras que los profesores han de enseñar matemáticas, los formadores han de enseñar conocimiento para enseñar matemáticas (en nuestro caso MTSK). Por otro lado, los objetivos de la enseñanza son diferentes. Los niños aprenden las matemáticas para su propio uso; los profesores aprenden un conocimiento especializado (de matemáticas y para la enseñanza de las matemáticas) con la finalidad de enseñar a sus estudiantes. Ayudar a los EPP a desempaquetar las matemáticas de forma que les ayude a darle sentido a lo que presentarán a sus estudiantes requiere un trabajo diferente a ayudar a los estudiantes a dar sentido a las matemáticas. Zopf llegó a la conclusión de que el conocimiento matemático (y conocimiento de las matemáticas) y el conocimiento matemático para la enseñanza (MTSK, en nuestro caso) están dentro de lo que él denomina MKTT [conocimiento matemático para la enseñanza de los

[5] Si por C entendemos el contenido a enseñar a los EPP, parafraseando las siglas de MTSK, esto sería parte del KCT.

[6] Proponen 4 dimensiones organizadas por pares y en ejes perpendiculares, que expresan continuidad y unidad: acción-reflexión y autonomía-networking.

[7] Es importante resaltar que no estamos pensado solo en las matemáticas. Los EPP se enfrentan también a otros conocimientos, algunos de ellos especialmente asociados o condicionados por creencias y experiencias personales, como lo que ellos puedan pensar que funciona metodológicamente en el aula. De otros, como por ejemplo el conocimiento de las dificultades habituales en el aprendizaje de las fracciones, solo podrán tener una idea personal derivada de sus experiencias.

profesores]. Además, ese MKTT incluye un conocimiento matemático más desarrollado y fundamentado. Así, para Zopf, el conocimiento que requieren los formadores abarca todo el conocimiento matemático para la enseñanza, y algo más[8], formando una parte importante de ese algo más, las conexiones y el conocimiento de cómo se construye y valida el conocimiento matemático. Así, dos de los elementos diferenciadores sospechamos que lo podremos encontrar en el KSM y en el KPM[9].

Tzur (2001, citado en Zopf, 2010) describe su evolución desde aprendiz de matemáticas a profesor de matemáticas y, desde ahí, a formador de profesores de matemáticas y posteriormente a mentor de educadores de profesores de matemáticas. En particular, en ese proceso, es relevante pensar en las dificultades que perciben los aprendices en cada situación (ya relativas a las matemáticas o a su enseñanza y aprendizaje). En ese mismo sentido, Zaslavsky y Leikin (2004) nos hacen ver que el diseño de tareas matemáticas para el desarrollo profesional de los profesores requiere que los formadores usen conocimiento matemático, conocimiento de los profesores como aprendices y uso de enfoques innovadores para afrontar el aprendizaje de los EPP, exigiendo en todos los participantes una posición reflexiva y un trabajo colaborativo; de nuevo ello significa posicionarse ante una determinada identidad profesional a desarrollar.

Tratando de encontrar las diferencias que todos ellos admiten entre el conocimiento del profesor de matemáticas y el conocimiento del formador, Zopf (2010) realiza un estudio desde la teoría emergente de los datos para identificar características del MKTT (Mathematical Knowledge for Teaching Teachers) y centra su análisis desde tres perspectivas: el uso de interpretaciones y representaciones[10], el uso de ejemplos[11] y el modo de gestionar el discurso acerca de las matemáticas[12]. En el primero identificó dos aspectos: el desarrollo del conocimiento matemático de los EPP como parte del conocimiento matemático para la enseñanza y el desarrollo de estrategias pedagógicas que los maestros podrían utilizar para enseñar a los niños esos conocimientos. Las interpretaciones y representaciones se usaron para mostrar ideas matemáticas, desafiando el conocimiento matemático, y para el desempaquetado de las ideas matemáticas comprimidas dentro de los conceptos abordados. En cuanto al uso de ejemplos, dependiendo del tipo de aprendices, se usaron ejemplos (con los niños) preparados con la finalidad de desafiar a los aprendices, o se pidió la generación de éstos (a los EPP) para ayudar al desempaquetado de conceptos o abordar su enseñanza. En cuanto a la gestión del discurso matemático, analizó el uso de estrategias de interacción para explicitar el pensamiento de los EPP sobre las matemáticas a través de sus intervenciones, preguntas y reacciones

[8] Centrado solo en las diferencias en MK, establece las siguientes características diferenciadoras: carácter panorámico y conectado (más allá del conocimiento fragmentado que manejan los estudiantes), fluido e intencional.
[9] El KPM parece que puede actuar de vehículo principal de comunicación cuando se reconstruye el conocimiento matemático para su enseñanza.
[10] Los formadores usan interpretaciones y representaciones básicamente por tres razones: porque los maestros están familiarizados con ellas, porque pueden ser útiles para modificar sus ideas y por su capacidad para el desempaquetado de ideas matemáticas.
[11] En cuanto a los ejemplos, se usaron para hacer visibles las matemáticas que encerraban las interpretaciones o representaciones; son ejemplos especialmente elegidos para el aprendizaje de los profesores (para abordar debilidades detectadas en su conocimiento).
[12] Los formadores parecen asumir dos estrategias pedagógicas: la enseñanza dirigida y la enseñanza guiada e interactiva.

ante las intervenciones de otros y la forma en que se sintetizaban las ideas matemáticas.

Para Abell *et al.* (2009) existe una réplica de PCK para los formadores de profesores de matemáticas. En este caso, el conocimiento de la materia que necesita un formador incluye tanto el contenido matemático como el conocimiento para su enseñanza. Se incluyen en este PCK[13] diferentes orientaciones (que podríamos identificar como concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas o como conocimiento sobre teorías de aprendizaje matemático) hacia el aprendizaje de la matemática, el conocimiento de cómo aprenden los EPP (y de sus dificultades cuando se afrontan al aprendizaje de determinados contenidos), el conocimiento de los planes de estudio para la formación de profesores, el conocimiento de las estrategias de instrucción para la enseñanza de los futuros profesores, y el conocimiento de la evaluación de los futuros profesores.

Veamos un ejemplo de esta transferencia doble que usa Olanoff (2011). Supongamos que el contenido en cuestión es la introducción a la multiplicación de fracciones. Lo que se pretende es que el estudiante de primaria aprenda, con significado, a multiplicar fracciones. Pero, para que los EPP sepan hacerlo, según Olanoff, el formador de profesores debe tener en cuenta el hecho de que sus EPP tendrán ideas preconcebidas sobre el tema (tanto desde la perspectiva del conocimiento matemático como de su enseñanza), que su conocimiento será de carácter procedimental (y que, por tanto, trasmitirán ese carácter procedimental en su enseñanza) y, que en algunos casos, será erróneo[14]. El formador de profesores debe ser capaz de construir conocimiento adecuado sobre los presupuestos anteriores, ayudar a aclarar los conceptos erróneos, así como introducir nuevas formas de ver la cuestión a través de modelos de representación adecuados. Tener un conocimiento amplio de las diferentes formas de modelizar o representar una multiplicación de fracciones[15], permite a los formadores elegir ejemplos que ayuden a resaltar esas diferentes representaciones[16] que sus estudiantes necesitan conocer para su trabajo en el futuro. Los formadores de profesores deben, además, ser capaces de hacer conexiones entre las operaciones de números enteros y fracciones y ayudar a dotar de significado a los frágiles conocimientos algorítmicos que tienen muchos EPP[17]. Los formadores de profesores deben ser capaces de extraer las características más importantes de un tema y hacer conexiones entre ellas con el fin de ayudar a los futuros profesores a profundizar en su comprensión. Así, si ahora el tema fuera la división de fracciones, los formadores han de ser conscientes de la dificultad que entraña la división partitiva con fracciones, y esto a su vez podría ser utilizado para conectar más fácilmente con el algoritmo de invertir y multiplicar para la división fracciones.

[13] Naturalmente C no es aquí solo matemáticas.
[14] Esto formaría parte del conocimiento de las características del aprendizaje de los profesores por parte de los formadores.
[15] Que sería parte del KoT y KCT de los formadores.
[16] Que sería parte del conocimiento de la enseñanza de los formadores. Este ejemplo permite visualizar el conflicto entre límites superior e inferior (del conocimiento del profesor y del conocimiento del formador); ser capaz de hacer ver al profesor las ventajas e inconvenientes de cada tipo de representación nos indica alguna componente del conocimiento del formador.
[17] Y esto es parte del KSM del formador.

Un aspecto importante que debe formar parte del conocimiento del formador de profesores, siempre según Olanoff (2011), es ser capaz de decidir qué aspectos de un tema ayudarán a los futuros profesores a hacer las conexiones matemáticas que ellos mismos tendrán que enseñar a sus estudiantes. Si los formadores de profesores creen que los EPP deben ser capaces de explicar por qué funcionan los diferentes algoritmos para la multiplicación y división de fracciones, tienen que ser capaces de dedicar tiempo suficiente en sus cursos para estos temas. También deben decidir la mejor forma de explicar las justificaciones de estos algoritmos, y las posibilidades y limitaciones de ellos en ejemplos concretos.

Otro aspecto a destacar es ser capaz de establecer metas específicas de aprendizaje para los EPP, proporcionando una explicación detallada de lo que esta comprensión conceptual en realidad implicaría.

Finalmente, en relación con lo anterior, los formadores han de estar familiarizados con el diseño y el uso de evaluaciones útiles para ayudar a decidir si esos objetivos se han logrado.

Si reflexionamos sobre el ejemplo de Olanoff se tiene la sensación de que se ha podido sobrecargar MTSK con aspectos que quizás no formen parte del conocimiento del profesor, sino más bien del conocimiento del formador de profesores[18]. Sin embargo, hay elementos nuevos, como el conocimiento sobre las ideas erróneas que los EPP pueden tener acerca de un tema, sobre cómo abordar su reconstrucción (usando, en su caso, su conocimiento sobre las características y relaciones de cada modelo de representación). Con el fin de promover conexiones entre conceptos para fortalecer la comprensión que los EPP, los formadores de profesores han de tener *conocimiento sobre la estructura matemática*[19] de mayor profundidad que la que esperan que tengan sus EPP y, sobre todo, un conocimiento sobre cómo construir en los EPP esas conexiones (conocimiento de corte metacognitivo que es preciso ubicar en algún subdominio).

El *conocimiento sobre los estándares de aprendizaje de los EPP* debe conllevar la capacidad de establecer, justificar y evaluar metas de aprendizaje de sus EPP. Esta versión del KMLS para al formador también es diferente, formaría parte del conocimiento de los estándares de desarrollo profesional del profesor de matemáticas, de forma que en la formación inicial ya se comience a trabajar en la orientación de ese desarrollo.

Junto a esto, y volviendo a Zaslavsky y Leikin (2004), los formadores han de saber preparar escenarios en los que los EPP puedan adquirir el MTSK esperado. Estos escenarios han de suponer retos para los EPP ante situaciones de enseñanza y aprendizaje de sus estudiantes sobre las que, siguiendo a Cooney y Krainer (1996), tengan la oportunidad de reflexionar sobre las propuestas que elaboren. Sin embargo, es preciso establecer qué conocimiento es el que permite esa tarea; no parece tan simple como encajarlo en un *conocimiento para enseñar a enseñar matemáticas* ni en *conocimiento para la enseñanza de la didáctica de la matemática*. Es preciso

[18] Cabe preguntarse si un profesor (de primaria) con un buen conocimiento sería aquel capaz de autorregular su propia construcción de conocimiento para la enseñanza, ejerciendo de “autoformador”; de alguna forma eso es lo que ocurre en Finlandia pasando, estos profesores, a ser formadores de otros.

[19] En este subdominio es posible que sepamos encontrar con más claridad las diferencias.

ver su posible relación con dos de las componentes de Sánchez y García (2004): conocimiento de las distintas formas de caracterizar el proceso de aprender a enseñar matemáticas-referido al conocimiento de los distintos enfoques teóricos sobre formación de EPP (aquí estaría la dialéctica entre *Phronesis* o *Episteme* -véase, por ejemplo, Kessels y Korthagen, 1996, o el *Noticing*, entre otros modelos de formación) y conocimiento del uso del contenido en un contexto de enseñanza de las matemáticas.

2. A modo de síntesis

Independientemente del esquema usado para representar el conocimiento del formador, la palabra contenido (representado por ***C***) está presente en varios momentos de nuestro discurso, ¿es siempre el mismo contenido?, ¿es ese contenido MTSK? Desde luego MTSK es, para nosotros, parte importante de ese contenido, pero tiene diferencias con el MTSK del profesor, diferencias que pasan por el conocimiento sobre las relaciones entre subdominios de MTSK que lo dotan de una mayor "complejidad".

Admite poca discusión el hecho de que, dado un contenido matemático seleccionado por el formador para incluir en su trabajo con los EPP, ese mismo contenido ha de formar parte de su conocimiento. También admitiremos que ese conocimiento ha de ser ***mayor***, tanto en ***alcance***, como en ***profundidad***. Podemos sospechar que dos subdominios que nos pueden ayudar a determinar esos conceptos de *alcance* y *profundidad* son el **KSM** y el **KPM**, es decir, el conocimiento matemático del formador parece que ha de poseer una estructura más coherente y sólida, a la vez que más habilidad acerca de cómo se construye y valida el conocimiento matemático.

Los dos elementos que siguen tienen claras diferencias. El que desarrollamos en este párrafo, junto con el de contenido matemático (una vez definidos su *alcance* y *profundidad*), forman parte del contenido de la formación (***C***) (naturalmente, circunscrita a la perspectiva de la educación matemática). Mientras que en el siguiente abordaremos el P ***C*** K, aquí abordaremos el PCK. El formador ha de conocer el PCK que quiere que construyan sus estudiantes. Nos preguntamos en qué medida, al igual que hemos visto en el MK, ese PCK es diferente.

Si existe un subdominio relativo al conocimiento didáctico del contenido de la formación en el conocimiento del formador, parece razonable que contuviera elementos como *conocimiento sobre las características del aprendizaje de los EPP* (teorías de cómo aprenden –mediante casos, en la propia práctica, por aplicación de la teoría a la práctica-, obstáculos comunes -muchos relativos a sus concepciones y creencias, que hará que esta categoría esté muy cerca de formas de interacción con el contendido matemático; otros de índole matemática- y fortalezas), *conocimiento sobre cómo enseñar el contenido de la formación* (***C***) (cómo ayudar a comprender las dificultades y fortalezas de sus estudiantes, cómo enseñar a enseñar matemáticas –cómo enseñar a utilizar los recursos, cómo usar los ejemplos-, cómo utilizar los estándares de aprendizaje de las matemáticas) o conocimiento acerca de diferentes formas o modelos para *organizar el contenido de la formación* (por ejemplo, conocer las diferencias entre enfoques que vinculan o no el contenido matemático con el didáctico matemático, lo que también tiene relación con las expectativas de aprendizaje de los EPP o el nivel de desarrollo esperado).

Las concepciones y creencias del formador van más allá de su visión de la Matemática como ciencia y como objeto de enseñanza y aprendizaje. El formador tiene una idea de qué debe aprender un futuro profesor que enseñará matemáticas (EPP); ello tendrá consecuencias a la hora de determinar los contenidos de la formación y de su orientación; también tiene una idea de cómo ayudar a sus estudiantes para que se conviertan en profesores que enseñarán matemáticas, es decir, tiene una idea de cómo aprenden (lo que él entiende que deben aprender) y de cómo colaborar en su aprendizaje (lo que determina su modelo de enseñar a ser profesor que enseña matemáticas); y, por último, tiene una idea de qué, cómo y cuándo debe evaluar el aprendizaje de sus EPP, lo que sin duda tendrá también implicaciones en los dos elementos señalados con anterioridad.

3. Ejemplificando diferencias entre el conocimiento del profesor y el conocimiento del formador en el ámbito del conocimiento didáctico del contenido

Como se ha señalado antes, hay dos aspectos en los que conviene profundizar. Por un lado, nos interesa determinar las características de los subdominios del conocimiento del formador; y por otro, dado que asumimos que ambos (profesor y formador) comparten MTSK, nos interesa especificar los elementos que los diferencian. La resolución del conocido problema de los conejos y gallinas nos da pie a reflexionar sobre las diferencias entre el conocimiento didáctico del contenido de un profesor de matemáticas y un formador de profesores de matemáticas (naturalmente, como ya se ha señalado el *contenido* no es el mismo).

Un formador en concreto, Leopoldo, piensa que es importante que los EPP aprendan a resolver problemas y considera que debe formar parte del currículo del profesor. Sabe, asimismo, que no es frecuente que hayan sido formados en el uso de heurísticos durante su educación obligatoria (a pesar de que queda explícitamente reflejado como contenido de la Educación Primaria y de la ESO) y que es probable que confundan problemas con ejercicios. Además, es consciente de que ante problemas como el que sigue no se plantearán su resolución con herramientas adecuadas para la Educación Primaria, y que usarán otras más potentes que han trabajado en la ESO o el Bachillerato. Por último, es consciente de que a través de la formación en RP de los EPP, combinada con el análisis del potencial educativo que tiene, incidirá en las creencias de sus alumnos e iniciará el camino en la construcción de un recurso de enseñanza para ellos.

El enunciado del problema es el siguiente:

> *En un corral hay conejos y gallinas. Desde la cerca que los contiene alguien dice que ha podido contar 14 cabezas y 38 patas, ¿cuántas gallinas y conejos hay?*

Como es sabido, la resolución de este problema puede realizarse a través de diferentes aproximaciones. La más elemental consiste en una resolución usando una estrategia gráfica, representando las 14 cabezas y, a continuación, colocando en ellas 28 patas, de dos en dos (un estudiante de Educación Primaria dijo en su solución que había imaginado a los conejos elevados sobre sus dos patas traseras, dejando ver solo esas extremidades, mientras que veía la dos de las gallinas). Las diez patas que quedan por colocar, como hay que ubicarlas de dos en dos, corresponden a 5 animales que pasarían de tener 2 a cuatro patas, es decir, esos serían los conejos; las 9 cabezas restantes, con dos patas, corresponderían a las gallinas.

Cuando Leopoldo trabaja este problema con estudiantes del Grado de Educación Primaria, usa esta resolución para hacerles ver que es adecuado para alumnos de Educación Primaria, que solo necesitan realizar un producto y una sustracción, lo que justifica tal posibilidad en el segundo ciclo de ese nivel educativo.

Leopoldo sabe que, desde el punto de vista algebraico, el problema se resuelve planteando un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

$$x + y = 14$$

$$2x + 4y = 38$$

y que la solución comentada es un caso particular (para $y = 0$) de una estrategia de resolución equivalente a tomar dos valores para las incógnitas que cumplan la primera de las ecuaciones y, solventar la desviación (*error*) que supone imponerle el cumplimiento de la segunda de las ecuaciones. A esta estrategia, que el formador usa con los EPP cuando analiza este problema, la denominamos *ensayo-error controlado*.

Este formador sabe que la estrategia es válida para cualquier par de números naturales que sumen 14, como puede comprobarse fácilmente. Veamos un ejemplo:

> Tomemos los valores 6 (gallinas) y 8 (conejos) como soluciones de la primera ecuación. Si imponemos la segunda, obtenemos 44 patas, y no 38; el exceso de 6 patas implica “transformar conejos en gallinas”, quitando patas de dos en dos, es decir, a 3 animales, dejando solo 5 conejos, los otros 3, junto con los 6 de partida son las gallinas.

Leopoldo piensa que es interesante en el trabajo con los EPP invitarles a pensar en transformaciones del enunciado que vayan más allá de la modificación del contexto, con la intención de que comprendan la relación entre las dos variables, y por ello usa de forma constante esta estrategia de enseñanza. Piensa que si los EPP comprenden el valor formativo de la transformación de un problema podrán usarlo como estrategia de enseñanza.

Una variante interesante es la siguiente:

> *A una celebración asisten 180 comensales que hay que ubicar en mesas de 6 y de 9 personas. Si el espacio permite ubicar solamente 25 mesas, ¿cuántas mesas de cada tipo tendremos que colocar?*

El formador es consciente de que el primer enunciado puede evocar tanto una relación aditiva como multiplicativa (2 es la mitad de 4 y 2 es 4-2). De hecho, cuando los EPP dividen entre dos la diferencia entre 44 y 38, para ver cuántos animales tienen que "transformar", es la relación multiplicativa la que les evoca la situación, y no la aditiva que es la que necesitarán para resolver el segundo enunciado. El formador sabe que ha usado un ejemplo poco *transparente* para visualizar esa relación, pero a pesar de ello la utiliza para poder reflexionar sobre ello cuando los EPP afrontan el segundo enunciado.

Para resolver el segundo enunciado podemos proceder como sigue:

> Tomamos dos números naturales que sumen 25, por ejemplo, 12 (mesas de 6) y 13 (mesas de 9). Imponemos ahora la segunda condición, lo que implicaría la posibilidad de sentar a 189 invitados. Ahora hemos de "ajustar" la diferencia de 9.

Leopoldo es consciente de que los EPP que no establecieron una relación adecuada entre las variables tienden a intentar dividir 9/2, cuando el proceso implica hacer la división 9/3 (para calcular cuántas mesas de 9 he de cambiar por mesas de 6, pues hay para más invitados de los que realmente tengo).

En la transformación anterior se altera exclusivamente una de las ecuaciones, modificando a su vez la relación entre variables, que nos permite ver el 3, como diferencia entre 9 y 6 como el valor por el que dividir el exceso.

Leopoldo sabe que otra transformación interesante consiste en modificar la segunda ecuación en una de la forma $y = nx$, como en el ejemplo que sigue:

> *La diferencia de edades de Jorge y su abuelo es de 49 años. Sabemos que la edad del abuelo es 8 veces la edad de Jorge, ¿cuántos años tiene cada uno?*

Al igual que el anterior, este problema puede resolverse mediante una estrategia gráfica, que consiste en representar con cualquier símbolo la edad de Jorge, por ejemplo, con ⊗, lo que equivale a decir que su abuelo tendrá ⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗. Pero si la diferencia es de 49 años, al ser la diferencia ⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗ - ⊗, eso significa que esa diferencia es ⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗, lo que nos indica que cada ⊗ son 7 años, que es la edad de Jorge.

Si lo resolvemos por la estrategia que venimos usando, debemos tomar dos números naturales de forma que estén en relación 8 a 1, por ejemplo 32 y 4. Su diferencia es 28, frente a 49 supone un "déficit" de 21. Es fácil comprobar que ese "déficit" siempre va a ser un múltiplo de 7, lo que nos indica el resultado de dividir ese valor entre 7 nos proporciona el valor a incrementar la edad supuesta para Jorge.

A la vista de lo anterior, dado que la segunda ecuación ($y = nx$) es un caso particular de la ecuación $ax + by = m$, resulta evidente (para el formador) que la estrategia de *ensayo-error controlado* nos permite resolver sistemas de la forma:

$$x +/- y= n$$

$$ax +/- by = m$$

La cuestión que cabe plantearse ahora es, ¿qué valores de c y d, para transformar la primera ecuación en $cx + dy = n$, permitirían la resolución de este sistema por *ensayo-error controlado*?

Este formador es consciente de las conexiones entre representaciones gráficas y algebraicas presentes en la resolución de este problema (las primeras como precursoras de las segundas) y sabe que el problema se reduce a, dadas dos rectas que se cortan, y elegido un punto cualquiera de una de ellas, determinar el punto de corte, a partir del primer punto elegido, a través de una recta paralela, por ese punto, a la segunda recta. No ha resuelto esta situación de álgebra lineal, pero se ha propuesto abordarla con sus compañeros de equipo, de la misma forma que se pregunta sobre el funcionamiento de la estrategia en sistemas con soluciones no enteras.

El cuadro 1 nos permite visualizar algunas categorías de subdominios y sus diferencias entre el conocimiento del profesor y el del formador. Vamos a identificar el PCK del EPP y para facilitar la expresión del análisis e identificar subdominios en la columna del PCK del formador, utilizaremos las iniciales del MTSK, poniendo (‘). No pretendemos indicar correspondencias entre elementos del conocimiento del EPP y del formador.

No resulta fácil identificar diferencias en esta componente didáctica en tanto que no se ha determinado con precisión la naturaleza de este dominio; se trata de plantear cómo hacer accesible el contenido de la formación a los EPP. Cabe pensar que, como ya señalamos en el dominio del conocimiento matemático, la diferencia principal resida también en el (la amplitud) contenido matemático sobre el que versa cada uno[20]. En este caso, el contenido matemático de referencia de los EPP es que sus alumnos conozcan la estrategia ensayo-error controlado para la resolución de problemas (en respuesta a ¿qué debe saber el profesor que trabaja este problema con los alumnos de primaria?). En el caso del contenido de formación del formador de profesores, el referente matemático reside la estructura de los sistemas de ecuaciones de primer grado que hacen que la estrategia ensayo-error controlado sea válida. Sin embargo, no es esta solo la diferencia, como se pone de relieve en el cuadro 1.

[20] KMT’(2) está relacionado con conocer los distintos modos de resolver el problema, los registros de representación manejados en cada uno de ellos, los grados de formalidad que cada uno requiere y las ligazones entre ellos. Asimismo, está relacionado con el conocimiento de los heurísticos implicados en este problema.
KMT’(3,6) está relacionado con el conocimiento la naturaleza común que poseen los sistemas de ecuaciones de primer grado correspondiente a los tres problemas que justifica la validez de la estrategia ensayo-error controlado en los tres casos, conocer que los sistemas de la forma genérica indicada en el caso se resuelven con dicha estrategia y conocer conexiones de complejización con el álgebra lineal.

PCK del EPP	PCK FORMADOR (evidencias y conocimiento)
(KMT) Conocer que el problema de las gallinas y los conejos es un buen ejemplo para trabajar el ensayo-error como estrategia de resolución de problemas. (KMLS) En qué curso es esperable que los alumnos de Primaria utilicen un procedimiento de resolución determinado. (KFLM) Los distintos abordajes que los alumnos de Primaria pueden utilizar para la resolver los problemas. (KMLS) En qué curso es adecuado plantear el problema (KMLS) Detrás y delante de qué temas debe abordarse. (KMT) Conocer el Problem posing como estrategia de enseñanza (KMT) Conocer conjunto de problemas secuenciados, orientados a comprender distintas relaciones entre variables en un sistema de ecuaciones de segundo grado.	Creencias del formador "Es importante que los EPP aprendan a resolver problemas" (KMLS' (1)) "La RP deber formar parte del currículo del EPP" (KMLS' (2)) "No es frecuente que los EPP hayan sido formado en el uso de heurísticos" (KFLM' (1)) "Los EPP confunden problema con ejercicio" (KFLM' (2)) "Usarán otras (herramientas) más potentes que han trabajo en la ESO o en el Bachillerato" -Conoce las formas en que los EPM interactúan con este tipo de problemas (Uso de ecuaciones) (KMT'(1)) "Es consciente de que a través de la formación en RP..." Conoce la metodología de la Resolución de Problemas como medio para cuestionar el uso de ese procedimiento (procedimiento más sofisticado) (KMT' (2)) "diferentes aproximaciones. La más elemental...estrategia gráfica" y lo que dijo un estudiante de primaria. Conoce ejemplos de respuesta reales de alumnos de primaria que ayuden al EPM a entrar en la reflexión sobre resoluciones alternativas más próximas a Primaria (KMT' (3)) "pensar en transformaciones del enunciado que vayan más allá de la modificación del contexto" Sabe que la tarea de transformación del enunciado (problem posing) llevará a profundizar en la relación entre las variables (KMT' (4)) "sabe que ha usado un ejemplo poco transparente para visualizar esa relación" Conoce la pertinencia del ejemplo para que los EPP se cuestionen (promover reflexión) la relación entre variables a pesar de ser poco Transparente. (KFLM' (3)) Sabe que hay EPP que no establecen una relación adecuada entre las variables, priorizando la multiplicativa. (KMT'(5)) segundo problema, variante del primero Conoce un problema que es un contraejemplo respecto del modo de resolver el primero, les ayuda a cuestionar la validez de la estrategia establecida. (KFLM'(4)) "Es consciente de que los EPP que no establecieron una relación adecuada entre las variables tienen a intentar dividir 9/2" Anticipa las dificultades con las que se van a encontrar los EPP. (KMT' (6)) El conjunto de los tres problemas Conoce un conjunto de problemas secuenciados que se resuelven algebraicamente con un sistema de ecuación de primer grado, con relaciones distintas entre variables pero que se resuelven mediante la estrategia de ensayo-error controlado. (KMT'(7)) Presentación de casos particulares que permitan visualizar tanto déficit como exceso. La resolución del caso con 32 y 4 (déficit) nos lleva a pensar que el primer problema con los animales, se podría resolver en paralelo de dos formas, una con déficit y otra con exceso (idealmente generadas por los estudiantes) para ver la equivalencia entre los dos casos y analizar lo que significa cada uno en el contexto del problema. El presentarlo en paralelo favorecería la comparación y, con ello, la flexibilidad matemática dentro de un sistema de representación, en este caso simbólico (numérico o algebraico).

Cuadro 1

En el caso de Leopoldo, la clase se desarrolla alrededor de problemas matemáticos y abordando cuestiones matemáticas. Los aspectos relativos a cómo enseñar ese contenido en Primaria, que serían contenidos de la formación del EPP, no aparecen de manera explícita, habría que provocar evidencias (por ejemplo, en una entrevista) sobre qué aspectos de la vivencia formativa de la estrategia seguida por el formador, permitiría al EPP extraer conclusiones sobre cómo trabajar el contenido en Primaria. Habría que indagar sobre la existencia de oportunidades en la actividad formativa en las que no solo se institucionalice el contenido matemático, sino también el contenido sobre su enseñanza y aprendizaje.

Referencias

Abell, S. K., Rogers, M. A. P., Hanuscin, D. L., Lee, M. H., y Gagnon, M. J. (2009). Preparing the next generation of science teacher educators: A model for developing PCK for teaching science teachers. *Journal of Science Teacher Education, 20*(1), 77-93.

Ball, D.L. (2008). Mathematical knowledge for teaching: Explicating and examining a program of research. *Presentation made at the annual meeting of the American Educational Research Association*, New York, NY, March 24, 2008.

Cooney, T.J. y Krainer, K. (1996). Inservice mathematics teacher education: The impor- tance of listening. In A.J. Bishop *et al.* (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 1155–1185). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Jaworski, B. (1992). Mathematics teaching: What is it? *For the Learning of Mathematics*, *12*(1), 8–14.

Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry*. London: The Falmer Press.

Jaworski, B. (2008). Development of the mathematics teacher educator and its relation to teaching development. In B. Jaworski, y T. Wood (Eds.), *The mathematics teacher educator as a developing professional* (p. 335-361; Volume 4, The international handbook of mathematics teacher education). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Kessels, J. y Korthagen, F. (1996). The relationship between theory and practice. Bach to the classics. *Educational Researcher, 25*(3), 17-22.

Lloyd, G. M. (2006). Using K-12 mathematics curriculum materials in teacher education: Rationale, strategies, and preservice teachers' experiences. In K. Lynch-Davis, y R. L. Rider (Eds.), *The work of mathematics teacher educators: Continuing the conversation* (pp. 11-27) Association of Mathematics Teacher Educators Monograph, Volume 3.

Olanoff, D. (2011). Mathematical Knowledge for Teaching Teachers: The Case of Multiplication and Division of Fractions. Hathematics Disertations. Paper 64.

Perks, P., y Prestage, S. (2008). Tools for learning about teaching and learning. In B. Jaworski, y T. Wood (Eds.), *The mathematics teacher* *educator as a developing professional* (pp. 265-280; Volume 4, The international handbook of mathematics teacher education). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Rider, R. L., y Lynch-Davis, K. (2006). Continuing the conversation on mathematics teacher educators. In K. Lynch-Davis, y R. L. Rider (Eds.), *The work of mathematics teacher educators: Continuing the conversation* (pp. 1-7) Association of Mathematics Teacher Educators Monograph, Volume 3.

Sánchez, M.V. y García, M. (2004). Formadores de profesores de matemáticas. Una aproximación teórica a su conocimiento profesional. *Revista de educación, 333*, 481-493.

Smith, K. (2003). So, what about the professional development of teacher educators? *European Journal of Teacher Education, 26*(2), 201-215.

Tzur, R. (2001). Becoming a mathematics teacher-educator: Conceptualizing the terrainthrough self-reflective analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 4, 259-283.

Zaslavsky, O. y Leikin, R. (2004).Professional development of mathematics teacher educators: growth through practice. *Journal of Mathematics Teacher Education 7*, 5–32.

Zopf, D. (2010). *Mathematical knowledge for teaching teachers: The mathematical work of and knowledge entailed by teacher education.* Unpublished doctoral dissertation. Retrieved from http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/77702/1/dzopf_1.pdf. November 5, 2016.

3 EL DOMINIO AFECTIVO EN EL MTSK

Gómez-Chacón, I. Mª
García-González, M.
Carmona, K.
Fernández-Gago, J.

Este tema se ha enmarcado en los objetivos planteados en las Jornadas SIDM de 2017, *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK*: responder algunos retos planteados y reflexionar sobre las relaciones entre el núcleo central del modelo MTSK y los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Los objetivos y cuestiones centrales de discusión para el grupo han sido planteados por Inés Mª Gómez-Chacón en la ponencia *Epistemología personal y conocimiento matemático del profesor* (ver ponencia en estas Actas). Con esta ponencia se ha buscado reflexionar sobre las relaciones entre el núcleo central del modelo MTSK y los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En el estudio presentado en la ponencia se discute sobre los diferentes elementos que interactúan y dan lugar a la toma de decisiones en contexto a través del análisis de la interacción entre epistemología personal y conocimiento matemático del profesor. Gómez-Chacón ha propuesto una conceptualización de término epistemología personal desde una ontología y epistemología actual del conocimiento matemático y plantea algunos aspectos a explicitar en el modelo MTSK.

La discusión en el grupo participante en las Jornadas se ha articulado en torno a tres ejes:

1- Dominio afectivo como núcleo central del MTSK.

2- Relaciones dominio de conocimiento matemático y dominio afectivo: puntos de conexión.

3- Herramientas teóricas y metodológicas para el análisis.

En relación al primer eje, se ha apreciado la introducción hecha del concepto *Epistemología personal*. Éste puede favorecer la construcción de elementos caracteriza-

Gómez-Chacón, I. Mª, García-González, M., Carmona, K. y Fernández-Gago, J. (2017). El dominio afectivo en el MTSK. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 26-28). Huelva: CGSE.

dores del dominio afectivo, posibilitando un análisis más amplio especialmente en la relación con el actual dominio de las creencias y concepciones sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje, así como su sentido dentro del modelo MTSK. Se ha considerado pertinente incorporar elementos como las emociones epistémicas, las actitudes del profesor que tengan relación con los subdominios. También, ha quedado abierta la cuestión de la influencia de la Identidad profesional y sus interacciones con el dominio afectivo, asimismo la exploración necesaria de la emoción provocada en un grupo (profesor-estudiantes) donde se genera una emoción compartida (con-emoción, conmociones).

Con respecto al segundo eje varias han sido las cuestiones planteadas. Primeramente se ha discutido sobre el reto de integración y conexión. En la concepción inicial del modelo MTSK se pretendía encajar las creencias/concepciones como elementos que influyen en el conocimiento matemático, la ponencia presentada ha puesto de manifiesto que es necesario integrar otros descriptores del domino afectivo como son creencias y emociones epistémicas y la identidad del profesor y, entrar más a fondo sobre que marco teórico sustentará los descriptores del dominio afectivo. Queda planteada la cuestión si se podría hablar de un dominio afectivo "especializado", es decir, que afecte o permee los subdominios del MTSK. Finalmente, se señala que el posicionamiento antropológico es clave a la hora de aproximarse a todas estas cuestiones.

Por último, en relación al tercer eje: aspectos teóricos y metodológicos para el análisis del dominio afectivo en el MTSK se ha reseñado la importancia de un acercamiento fenomenológico y desde ahí definir e identificar patrones. Los patrones se deben concebir desde una estructura o sistema dinámico. El concepto de estructuras de afecto-cognición global local (Gómez-Chacón, 2016) puede ser una herramienta eficaz a nivel metodológico.

Para terminar y como prospectiva de avance se reconoce la solidez que puede tener para futuros trabajo esta línea de investigación, dado que se parte de la experiencia de investigación de varias décadas realizada por dos grupos de investigadores diferentes: 1) sobre conceptualización de estructuras de interacción cognición-afecto y el sistema de referencia afectivo-cognitivo dado por el conocimiento específico matemático (p.e. Gómez-Chacón, 2016) y 2) sobre el modelo analítico MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) (p.e. Carrillo et al., 2013)

Y se plantean como objetivos específicos a desarrollar en futuros trabajos:

- 1- Focalizar en las estructuras de interacción cognición-afecto.
- 2- Priorizar unas categorías de estudio: epistemología personal, emociones, creencias epistemológicas y conocimiento de la práctica matemática KPM.
- 3- Poner en valor las investigaciones ya realizas por miembros del grupo sobre dimensión afectiva y creencias, algunas en particular realizadas utilizando el modelo analítico MTSK.

Referencias

Gómez-Chacón, I. Mª (2016). Hidden connections, double meanings A mathematical exploration of affective and cognitive interactions in learning. Regular Lecture in Proceedings ICME 13- Hamburg University. (Publicado por Springer en 2017).

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Muñoz-Catalán, Mª. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser, y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 8) (pp.2985-2994). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

4 SUBDOMINIOS DEL MATHEMATICS TEACHER'S SPECIALISED KNOWLEDGE (MTSK)
KOT Y KSM: DEFINICIÓN, CATEGORÍAS Y EJEMPLOS

Vasco, D.
Moriel, J. Jr.
Contreras, L.C.

Resumen

En este trabajo pretendemos ejemplificar cada una de las categorías de dos de los subdominos del Conocimiento Matemático del modelo MTSK: El Conocimiento de los Temas (KoT) y el Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM). Hemos elegido ejemplos tanto de Educación Primaria, como de Educación Secundaria y Universidad, cambiando para ello el contenido matemático concreto. Además, hemos querido detenernos con un poco de detalle en las conexiones para intentar clarificar las diferencias entre ellas.

Palabras clave:

KoT, KSM, ejemplos de las categorías.

1. El Conocimiento de los Temas (KoT)

El subdominio que, probablemente, genera menos discusión en el modelo MTSK es, precisamente, el KoT, por el hecho de que es generalmente asumido que el profesor ha de conocer los contenidos que enseña a sus estudiantes. En su origen, el KoT emerge por las dificultades de delimitación con dos de los subdominios del *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) (Ball, Thames, y Phelps, 2008): el *common content knowlegde* (CCK) *y specialized content knowledge* (SCK). Se define como el conocimiento del profesor acerca de los usos y aplicaciones de un tema matemático (Vasco, Climent, Escudero-Ávila, Montes, y Ribeiro, 2016), siendo este conocimiento profundo y fundamentado, propio de los profesores de matemáticas y de su labor de enseñar. En otras palabras, *este conocimiento permite al profesor desenvolverse con el contenido que aborda en su práctica de una forma desahogada* (Montes, 2015, p. 38).

Vasco, D., Moriel, J. Jr. y Contreras, L.C. (2017). Subdominios del mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK). En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 29-37). Huelva: CGSE.

Con el término “temas” nos referimos a los contenidos provenientes de los bloques de conocimiento tradicionalmente considerados en matemáticas. Como ejemplo, y tomando como referencia las áreas propuestas por el NCTM (2000) en los estándares matemáticos, estos contenidos se refieren a números y operaciones, álgebra, geometría, medida, análisis de datos y probabilidad, al que podríamos añadir otros como funciones y gráficas, todos ellos relacionados entre sí. Los temas son los componentes de estas grandes ramas.

Este subdominio incluye, además, el conocimiento del profesor sobre *conexiones intraconceptuales*, las cuales tienen lugar en la proximidad de un concepto, y que podrían darse al identificar una idea errónea, mostrar la relación de igualdad entre dos expresiones aritméticas, generalizar mediante la vinculación de aritmética y álgebra, entre otras, como lo indican Martínez, Giné, Fernández, Figueiras y Deulofeu (2011). Así, por ejemplo, si pensamos en las operaciones con matrices, podría darse una conexión intraconceptual cuando el profesor identifica una idea errónea del estudiante al generalizar el algoritmo de la suma de matrices al producto de estas, especialmente cuando se trata de matrices cuadradas.

El KoT se compone de cuatro categorías: *Procedimientos (¿Cómo se hace? ¿Cuándo se puede hacer? ¿Por qué se hace así? y características del resultado); Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Registros de representación; Fenomenología y aplicaciones* (SIDM, 2016).

En *Procedimientos* consideramos a) ¿cómo se hace?, referido al conocimiento que tiene el profesor sobre algoritmos convencionales y alternativos; b) *¿cuándo se puede hacer?*, que son las condiciones suficientes y necesarias para proceder; c) *¿por qué se hace así?*, que consiste en los fundamentos de los algoritmos; y d) *características del resultado*, las que tendrá el objeto matemático resultante asociadas a un tema (Vasco, 2015). Para ejemplificar[1] cada una de las subcategorías vamos a utilizar resultados de investigaciones y de tesis doctorales con MTSK en los niveles de Educación Primaria, Secundaria y Universidad (Vasco, 2015; Moriel Junior, 2014; Rojas, 2014).

Así, en el caso del producto de matrices particionadas en submatrices, tenemos respectivamente que:

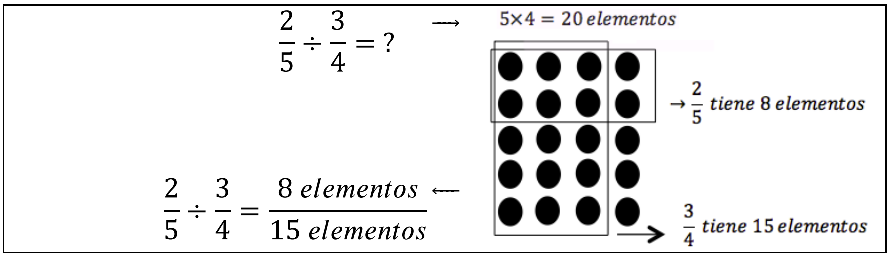
a) Sería el conocimiento del profesor sobre el algoritmo para multiplicar matrices particionadas (las filas por las columnas); b) El conocimiento de las condiciones para que se pueda efectuar la multiplicación (que el número de submatrices o bloques columna de la primera matriz sea igual al número de submatrices o bloques fila de la segunda; y las submatrices correspondientes podrán multiplicarse cuando coincidan el número de columnas de la primera submatriz y el número de filas de la segunda); c) Partiendo del conocimiento de que una matriz se puede particionar de muchas formas, consideramos aquí el conocimiento del profesor para particionar las matrices originales cuando se trata de multiplicarlas (cuántas submatrices puede haber en cada una), de manera que las submatrices conformadas cumplan con la condición de que se puedan operar entre sí, con base en el algoritmo correspondiente y, d) El conocimiento de las dimensiones de la matriz resultante (debe tener el número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda).

1 Usaremos las viñetas a), b), c) y d), respectivamente, que hemos empleado para enunciar las categorías, para diferenciar los ejemplos de cada una de estas.

En el caso del tema división de fracciones, tenemos los siguientes ejemplos acerca de ¿cómo se hace? ¿cuándo se puede hacer? ¿por qué se hace así? *y características del resultado, respectivamente*:

a) el conocimiento de algoritmos convencionales (como el invertir y multiplicar, $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, o dividir numeradores y denominadores entre sí $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$, DND), así como el conocimiento de procedimientos alternativos para dividir fracciones (como resolver con dibujo comparando partes fraccionadas o mediante la transformación en una división de enteros por medio de unidad común, este último ejemplificado en la Figura 1).

Figura 1.
División de fracciones por transformación en división de enteros.



Fuente: Adaptado de Li (2008).

b) el conocimiento de que se puede usar adecuadamente el algoritmo DND para efectuar la división de fracciones cuando el numerador y el denominador del dividendo son múltiplos de los respectivos en la fracción divisora, como en $\frac{9}{10} \div \frac{3}{2}$.

c) una o más justificaciones (aritméticas o algebraicas) de por qué se debe, por ejemplo, invertir y multiplicar para dividir fracciones, como en la síntesis: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

d) el conocimiento de que al dividir una fracción por otra se puede obtener un resultado entero o racional, más grande o más pequeño que el divisor. También se incluye conocer que el algoritmo DND puede ofrecer como resultado una fracción compuesta del tipo $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$, necesitando la aplicación de otro algoritmo para concluir la división.

En la categoría *Definiciones, propiedades y sus fundamentos* situamos el conocimiento para describir o caracterizar un concepto, incluyendo los ejemplos e imágenes asociados, así como el conocimiento de las propiedades de un objeto matemático o aquellas necesarias para llevar a cabo un proceso. Incluimos además en esta categoría, el conocimiento del profesor sobre las bases, cimientos o exhaustividad del empleo de una propiedad, ligado al tema a estudiar (Vasco *et al*., 2016).

Son ejemplos de esta categoría el conocimiento de la definición del objeto matemático triángulo, o el conocimiento sobre la no conmutatividad, en general, del producto de matrices y que excepciones de la misma son el producto de una matriz por su inversa y el producto de una matriz por la matriz identidad; el conocimiento de que la división de fracciones puede ser definida como una *relación* del tipo: *f*: QxQ*→Q tal que $f(x, y) = \frac{x}{y}$ para cualquier par de racionales xe (y diferente a cero). O bien, como una *operación en* Q* donde $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ para $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ racionales cualesquiera, diferentes de cero, o el conocimiento de las propiedades del conjunto de los números racionales Q, como la conmutativa, asociativa, distributiva, existencia de elementos neutro e inverso multiplicativo. Un profesor que define el conjunto de los racionales como un cuerpo algebraico expresa el conocimiento de una propiedad o característica profunda al interior del tema principal (Q) y por lo tanto, se configura como una conexión intraconceptual.

En *Registros de representación* incluimos el conocimiento sobre las distintas formas en que se puede representar un tema, incluyendo la notación y el lenguaje matemático asociado a dichas representaciones (Vasco *et al*., 2016).

Así, son ejemplos de esta categoría el conocimiento del profesor sobre el registro algebraico (D'Amore, 2004) y algebraico-matricial (Ramírez, Romero, y Oktaç, 2013) de un sistema de ecuaciones lineales; el conocimiento de registros de división de fracciones como división "indicada"$\left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}\right)$o con dos puntos $\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)$; el conocimiento de representaciones verbales asociadas a fracciones – como mitad, tercios, uno de dos – (Rojas, 2014) y a una división por fracción (30÷1/2=?) para describirla(en forma de pregunta *¿cuál es el numero cuya mitades treinta*?), o el conocimiento de una o más representaciones pictóricas (o geométricas) de fracciones útiles para hacer operaciones, como en el caso de dividir fracciones.

Fenomenología y aplicaciones comprende el conocimiento de fenómenos o situaciones asociados a los significados de un tema matemático (Freudenthal, 1983). Esta categoría incluye también el conocimiento de los usos y aplicaciones de un tema.

Son ejemplos de la misma el conocimiento de que una aplicación de la derivada es determinar si una función es creciente, decreciente o constante en un intervalo dado (Vasco, 2015) o el conocimiento de que una aplicación o interpretación de división de fracciones es *comparar dos cantidades*, así como del tipo de problema asociado, como ¿cuántos paquetes de un cuarto de kilo de arroz puedo hacer con un kilo y medio?

2. El Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM)

Este subdominio comprende el conocimiento de conexiones con contenidos posteriores y anteriores (Carrillo, Climent, Contreras, y Muñoz-Catalán, 2013), en el sentido de cómo se conectan internamente las matemáticas (Montes, Aguilar, Carrillo, y Muñoz-Catalán, 2013), es decir, las *conexiones interconceptuales*, cuyos conectores son aquellas ideas matemáticas que permiten vincular diferentes conceptos (Martínez *et al*., 2011).Sabemos que una gran variedad de conceptos pueden ser conectados para edificar un razonamiento del profesor para la práctica, lo que puede configurar una verdadera red, propia del conocimiento de la estructura matemática. Un ejemplo es el conocimiento de que la justificación del invertir-y-multiplicar del algoritmo de división de fracciones (sintetizada a seguir) puede ser desarrollada desde la estructura de cuerpo algebraico de que posé de entre sus propiedades la existencia de inverso multiplicativo, lo que posibilita la multiplicación por el inverso del divisor en (*) y su transformación en (**) logrando así dicha justificación:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \overset{*}{\overbrace{=}} \frac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}} \overset{**}{\overbrace{=}} \frac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c};$$

Se distinguen en el KSM cuatro categorías: *Conexiones de complejización*, *Conexiones de simplificación*, *Conexiones transversales* y *Conexiones auxiliares* (SIDM, 2016).

En *Conexiones de complejización* incluimos el conocimiento que nos permite relacionar los contenidos enseñados con contenidos posteriores (Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar, y Carrillo, 2014) y refleja el conocimiento de un tema o concepto que se enseña en un nivel escolar determinado desde una perspectiva avanzada. Significa conocer cómo uno o más conceptos matemáticos tendrán (o podrán tener) conexiones futuras con aquello que estamos trabajando ahora. Ello significa conocer cómo cierto concepto trabajado hoy posibilita la construcción o desarrollo de otros más complejos.

Son ejemplos de esta categoría el conocimiento que tiene un profesor del trabajo con escalas como una complejización de la actividad de ordenar por tamaños de educación infantil (Flores-Medrano *et al*., 2014); el conocimiento de que la suma de fracciones posibilita el desarrollo del procedimiento de integración del cociente de dos polinomios, cuando el divisor tiene raíces racionales $\left(\int \frac{ax+b}{(x-a)(x+b)}\,dx = \int \frac{M}{(x-a)} + \frac{N}{(x+b)}\,dx\right)$, o el conocimiento de que la división por fracción cuando apoyada en una representación verbal en forma de pregunta (donde 30÷1/2=? si representa por ¿cuál es *el número* cuya mitad resulta 30? pues equivale a 1/2.x=30) es un contenido potenciador del trabajo con las Relaciones de Girard (entre los coeficientes y las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$) donde si cuestiona ¿cuáles son los *dos números* cuya suma resulta -b/a y el producto c/a?

Conexiones de simplificación incluye el conocimiento que permite relacionar los contenidos enseñados con contenidos anteriores (Flores-Medrano *et al*., 2014) y refleja el conocimiento de un tema o concepto que se enseña en un nivel escolar determinado desde una perspectiva más elemental. Significa conocer cómo uno o más conceptos matemáticos anteriores son o pueden ser conectados con aquello trabajado hoy, lo que equivale a conocer cómo cierto concepto trabajado hoy puede ser simplificado por anteriores más elementales.

Son ejemplos de esta categoría el conocimiento que muestra un profesor de bachillerato al sugerir que el tratamiento para simplificar una expresión algebraica que resulta de obtener la derivada segunda de una función es equivalente a manipular una expresión aritmética con fracciones (Montes, Contreras, y Carrillo, 2013), o conocer que la suma (o resta) de fracciones con igual denominador puede ser simplificada por la respectiva operación con números naturales, como en el problema de sumar dos tercios con tres tercios resultando cinco tercios (Rojas, 2014), o bien, el conocimiento de la interpretación parte-todo con números naturales para simplificar el trabajo con la división de fracciones.

Las *Conexiones transversales* van ligadas a la naturaleza de algunos conceptos que aparecen al tratar otros conceptos a lo largo de la matemática escolar (Montes, y Climent, 2016). Los conceptos conectados no son más simples o complejos entre sí, sino que hay algo común entre ellos que los relaciona, es decir, una característica común en su naturaleza o en el modo de pensamiento a ellos asociados (Carrillo *et al*, 2014).

Son ejemplos de estas conexiones el conocimiento de los patrones de igualdad y similitud que atañen propiedades de relaciones de equivalencia, como la propiedad conmutativa ($a \cdot b = b \cdot a$),y la congruencia entre figuras ($\Delta ABC \cong \Delta DEF$) (Flores-Medrano *et al*., 2014); el conocimiento del proceso de reducir las fracciones a un denominador común como una característica que comparten la comparación de fracciones ($2/3<4/5<10/15<12/15$) y la división de fracciones ($2/3:4/5 \leftrightarrow 10/15:12/15$), o el conocimiento de características comunes entre conjuntos numéricos, como que los reales, racionales y complejos poseen inverso multiplicativo, o bien, que la división de enteros y racionales puede interpretarse por la idea de cuántas veces cabe.

Las *Conexiones auxiliares* son consideradas cuando un concepto o tema diferente al que se está tratando, sin ser el foco de la actividad matemática que se desarrolla, aporta elementos que ayudan a ese desarrollo, en ese momento (Montes, y Climent, 2016), como saber encontrar las raíces de una ecuación como un elemento auxiliar para una función (Flores-Medrano *et al*., 2014). En esta categoría también podemos incluir el conocimiento de un profesor universitario que, en una clase sobre álgebra de matrices, enfoca la potencia de una matriz A (multiplicación: A^2 y A^3) planteando la función $f(x) = 2x^2-5x-3$, donde las x serán reemplazadas con la matriz A; siendo por tanto, la función el elemento matemático auxiliar para el desarrollo del álgebra de matrices (Vasco *et al*., 2016)

Algunos criterios para la diferenciación de conexiones

Merece la pena detenerse un poco en la forma de distinguirlas diferentes conexiones, intraconceptuales (KoT), interconceptuales y temporales (KSM), pues no hay solamente una conexión posible entre dos temas. Analizando las definiciones y ejemplos presentados en trabajos con MTSK, vemos que la dirección/sentido de conexión entre un tema y otro, juntamente con las palabras conectoras utilizadas en una unidad de análisis expresan tipos diferentes de conexiones y aportan elementos para la adecuada caracterización del conocimiento movilizado. Por ejemplo, si elegimos como temas ángulos y *similitud de triángulos*, podemos tener al menos estos casos: (a) conocimiento de que el estudio de ángulos (Tema 1) posibilita la **construcción** o es potenciador del desarrollo de los criterios de similitud de triángulos (Tema 2), lo que significa una conexión de complejización entre los dos temas (KSM); (b) conocimiento deque uno o más criterios de semejanza de triángulos (Tema 1) quedan **determinados** por el valor de sus ángulos (Tema 2) ('dos triángulos son semejantes si poseen dos ángulos correspondientes congruentes'), lo significa conocimiento de una característica interna del tema central y por lo tanto una conexión intraconceptual (KoT).

En general, los términos *construcción (o desarrollo)* y *definir (o definición)* usados para asociar un tema y otro son conectores de conexiones de complejización e intraconceptuales, respectivamente. De la misma forma que, en general, los términos *resolver*, *simplificar* y *característica común* están asociados a las conexiones auxiliares, de simplificación y transversales, como vemos, respectivamente, en las siguientes frases: la idea de ecuación (Tema 1) puede ser utilizada para **resolver** división de fracciones (Tema 2);la **simplificación** del tratamiento de expresiones algebraicas (Tema 1) nos lleva al tratamiento con números racionales (Tema 2), o el proceso de reducir las fracciones al mismo denominador es una **característica común** entre la comparación de fracciones (Tema 1) y la división de fracciones (Tema 2).

Sintetizamos en los siguientes cuadros algunas preguntas que ayudan en la toma de decisión para la adecuada caracterización de las conexiones a lo largo de un análisis del conocimiento movilizado por profesores, las cuales se pueden utilizar en entrevistas para aclarar los indicios de conocimientos directamente asociados a dichas conexiones.

Cuadro 1.
Criterios para elección entre diferentes tipos de conexiones para caracterizar MTSK, considerando el sentido Tema 1 è Tema 2

¿El profesor conoce que el Tema 1 ... el Tema 2?	La conexión (subdominio) es:
es definido/determinado por	Intraconceptual (KoT)
posibilita la construcción o desarrollo de	Complejización (KSM)
puede ser simplificado con	Simplificación (KSM)
tiene naturaleza, proceso o característica común con	Transversal (KSM)
puede ser utilizado o es necesario para resolver algo en	Auxiliar (KSM)

Cuadro 2.
Elementos de discusión entre diferentes tipos de conexiones para caracterizar MTSK

Sujeto	Manifestación del sujeto a ser analizada	Posible categoría	Debatible?
1	*"La definición de integral es $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i).\Delta x$, cuando exista el limite"*	Definición (KoT)	No, es claro
2	*"Integral es un concepto definido por un limite"*	Intraconceptual (KoT)	La frase es un poco superficial
3	*"El estudio de limites será utilizado en la construcción del tópico de integral"*	Complejización (KSM)	No, es claro
4	*"La integral puede pensarse desde una perspectiva un poco más simple con la idea de limite al infinito"*	Simplificación (KSM)	Aunque es un concepto más simple, no tan elemental
5	*"Integral y limite tienen en común un proceso infinito (subdivisión, suma o aproximación)"*	Transversal (KSM)	No, es claro
6	*"Limite es necesario o útil para resolver una integral impropia"*	Auxiliar (KSM)	No es auxiliar, pues limite está en la definición de Integral impropia

Referencias

Ball, D.L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., Montes, M., Escudero-Ávila, D., y Flores-Medrano, E. (2014).*Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno, 35,* 90-106.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á., y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, M. Montes, D. Escudero-Ávila, y E. Flores-Medrano (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematics Structures.* Dordrecht: Reidel.

Li, Y. (2008). What Do Students Need to Learn about Division of Fractions? *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(9), 546-552.

Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L., y Deulofeu, J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco, y M. Palarea (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 429-438). Ciudad Real: SEIEM.

Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, C. (2013). MTSK: From Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures. En B. Ubuz, C. Haser, y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3185-3194). Antalya, Turquía: ERME.

Montes, M., Contreras, L.C., y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.

Montes, M. A. (2015). Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas acerca del Infinito. Un estudio de caso (Disertación doctoral, Universidad de Huelva, España). Disponible en http://hdl.handle.net/10272/10944

Montes, M. A., y Climent, N. (2016). Conocimiento de la estructura matemática (KSM). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 21-29). Huelva: CGSE.

Moriel Junior, J. G. (2014). *Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações*. Tesis doctoral. Universidade Federal de Mato Grosso, REAMEC: Cuiabá, Brasil.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: Autor.

Ramírez, O., Romero, C.F., y Oktaç, A. (2013). Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano. En A. Ramírez e Y. Morales (Eds.), *I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe* (pp. 537-547). Santo Domingo: ICEMACYC.

Rojas, N. (2014).*Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas*: Un estudio de casos. Tesis doctoral. Universidad de Granada, Granada.

Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva. (2016). *Categorías del modelo MTSK*. Documento interno. Huelva: SIDM.

Vasco, D. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de Álgebra Lineal. Un estudio de casos en el nivel universitario* (Disertación doctoral, Universidad de Huelva, España). Disponible en http://hdl.handle.net/10272/11901

Vasco, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M.A., y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento Especializado de un Profesor de Álgebra Lineal y Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema, 30*(54), 222-239.

5 PROFUNDIZANDO EN EL CONOCIMIENTO DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA

Flores-Medrano, E.
Aguilar-González, A.

El Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) ha representado uno de los intereses del grupo de investigación del SIDM. En Flores-Medrano (2016) se presentaron una serie de avances respecto al subdominio en cuestión y la posibilidad y necesidad de generar categorizaciones internas al subdominio.

En este momento pensamos que existen dos posibles formas de organizar el KPM, una de estas sugiere el uso de indicadores específicos, sin categorizar (e.g. Carrillo, Climent, Contreras, Montes, Escudero-Avila y Flores-Medrano, 2014, ver tabla 1). La otra categorización se basa en generar una categoría por cada práctica matemática identificada (e.g. Flores-Medrano, 2015).

Tabla 1
Sistema de clasificación de elementos de conocimiento relativos al KPM

Conocimiento de la práctica matemática KPM	*Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos*
	Formas de validación y demostración
	Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal
	Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas
	Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación)
	Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones

Flores-Medrano, E. y Aguilar-González, A. (2017). Profundizando en el Conocimiento de la Práctica Matemática. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 38-47). Huelva: CGSE.

En esta comunicación, que proviene de las reflexiones previas y posteriores a un taller en las III Jornadas del SIDM, nos decantaremos por utilizar un sistema de categorías donde cada práctica se corresponde con una de estas, y las caracterizaciones que se hagan de cada práctica servirán como indicadores para explorar el conocimiento del profesor respecto a estas.

1. Puntos de patida: necesidades y retos

Este taller se organizó con una doble intención. Por un lado, se deseaba reflexionar sobre los posibles avances generados en los últimos dos años respecto al KPM y sus caracterizaciones. Por otro lado, se deseaba proponer dos posibles categorías con elementos internos para que pudiera ser discutida su viabilidad.

Si bien la intención última de las investigaciones realizadas con el MTSK no es clasificar conocimientos, hemos visto la potencialidad de tener sistemas de categorías bien definidos para analizar las distintas prácticas docentes y sus relaciones con el conocimiento que las sustentan. Es por ello que partimos del siguiente esquema para aproximarnos a elementos normativos para los sistemas de categorías de los subdominios del MTSK en general y del KPM en particular:

a) Las categorías no deben solaparse: una de las críticas realizadas al MKT era el solapamiento entre subdominios (e.g. Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013). En la búsqueda de consenso en los análisis, lo cual promueve un punto de partida común para realizar propuestas de desarrollo, las categorías que se proponen al interior de los subdominios en el MTSK deberían de buscar esta ausencia, o por lo menos una disminución en la posibilidad de tener solapamientos entre estas.

b) Las categorías deben de permitir análisis finos y deben de caracterizarse en positivo: unido a lo anterior, las categorías deben permitir interpretar con precisión los elementos de conocimiento. Por ejemplo, no bastaría con decir que el profesor conoce aspectos relacionados con la demostración en matemáticas, sino que se debería de poder precisar cuáles son esos elementos que lo componen y no hacerse de manera por lo que no lo compone.

c) Las categorías deben permitir comprender el conocimiento del profesor: tal como se ha mencionado en diversos trabajos (e.g. Escudero-Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M., 2015); categorizar el conocimiento del profesor debe permitirnos comprenderlo. De este modo, las categorías del KPM, cuya relación con la práctica del matemático profesional es tan cercana, deben cuidar, mostrar y comprender la especificidad del conocimiento del profesor.

d) Las categorías deben de ser exhaustivas: en este sentido, el sistema de categorías será tan exhaustivo como la cantidad de prácticas (categorías) lo permitan. La exhaustividad también debe de ser buscada al interior de las categorías, es decir, en las caracterizaciones de cada práctica.

2. Posibles caracterizaciones de dos prácticas

El taller estuvo organizado a partir del análisis de las posibles caracterizaciones de la práctica de demostrar y de la práctica de definir.

Demostrar y definir son prácticas, pero saber ciertas demostraciones o ciertas definiciones no forma parte del KPM (para estos ejemplos, dichos conocimientos serían parte del Conocimiento de los Temas). Si bien, somos conscientes de que existe un problema, por ejemplo, entre la definición y el proceso de definir. Por ello, podríamos afirmar que el conocimiento de la práctica es un metaconocimiento (Flores-Medrano, 2016) que le permite al profesor, entre otras cosas, juzgar la cercanía que tiene una posible demostración de lo que es una demostración y la cercanía de una definición propuesta de lo que es una definición para un objeto en particular.

Para el caso de la demostración la caracterización estuvo basada en los tipos básicos de demostración que se proponen en Carrillo, Contreras, Climent, Montes, Escudero y Flores (2016). Los tipos de demostración que se proponen son:

a) Esquema de prueba Experimental
b) Esquema de prueba inductivo de un caso
c) Esquema de prueba inductivo de varios casos
d) Esquema de prueba inductiva sistemático
e) Esquema de prueba transformacional
f) Esquema de prueba preformal
g) Esquema de prueba axiomático
h) Esquema de prueba gráfico
i) Esquema de prueba numérico
j) Esquema de prueba de inducción completa

Cada uno de estos esquemas de prueba puede ser empleado por los estudiantes y profesores para justificar/validar algunos resultados matemáticos. El conocimiento del profesor le permitiría identificar entre el uso de uno u otro esquema.

Asimismo, nos apoyamos en Villiers (1993) para proponer el conocimiento de las siguientes funciones de la demostración:

a) Validación
b) Explicación
c) Comunicación
d) Descubrimiento
e) Sistematización

Para el caso de la definición, nos apoyamos en Escudero, Gavilán-Izquierdo y Sánchez-Matamoros (2014) quienes, a partir de una revisión amplia, sistematizaron las siguientes características para la definición:

a) Precisión en la terminología-jerarquización: uso de términos básicos o previamente definidos.
b) No circularidad: no hacer referencia al concepto en la propia definición.
c) No ambigua: caracterización de manera unívoca de una clase de objetos.
d) No contradictoria-estructuralmente inequívoca: las características empleadas deben ser consistentes.
e) Invariante bajo cambio de representación: un objeto pertenece a una clase de objetos, y es definible ahí, independientemente de su representación.
f) Equivalencia: se puede dar más de una formulación de un mismo concepto.
g) Elegancia: de entre las definiciones equivalentes, la más elegante es aquella que usa conceptos generales más básicos.
h) Minimalidad: no redundancia de las características, ninguna de las características es deducible del resto.
i) Degeneración: ejemplos del concepto que no se ajustan a la idea intuitiva del concepto.

Estos elementos de la demostración y de la definición nos permitiría tener el esquema de la Tabla 2 para el KPM.

Tabla 2
Propuesta de categorización para el KPM

Conocimiento de la Práctica Matemática		
Categoría/Práctica	**Subcategoría**	**Elementos para descriptores**
Demostrar	Tipos	Esquema de prueba experimental
		Esquema de prueba inductivo de un caso
		Esquema de prueba inductivo de varios casos
		Esquema de prueba inductiva sistemático
		Esquema de prueba transformacional
		Esquema de prueba preformal
		Esquema de prueba axiomático
		Esquema de prueba gráfico
		Esquema de prueba numérico
		Esquema de prueba de inducción completa
	Funciones	Validación
		Explicación
		Comunicación
		Descubrimiento
		Sistematización

Definir	Características	Precisión en la terminología-jerarquización
		No circularidad
		No ambigua
		No contradictoria-estructuralmente inequívoca
		Invariante bajo cambio de representación
		Equivalencia
		Elegancia
		Minimalidad
		Degeneración

3. Críticas a la categorización a la luz de las necesidades para los sistemas de categorías

Sobre la base del trabajo del taller y considerando los elementos normativos propuestos anteriormente para los sistemas de categorías, surgen las siguientes reflexiones:

a) Los tipos de demostración parecen solaparse: si bien es cierto que una de las características deseables para los sistemas de categorías es que un elemento de conocimiento no puede pertenecer a dos o más categorías al mismo tiempo, es necesario que se diferencie entre las categorías y los elementos que permiten identificar descriptores de conocimiento. En el caso de los tipos de demostración puede darse el caso en el que una prueba sea preformal y gráfica al mismo tiempo. Esto podría parecer un solapamiento entre categorías. Sin embargo, si un profesor identifica una prueba que aparece en un texto como preformal y gráfica (sin importar si el investigador coincide con esa asignación o si el profesor da o no el nombre o características a los esquemas), nuestra conclusión sería que el profesor conoce dos tipos de esquema de prueba, y nuestra evidencia sería su reconocimiento.

b) En ambas categorías parecen faltar elementos que permitan garantizar la exhaustividad en sus caracterizaciones: en efecto, lo que se presentó en el taller, y que se recoge en la Tabla 2, no tiene por objetivo la exhaustividad en la caracterización de las categorías, sino la presentación de un esquema que permita organizar la información para este subdominio, misma que difiere de los sistemas de categorías de otros subdominios.

c) Se requiere de una definición de práctica para saber qué elementos pueden considerarse categorías: en Flores-Medrano (2015) se presenta una definición para práctica matemática, que se sustenta en la producción y formas de proceder en matemáticas. Tener una definición en estos términos, además de situarnos en qué podría o no ser una práctica matemática, también nos permite identificar la necesidad de explorar los elementos que las constituyen en literatura ajena al conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas.

4. Elementos teóricos que se pueden sumar a las caracterizaciones de las categorías

La literatura relativa a los procesos de enseñanza, aprendizaje, usos y variantes de la demostración matemática en el aula es abundante. A continuación, proponemos algunos elementos que podrían añadirse a la caracterización de esta categoría:

a) En Godino y Recio (2001) se presentan distintos significados institucionales para la demostración. Se enfatiza en la demostración en escenarios educativos. Dicho énfasis puede servir como un punto para definir a la práctica en este contexto. El resto de contextos institucionales puede ayudar a determinar la comprensión del profesor acerca de la demostración, lo cual habría que determinar, a partir de ejemplos concretos, si pertenece a este subdominio o al dominio de las concepciones sobre la matemática.

b) La argumentación y la demostración tienen muchos vínculos de unidad. Los esquemas argumentativos propuestos en Carrillo *et al*. (2016), que pueden corresponderse con cierta naturalidad con los esquemas de Toulmin, además de los propuestos por Flores (2007) permitirán sumar subcategorías a esta categoría o decidir si se conforma una categoría distinta (Argumentar, con la dificultad de saber si se debería conformar categorías para Justificar y otros elementos cuyos elementos de verdad pueden diferir de la demostración formal).

c) Los trabajos desarrollados por Herbst (e.g. Herbst y Brach, 2006), aunque habitualmente utilizan exploraciones realizadas con estudiantes, también proporcionan elementos generales para describir elementos concretos de la demostración, lo cual podría ayudar a sumar a las subcategorías propuestas en la Tabla 2, o establecer nuevas subcategorías.

Con respecto a la definición, la literatura con la que nos encontremos se situará más en el terreno de los estudiantes. La sistematización de las categorías de análisis, así como de los resultados que proponen puede servirnos para establecer un sistema propio adecuado para el conocimiento del profesor de matemáticas. Los siguientes son algunos elementos que podrían aportar a la caracterización de esta categoría:

d) En Villiers, Govender y Patterson (2009) se presenta una reflexión acerca del significado de definir en Geometría. Reflexiones como esta son necesarias para hablar de esta práctica situada en áreas de la matemática y, quizá al igual que en la demostración, situada de acuerdo a contextos institucionales.

e) Un caso que se puede situar también cercano al terreno del KPM proviene del trabajo de Winicki-Landman y Leikin (2000) donde exploran los elementos que hacen que dos definiciones sean o no equivalentes. Esta meta-reflexión nos permitirá aportar características propias de la definición matemática.

f) Vinner (1991) propone algunos usos de la definición para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Aunque este trabajo se situaría en el

PCK, la conceptualización que se hace sobre la definición puede aportar en las subcategorías de esta práctica.

g) El trabajo de Leighton (2004) nos sugiere mecanismos de explorar vínculos entre la práctica de definir y la de demostrar, lo cual siempre enriquece la comprensión tanto de una como de otra práctica.

h) Con respecto a trabajos relacionados con el estudiante, encontramos productivo explorar el trabajo de Mariotti y Fischbein (1997).

Las prácticas de demostrar y definir (abordadas en el taller) no completan el elenco de prácticas matemáticas. Hay otras prácticas, como ejemplificar, que requieren ser estudiadas; trabajos como el de Zazkis y Leikin (2008) o Leikin y Zazkis (2010) pueden ser iluminadores. Solo debemos tener presente que, al ser el ejemplo un instrumento tan potente como analogía para la enseñanza, los elementos teóricos que podremos encontrar tendrán una fuerte vinculación con el Conocimiento Didáctico del Contenido. Por otro lado, no debemos perder de vista la componente histórica de las prácticas matemáticas, que puede ser una buena fuente de información para poder extraer de ellas elementos de relevancia. Nuestra labor consistirá en diferenciar elementos y extraer aquellos que aporten a la conceptualización de la ejemplificación como práctica matemática.

5. Nuevos retos y necesidades

En la sección anterior hemos intentado poner el énfasis en cómo interpretamos que distinta literatura nos puede ayudar a caracterizar algunas categorías del KPM, sin embargo, quedaron patentes algunos señalamientos sobre retos a los que nos enfrentamos. En esta sección nos enfocamos de manera más general a cuáles sería dichos retos a partir de necesidades específicas que detectamos a raíz de las reflexiones que se vertieron en el desarrollo del taller.

Trabajar para caracterizar el Conocimiento de la Practica Matemática es un reto en sí mismo. La abundante literatura que existe respecto a diversas prácticas, sobre todo con respecto a la demostración, complica la determinación de los elementos que tienen sentido para la práctica del profesor de matemáticas. Lo cual plantea el primer reto:

Reto 1: Determinar una metodología que incluya formas de acceso a la información relativa al KPM, lo cual incluye explorar cuáles son los escenarios más propicios para obtener evidencias *naturales* de este tipo de conocimiento.

Una necesidad más es la de tener un sistema de categorías exhaustivo para el KPM, lo cual nos plantea el siguiente reto:

Reto 2: Si el reto 1 nos habla de la necesidad de una práctica para la labor del profesor, el reto 2 nos habla de la suficiencia, es decir, se trata de garantizar que las prácticas que se consideren como categorías sean suficientes para *cubrir* las que el profesor puede utilizar para su práctica de enseñanza.

Las caracterizaciones de las categorías deben considerar elementos que, desde la de literatura revisada, no se ha investigado para el profesor de matemáticas, lo cual nos sitúa en otros retos:

Reto 3: Identificar y sistematizar literatura en Educación Matemática relativa a prácticas matemáticas, literatura que quizá esté dedicada a estudiantes u otros actores del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Reto 4: Explorar distintos métodos para estudiar la práctica de matemáticos profesionales y poder contrastarlas con la labor docente.

6. Conclusiones

La diversidad de trabajos en el MTSK ha llevado al grupo a incursionar en diferentes problemas que permitirán avanzar en la comprensión del conocimiento y actuar del profesor, así como a proponer iniciativas de intervención y desarrollo. Sin embargo, la asignatura pendiente de una caracterización completa y final del KPM nos limita a una comprensión y formación parcial en esta naturaleza del conocimiento matemático.

Los retos propuestos en la sección anterior hacen notar la necesidad de un trabajo arduo y conjunto. La posibilidad de abordarlo por prácticas permite visualizar que dicho trabajo puede ser efectuado en el medio plazo, pero se tiene que hacer cuidando aspectos metodológicos y siendo coherentes con los posicionamientos propuestos en Montes, Flores-Medrano, Carmona, Huitrado y Flores (2014), ya que fueron estos los que se tomaron en consideración al momento de desarrollar el modelo.

El sistema de categorías, subcategorías y elementos que pueden ayudar a identificar descriptores deberá ser validado con un mayor número de experiencias y con distintos métodos. Sin embargo, consideramos que ayuda a organizar jerárquicamente los elementos constitutivos de las prácticas. Habremos de analizar su funcionamiento con otras prácticas donde, quizá, este sistema jerárquico sea más complicado de determinar.

Referencias

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., Montes, M.A., Escudero-Avila, D., y Flores-Medrano, E. (2014). *Un marco teórico para el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Hasery M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Montes, M.A., Escudero, D., y Flores, E. (Coords.) (2016). *Didáctica de las matemáticas para maestros de educación primaria*. Madrid, España: Paraninfo.

Escudero, I., Gavilán-Izquierdo, J.M., y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(1), 7-32.

Escudero-Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA, 10*(1), 53-77. [http://hdl.handle.net/10481/37190]

Flores, A.H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, *19*(1), 63-98.

Flores-Medrano, E. (2015). Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). Tesis de doctorado publicada en http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11503. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Flores-Medrano, E. (2016). Conocimiento de la práctica matemática (KPM). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (pp. 30-34). SGSE: Huelva.

Godino, J.D. y Recio, A.M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *19*(3), 405-414.

Herbst. P.G., Brach, C. (2006). Proving and doing proofs in high school geometry classes: What is it that is going on for students? *Cognition and Instruction*, *24*(1), 73-122.

Leighton, J.P. (2004). Defining and describing reason. In J. P. Leighton & R. J. Sternberg (Eds.) *The nature of reasoning* (pp. 3-11). Cambridge: Cambridge University Press.

Leikin, R., y Zazkis, R. (2010). On the content-dependence of prospective teachers' knowledge: a case of exemplifying definitions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(4), 451-466.

Mariotti, M. A., y Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(3), 219-248.

Montes, M., Flores-Medrano, E., Carmona, E., Huitrado, J.L., y Flores, P. (2014). Reflexiones sobre la naturaleza del conocimiento, las creencias y las concepciones. En J. Carrillo, L.C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Avila, E. Flores-Medrano, y M. Montes (Eds.). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 9-22). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones

Villiers, M. de (1993). El papel y la función de la demostración en Matemáticas. *Epsilon, 26*, 15-30.

Villiers, M. de, Govender, R., y Patterson, N. (2009). Defining in geometry. En T. V. Craine & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 189-203). Reston, VA: NCTM.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65–81). Dordrecht: Kluwer.

Winicki-Landman, G., y Leikin, R. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions I. *For the Learning of Mathematics, 20*(1), 17–21.

Zazkis, R., y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 131-148.

6

EPISTEMOLOGÍA PERSONAL Y CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DEL PROFESOR

Gómez-Chacón, I.Mª

Resumen

Esta ponencia busca reflexionar sobre las relaciones entre el núcleo central del modelo MTSK y los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En el estudio presentado se discute sobre los diferentes elementos que interactúan y dan lugar a la toma de decisiones en contexto a través del análisis de la interacción entre epistemología personal y conocimiento matemático del profesor. El documento propone una conceptualización de término epistemología personal desde una ontología y epistemología actual del conocimiento matemático y plantea algunos aspectos a explicitar en el modelo MTSK.

Palabras clave:

Modelo MTSK, Epistemología personal, decision-making, problem solving.

Gómez-Chacón, I.Mª (2017). Epistemología personal y conocimiento matemático del profesor. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp.48-67). Huelva: CGSE.

1. Introducción

En esta ponencia se enmarca en las Jornadas SIDM[1] de 2017, *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK*, con dos objetivos: responder algunos retos planteados y reflexionar sobre las relaciones entre el núcleo central del modelo MTSK y los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

El núcleo central del modelo *MTSK* está referido a *Concepciones sobre las matemáticas y sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática*. Nuestra ponencia no se va a centrar sólo en concepciones, tomaremos un concepto más amplio epistemología personal del profesor. La razón principal para tomar este concepto es porque buscamos describir, explicar y predecir el desempeño de los profesores, la toma de decisiones y las acciones durante la enseñanza sobre la base de su epistemología personal y conocimientos.

En los últimos 20 años, la literatura sobre profesores y enseñanza ha identificado y ampliamente descrito el conocimiento, creencias y metas del profesor. Nosotros proponemos dar un paso más allá: 1) describiendo las formas en que estos elementos interactúan y dan lugar a la toma de decisiones en contexto a través del análisis de la interacción entre epistemología personal y conocimiento matemático y, 2) planteando qué elementos tendrían que explicitarse en el modelo *MTSK*.

La importancia de una perspectiva epistemológica en el aprendizaje y en la enseñanza ha sido reseñada por distintos autores (Ernest, 1991). En este trabajo el énfasis en epistemología se presenta como una meta-perspectiva, en como el profesor piensan sobre el conocimiento. A menudo esta meta-perspectiva se expone con una intención normativa, impulsada por la afirmación de que una reflexión más profunda sobre cuestiones epistemológicas mejoraría la educación matemática. Son más raras las investigaciones basadas en estudios empíricos de observaciones momento a momento de la epistemología del pensamiento en situaciones naturales de interacción en el aula (Schoenfeld, 2010). Adquirir conocimientos es no sólo un proceso lógico, secuencial y estandarizado, como dirían los racionalistas, sino que el aprendizaje se considera 'intuitivo'. Con frecuencia el docente se enfrenta a cuestiones sobre cómo hacer frente a la enseñanza de la matemática, cómo tomar decisiones frente a determinados procesos en el acto, gran parte de estas implican cognición epistémica. En este estudio se trata de identificar configuraciones emergentes, unas más convertidas en rutinas y otras más espontaneas e intuitivas que involucra la toma de decisiones del profesor y que penetra la enseñanza de Proyectos de Investigación en el aula.

En lo que sigue el texto, vamos a proceder en nuestra construcción de forma inductiva: nos moveremos de un análisis de una situación de enseñanza a una formalización de elementos teóricos que emergen de este análisis. Previamente precisaremos algunos conceptos que utilizaremos.

[1] SIDM, Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemáticatiene su sede en la Universidad de Huelva, España. En el grupo participan investigadores de universidades de España, Portugal, México, Chile, Perú, Ecuador y Brasil

2. Fundamentos a considerar

Para el análisis y la discusión de la interacción entre epistemología personal y conocimiento matemático en el trabajo empírico consideraremos conceptualmente qué comprende la epistemología personal y las categorías de análisis del conocimiento matemático del modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK).

2.1. Conceptualización de epistemología personal

La epistemología personal es el estudio del pensamiento sobre el conocimiento y el proceso de conocer de los individuos. Su estudio nace en el ámbito de la psicología educativa y cognitiva. Aunque en las últimas décadas se desarrolla en varias direcciones (Hofer y Bendixen, 2012; Barzilai y Zohar, 2014) existe una convergencia en algunas dimensiones centrales de la epistemología personal como son: la naturaleza del conocimiento, certeza del conocimiento, la simplicidad del conocimiento, la fuente del conocimiento, y la justificación del saber (Hofer y Pintrich, 1997).

Hoy en día no hay un modelo único que guie la investigación sobre epistemología personal (Bendixen, y Rule, 2004). Algunas de las aproximaciones al concepto de epistemología personal que la perspectiva de la psicología educativa plantea: enfoques de desarrollo, enfoques en las creencias y enfoques en los recursos.

Los modelos de desarrollo de la epistemología personal generalmente ven a los estudiantes como poseedores de posiciones o perspectivas epistémicas integradas. Estos modelos describen las posiciones epistémicas de los estudiantes desarrollándose a lo largo de su vida. El enfoque de las creencias para el estudio de la epistemología personal derivan de los trabajos de Schommer-Aikins (2004) quienes proponen la existencia de múltiples creencias epistemológicas. Estas creencias reflejan supuestos, expectativas y actitudes que pueden afectar los procesos de razonamiento. En el ámbito de Educación matemáticas son numerosos los estudios sobre creencias epistemológicas (p. e., Leder, Pehkonen, y Törner, 2002; Maass y Schloeglmann, 2009; Roesken y Casper, 2011).

Hay consenso en que las creencias epistemológicas se refieren a la "creencia sobre la naturaleza del conocimiento y los procesos de conocimiento (Gómez-Chacón et. al, 2012 and Gómez-Chacón, 2014) y en algunos casos el aprendizaje Op' t Eynde, De Corte, y Verschaffel, 2006).

En algunos estudios las creencias epistemológicas han sido explícitamente descritas como un tipo de conocimiento metacognitivo o como esquemas (Muis, 2007).

Un tercer enfoque importante para el estudio de la epistemología personal es el enfoque de recursos propuesto por Elby y Hammer (2010). Éste pone de relieve la naturaleza fragmentada y contextual de las epistemologías del individuo. Los recursos epistemológicos son recursos cognoscitivos específicos, vinculados al contexto que la gente utiliza para entender y reflexionar sobre su conocimiento, actividades, formas y posturas epistémicas. Los recursos epistemológicos pueden evolucionar gradualmente hasta convertirse en creencias a medida que llegan a ser plenamente desarrollados, articulados y más estables.

Con frecuencia, en el desarrollo de investigaciones estos enfoques han actuado disjuntamente, sin tener en cuenta de una forma integrada lo que cada uno de ellos considera como componentes clave que sustenta el concepto de epistemología personal (Bromme, 2005).

En el ámbito de la Educación matemática hay que destacar autores que no estando adscritos sus trabajos bajo el término epistemología personal han realizado una integración epistémica de muchos de estos aspectos. Por ejemplo, Schoenfeld ha trabajado la metacognición como un aspecto central de la cognición y en relación a los sistemas de creencias Schoenfeld 1987. Más recientemente este autor ha desarrollado una teoría de la toma de decisiones, centrada en los profesores (Schoenfeld, 2010). Este trabajo, así como otros trabajos del mismo autor sobre entornos de enseñanza y aprendizaje (Teaching for Robust Understanding (TRU)[2]), es indicativo del hecho de que en el campo de Educación matemática hay una dialéctica fundamental y productiva entre la teoría y la práctica y en las componentes contextuales y de conocimiento, desarrollando herramientas para realizar observaciones e intervenciones naturalistas fiables en las que las aulas pueden servir como laboratorios

En el modelo de Schoenfeld se articula en recursos (especialmente el conocimiento); metas; orientaciones (una abstracción de creencias, incluyendo valores, preferencias, etc.); y toma de decisiones (que puede ser modelado como una forma de análisis coste-beneficio).

En el estudio que presentamos proponemos el término epistemología personal como un concepto multifacético que opera tanto a nivel cognitivo, metacognitivo y afectivo. Para un nivel operativo del término *epistemología personal* hemos distinguido entre razonamiento epistémico, creencias epistémicas, emociones epistémicas y toma de decisiones. Con base en el modelo de Schoenfeld (2010) nos interesa entran en una exploración mayor del constructo que este autor plantea de orientaciones. Con este objeto precisaremos las creencias y emociones epistémicas –como una manera operativa de desempacar la categoría orientaciones- (Gómez-Chacón, 2017; Gómez-Chacón y De la Fuente, en prensa). Así como la interacción entre el razonamiento epistémico y creencias/emociones epistémicas reflejado en la toma de decisiones, entendida esta interacción como la aplicación de heurísticas y estrategias en contextos concretos y específicos de contenido con el fin de hacer juicios sobre lo correcto y lo incorrecto o verdadero y falso en el conocimiento matemático

[2] Teaching for Robust Understanding (TRU) framework developed by the Algebra Teaching Study and Mathematics Assessment Projects at the University of California at Berkeley, Michigan State University, and the University of Nottingham. University of California at Berkeley & Michigan State University. (2016). Algebra Teaching Study. Retrieved from http://ats.berkeley.edu/tools.html

2.2. Modelo de análisis del conocimiento

El modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo, Climent, Contreras, y Muñoz-Catalán, 2013) (Figura 1) contempla la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas en su conjunto y es el modelo a través del cual vamos a analizar el conocimiento matemático del profesor.

Se compone de los dominios Mathematical Knowledge (MK) y Pedagogical Content Knowledge (PCK). El MK incluye los subdominios conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de la estructura de la matemática (KSM), y conocimiento de la práctica matemática (KPM). El PCK comprende el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS). Además, el MTSK contempla las creencias del profesor sobre matemáticas, su enseñanza y aprendizaje.

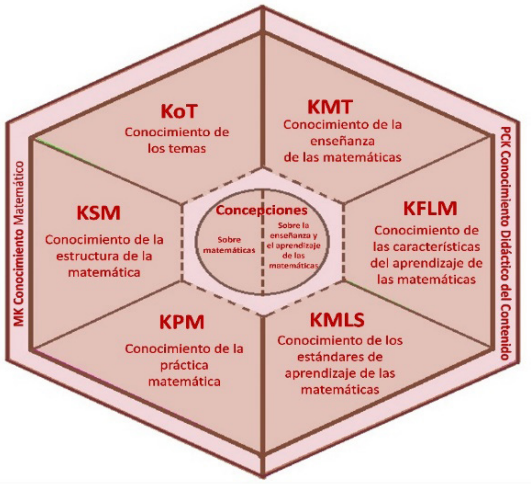


Figura 1. Dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK, Carrillo et al., 2013).

Conocimiento de los temas (KoT): Se define como un conocimiento profundo y fundamentado de los contenidos matemáticos, propio de los profesores de matemáticas y de su labor de enseñar.

Conocimiento de la estructura de la matemática (KSM): Incluye el conocimiento de conexiones con contenidos posteriores y anteriores.

Conocimiento de la práctica matemática (KPM): Comprende el conocimiento sobre cómo se desarrollan las matemáticas, necesario por proveer al profesor de estructuras matemáticas de pensamiento. Formas de proceder y hacer independientemente del concepto abordado.

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT): Integra el conocimiento de las matemáticas y su enseñanza. No constituye un conocimiento matemático, sin embargo, el profesor necesita de dicho conocimiento para poder desarrollarlo.

Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM): Es el conocimiento de cómo se aprende un contenido matemático. El foco principal no está en el estudiante, sino en el conocimiento del profesor sobre el contenido matemático como objeto de aprendizaje.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS): Incluye el conocimiento de los contenidos propuestos en las normativas curriculares, y contempla aspectos de conocimiento derivados de revistas científicas, grupos de investigación y asociaciones profesionales.

3. Presentación del estudio de caso

La metodología cualitativa utilizada está basada en métodos de observación y estudio de casos (Bassey, 1999). El criterio que determina este caso es, que de una parte, este caso está dentro de una muestra de conveniencia, una categoría de muestra seleccionada en la que la población accesible es representativa de la población teórica y por otra parte, el caso (Profesor FC) es un informante clave, un profesor considerado de excelencia, lo que permite ilustrar la interfase entre epistemología personal y el conocimiento del profesor con gran riqueza de datos.

Nos centraremos en una actividad de modelización, un *Proyecto de Investigación Matemática* (PIM). El proyecto de investigación matemática es una investigación real, a partir del enunciado inicial de un problema, sigue una investigación completamente análoga a la científica, el profesor actuando como director del proyecto. El proceso de generar un Proyecto de Investigación de Matemáticas (PIM) de un problema en particular, no sólo requerirá la creatividad de los estudiantes, sino la mediación del profesor para el establecimiento de un espacio de trabajo matemático creativo adecuado.

A continuación presentamos el PIM de modelización matemática planteado basada en el estudio de modelos funcionales, que relaciona la vida cotidiana con el ámbito escolar. El enunciado es el siguiente:

> *Modelos funcionales para la modificación de las notas de un examen*
>
> “Un estudiante de escuela secundaria regresó a su hogar contando que su profesora de matemáticas estaba descontenta con las calificaciones de sus alumnos en una prueba escrita que habían realizado sobre funciones, atribuyéndolo a que quizá las preguntas propuestas habían sido un tanto difíciles. La profesora decidió “ajustar” esas calificaciones usando un factor de corrección: si la calificación original era x (en una escala de 0 a 100), ésta devendría en $10\sqrt{x}$. Es decir, si la calificación inicial fue 81, la corregida sería 90. Aparentemente, este factor es comúnmente utilizado entre los profesores en Israel”.

Este PIM ha sido llevado a cabo en dos situaciones de enseñanza: como propuesta individual (De la Fuente, 2016) y como propuesta a grupo clase (Gómez-Chacón y De la Fuente, en prensa). Para lo que concierne a este texto tomaremos la experimentación del PIM a nivel individual a una estudiante de segundo de Bachillerato.

El enunciado inicial parte de una situación concreta, a modo de ejemplo, para que la estudiante la analice en el contexto español y proponga modelos funcionales que sirvan para el mismo fin. El profesor plantea a la estudiante la contextualización mediante la búsqueda de contextos específicos que intenten explicar y resolver el problema en el caso español.

Así mismo, con este PIM trataremos de ejemplificar la modelización como práctica específica del quehacer matemático modelo MTSK (Carrillo et al., 2013). Brevemente siguiendo el modelo MTSK presentamos los subdominios y categorías asociadas involucrados en desarrollo del PIM:

Subdominio: KoT (Conocimiento de los tópicos). Se dirige principalmente a las siguientes categorías:

- *Registros de representación*. El profesor formula intencionalmente el enunciado inicial del trabajo, ya que este juega un papel muy importante en modo en que se representen los resultados obtenidos. Los principales registros de representación serán de tipo simbólicos (expresiones algebraicas y representaciones gráficas)
- *Procedimientos.* El profesor ha llevado a cabo una reflexión previa sobre los procedimientos de obtención de los resultados en el trabajo. Pero no conoce las posibilidades reales y las potencialidades del trabajo a priori. Esta es la principal característica de los PIM.

Subdominio: KSM (Conocimiento de la estructura de las matemáticas). Se trabaja la categoría:

- *Conexiones de simplificación*. Se trata de aproximarse al problema desde distintas formas (desde lo formal a lo informal).

Subdominio: KPM (Conocimiento de la práctica matemática). Las categorías a las que se hace más referencia son:

- *Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos.* El profesor tiene un plan secuenciado, con fases, para que la estudiante vaya avanzando, a medida que va obteniendo resultados.
- *Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación)*. El trabajo a desarrollar por la estudiante es sobre modelización.

Las acciones y decisiones del profesor en interacción con la estudiante pueden ser sintetizadas a través de los diagramas de la Fig. 2.

La tutorización del PIM se realiza durante 3 meses, con reuniones quincenales para analizar la marcha del trabajo y plantear los pasos siguientes. Aunque en la sección 4 se verá en detalle, anticipamos aquí los momentos temporales de las entrevistas y acciones y decisiones que implicaban. Para presentar el proyecto el profesor y la estudiante tiene una reunión inicial (en la Fig. 2 será denotada por (A1)). Siguiendo esta Fig. 2 señalamos los momentos de cada entrevista, hacemos notar que cada entrevista comprende la presentación y discusión de todo lo que hay entre ella y la siguiente. Es decir que en cada encuentro del profesor con la estudiante se hablaba de varios resultados obtenidos y trabajos realizados, abarcando varias acciones y decisiones. Así después que la estudiante trabaja en el proyecto hay una primera entrevista (que se inicia con A2→D1→A4→A2), segunda entrevista (se inicia en D1→A3→A5→D2→A6), tercera entrevista D4→A5→D2→A6→D4→A5→D2→A6), cuarta entrevista (D4). En la sección 4 se describe hasta este punto, aunque el proceso global de tutorización conllevó 2 encuentros más: quinto encuentro que se produce cuando ha obtenido otros modelos funcionales diferentes: logarítmicos, trigonométricos, etc. y un sexto encuentro, se produce con la entrega del documento del PIM, recogiendo todos los resultados del proceso y la fundamentación del PIM (problema de investigación, objetivos, metodología, conclusiones, bibliografía, etc.) la parte de fundamentación, sino está bien estructurada, puede hacer necesaria otra reunión, fuera del trabajo puramente matemático, para redondear esos apartados.

4. Análisis del caso: MTSK y acciones y decisiones

En la Figura 2 sintetizamos el proceso seguido respecto a las acciones y decisiones llevadas a cabo en el desarrollo en el aula de la actividad *"Modelos funcionales para la modificación de las notas de un examen"*. En las acciones y decisiones hay un eje articulador: el uso de la herramienta heurística analogía. A través el uso de la analogía se verán las mediaciones de tipo epistémico que hace el profesor. En ellas se han identificados dos usos de la analogía (Tabla 1):

> *Uso 1: Proceder por analogía*. En este uso se parte de un tópico o entidad matemática en un contexto determinado (una idea conceptual o procedimental, un resultado, un modelo, una estructura,...), se analizan sus cualidades y se *procede por analogía*, construyendo, (diseñando o elaborando), en otro contexto (más general o más concreto, generalizando o particularizando) otro tópico o entidad análoga, que mantiene las características de la primera, adaptadas al nuevo contexto. Se observa el proceso anterior, hay dos pasos: 1) análisis del tópico matemático; 2) construcción del tópico análogo.
>
> *Uso 2: Establecimiento de analogías*. En este segundo uso se parte de dos tópicos, entidades o ideas matemáticas (conceptos, fórmulas, estrategias u otros procedimientos, demostraciones, resultados, modelos, estructuras,...) que se comparan entre sí, mediante un análisis comparativo en el que se eligen unos criterios que permitan detectar y establecer posibles similitudes y características comunes entre ellas. Cuando se descubre la estructura común subyacente a ambas, independiente de sus contextos, es cuando se *establece la analogía* y se dice que, para esos criterios, las dos entidades son análogas. En este caso el proceso tiene también dos pasos: 1) comparación de tópicos; 2) establecimiento de analogías.

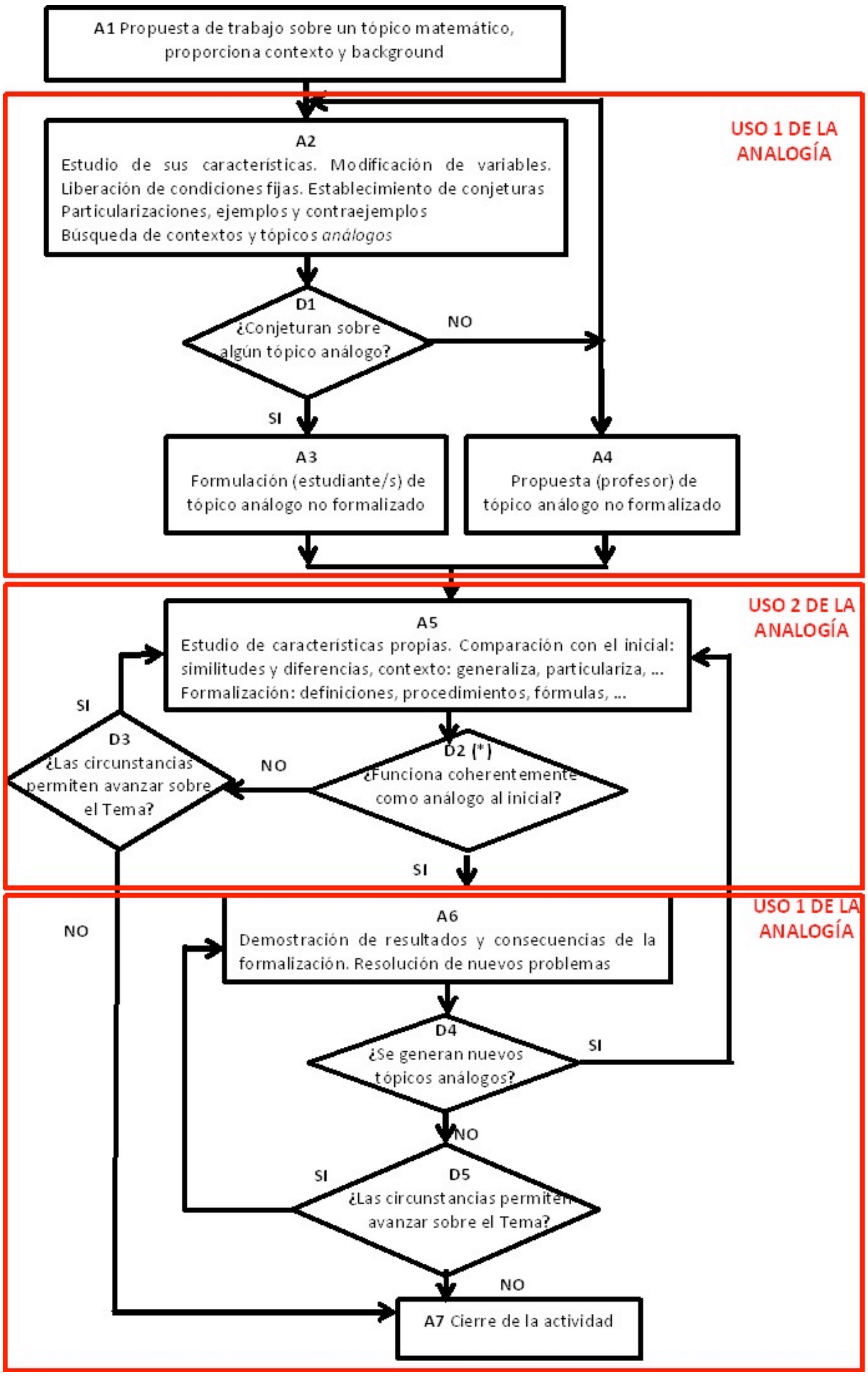
Tabla 1.
Usos de la analogía

Analogía. usos en clase de matemáticas		
Uso	1. Proceder por analogía (a partir de un tópico)	2. Establecimiento de analogías (entre dos tópicos)
Paso 1	análisis del tópico	comparación de los dos tópicos
Paso 2	construcción de un tópico análogo al inicial	establecimiento de analogías entre ellos

En la figura se representa el patrón base que el profesor utiliza en el acceso y el uso de la analogía, este conlleva un proceso cíclico.

Fig 2

Rutina-patrón de toma de decisiones y acciones para la enseñanza de la analogía[3]



[3] Esta codificación A1, A2, A3... y D1, D2, D3... está referida a acciones y decisiones realizadas en el aula, ver Fig. 2.

Seguidamente describimos en detalle las acciones y decisiones representadas en la Fig. 2 .Tras un análisis previo de la actividad el profesor plantea la propuesta de PIM a la estudiante proporcionándole contexto y background (sec. 3). Para ello decide presentarle el enunciado en dos fases; la primera hasta los dos puntos, planteándole que proponga algún factor de corrección apropiado si el examen lo hubieran hecho ella (A1):

> ¿Qué factores de corrección podemos proponer a la profesora para que modifique las notas? Expresarlos en forma algebraica y representarlos gráficamente. Analizar las ventajas e inconvenientes de cada uno.

El profesor pregunta: ¿Qué se puede decir sobre el tema? (A2).

A2 Estudio del tópico (características, ejemplos, conjeturas, etc.)
La estudiante plantea varios modelos funcionales para modificar las notas, después de plantearse el objeto de la propuesta, condiciones que deben cumplir los modelos, sus características, etc. - Primer modelo y=x (no modificarlas) - Funciones de primer grado $y = mx \pm c$. Ejemplos y limitaciones. - Estudio de funciones porcentaje $y = x\left(1 \pm \frac{p}{100}\right)$. Ejemplos y limitaciones. - Funciones redondeo $y = E[x] \pm c$. Ejemplos y limitaciones.

D1 ¿Conjetura sobre algún tópico análogo?
No obtiene ninguno análogo al dado inicialmente, que sea adecuado para el contexto español.

Este es un punto clave de toma de decisiones del profesor, corresponden a conocimientos de la práctica matemática (subdominio KPM). Le interesa constatar si la estudiante utiliza un modelo análogo y la *jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos.*

A4 Propuesta (profesor) de tópico análogo no formalizado
- Como puede observarse en la propuesta inicial de trabajo, **A1**, el profesor ya proponía, a modo de ejemplo, un factor de corrección de notas: el de la profesora israelí. Este modelo $y = 10\sqrt{x}$ es el que motiva el trabajo de la estudiante y al que debe volver para buscar algo análogo, ya que los propuestos por ella no sirven.

Ahora es cuando realmente comienza el trabajo de la estudiante en la búsqueda de un modelo análogo al de la profesora israelí, correspondiente al USO 1 de la analogía, en consonancia con lo que Polya denomina *inferencia por analogía*.

A2 Estudio del tópico (características, ejemplos, conjeturas, etc.)
- Modifica variables: *"variaremos diversos elementos del factor radical para obtener otros factores similares. Éstos elementos son: el índice de la raíz o los exponentes."* - Representa gráficamente varios modelos: $y = \sqrt{10^2 x^2}$; $y = \sqrt{10x^2}$; $y = \sqrt[5]{10^3 x}$; etc. Analiza su coherencia: *"... la función debe tomar valores entre 0 y 10"*. Ve que algunos no sirven, según las condiciones a tener en cuenta: domino, recorrido.

La estudiante analiza las características del modelo inicial: condiciones obligatorias y posibles variables a modificar; para plantear algunas *modificaciones de variables*. El profesor pone de manifiesto conocimientos respecto a procesos asociados a la resolución de problemas, a la modificación de variables y del USO 1 de la analogía. En este episodio de A2, se ponen de manifiesto creencias epistémicas del profesor sobre el conocimiento, la forma de conocer y el aprendizaje a través del razonamiento epistémico que realiza y en las transiciones entre los conocimientos de los dos subdominios KPM y KoT (Ver comentario en la sec. 5*).

D1 ¿Conjetura sobre algún tópico análogo?
- Sí. Como resultado de todo ello propone, a modo de conjetura, $y = \sqrt{10x}$.

Se da nuevamente un punto de decisión, está referido al uso de la analogía. La estudiante ha propuesto una conjetura del modelo.

A3 Formulación (estudiante/s) de tópico análogo no formalizado
- La estudiante formula el modelo encontrado $y = \sqrt{10x}$.

Dentro de esta acción se pone el acento en KSM (Conocimiento de la estructura de las matemáticas), en las *conexiones transversales*. En este episodio nuevamente se pone de manifiesto más explícitamente la epistemología personal del profesor, las creencias epistémicas se evidencian a través del razonamiento epistémico que efectúa (ver comentario sec. 5*).

A5 Estudio de características propias
- Análisis de su validez: *"ninguna nota se sale de los límites establecidos"*; y sus limitaciones: *"La función es creciente pero crece cada vez más despacio"*; *"favorece más a las notas bajas que a las altas, ya que 2,5 se transforma en 5 y 8,1 en 9."*

El estudio de validación y de las limitaciones forma parte de un primer acercamiento riguroso de la estudiante al modelo encontrado. Todo ello sigue formando parte de las orientaciones del profesor para analizar críticamente lo encontrado, mencionadas más arriba: *formas de validación y demostración*, así como, *papel de los símbolos y uso del lenguaje formal.*

En cuanto al diagrama sobre la analogía, en este momento la estudiante ha salido del USO 1 y comienza a entrar de lleno en el USO 2, profundizando en las características y singularidades del modelo encontrado, siguiendo el *modelo a seguir,* haciendo explícitas las analogías entre este modelo y el israelí.

D2 ¿Funciona coherentemente como análogo al inicial? ¿Hay analogías claras entre los dos tópicos?

En este punto de decisión son importantes el KPM (Conocimiento de la práctica matemática). respecto a *Formas de validación y demostración* y el KoT (Conocimiento de los tópicos).

A6 Búsqueda de nuevos modelos. Generalizaciones, contextualizaciones. Resolución de nuevos problemas - Encuentra algunas condiciones: *“vemos que los exponentes y los índices deben variar según una relación y no aleatoriamente como previamente hemos hecho. Los exponentes deben ser una unidad menor que el índice de la raíz. Además no pueden acompañar simultáneamente exponentes al coeficiente y a la incógnita”.*

Esta acción involucra KPM (Conocimiento de la práctica matemática): *Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas.* En este episodio se pone en evidencia creencias epistémicas del profesor sobre la fuente, estructura y justificación del conocimiento (ver sec. 5*).

D4 ¿Se generan nuevos tópicos análogos? Sí - Plantea dos tipos de factores análogos al inicial y más generales: *“Según esto tenemos dos tipos de funciones:* $F_n(x) = \sqrt[n]{10x^{n-1}}$ y $G_n(x) = \sqrt[n]{10^{n-1}x}$, con $x \in [0,10]$ y siendo $n \in N, n > 2$.”

Este punto de decisión involucra el KPM (Conocimiento de la práctica matemática): *Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas.* Nos indica que estos tipos de conocimientos del profesor, sobre la práctica matemática, no son conocimientos sobre los tópicos, sino sobre cómo manejarlos, cómo conectarlos y relacionarlos con otros, cómo compararlos, etc. (se comentará en la sección 5 esta creencia epistémica*).

A5 Estudio de características propias - Comprobación de que los nuevos tópicos engloban al inicial: “*Analizando la gráfica, observamos que* $y = \sqrt{10x}$ *es la función que separa las funciones* $F_n(x)$ *y* $G_n(x)$ [...] *ambas funciones coinciden cuando n toma el valor 2:* $F_2(x) = G_2(x) = \sqrt{10x}$.”

Los conocimientos están centrados en el KSM (Conocimiento de la estructura de las matemáticas): *Conexiones de complejización y simplificación.*

D2 ¿Funcionan coherentemente como análogos al inicial? ¿Hay analogías claras entre los dos tópicos? - Verifica que el dominio y el recorrido de los modelos propuestos son los del modelo inicial: "*Debemos tener en mente que:* $x \in [0,10]$*, ya que, en caso contrario, las funciones no tienen sentido*"; "*... la función debe tomar valores entre 0 y 10*".

KPM (Conocimiento de la práctica matemática): *Formas de validación y demostración.*

A6 Estudio de sus características. Resolución de nuevos problemas - Analiza algunas características de los nuevos modelos: "*Las funciones de la forma* $G_n(x) = \sqrt[n]{10^{n-1}x}$ *se encuentran por encima de la* $F_2(x) = G_2(x)$*. Además, cuanto mayor sea el índice de la raíz, más alejada estará la función de* $y = \sqrt{10x}$*. Por tanto, podemos decir que las funciones de la forma* $G_n(x)$ *suben más las notas que la función* $y = \sqrt{10x}$*, y efectivamente más que las funciones de la forma* $F_n(x)$*.*" - También descubre otras propiedades: "$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = x$*, luego, las funciones* $F_n(x)$ *se acercan a* $f(x) = x$*. Sin embargo, en el caso de* $G_n(x)$ *debemos tener en cuenta que la función ha de pasar por el origen. Según esto,* $\lim_{n\to\infty} G_n(x) = G(x)$ *siendo la función G la siguiente:* $G(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x = 0 \\ 10 \ si \ x \in \,]0,10] \end{cases}$

Esta acción se centra nuevamente en el KPM (Conocimiento de la práctica matemática): *Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas*. En este punto del proceso, el profesor deja trabajar de forma autónoma a la estudiante, siendo ella la que se va planteando y resolviendo distintas cuestiones sobre los modelos F_n y G_n. Lo interesante de este punto es que los problemas y cuestiones problemáticas que aparecen, se los plantea la estudiante a si misma. Esto le sirve al profesor para valorar la capacidad de la estudiante de plantearse nuevas preguntas y si estas últimas le permiten profundizar en los modelos obtenidos para construir otros. Aquí se da un punto de evidencia de Epistemología personal que se relaciona con los puntos anteriores señalados en A2*-D1*-A3* (ver comentario sec. 5).

D4 ¿Se generan nuevos tópicos análogos? Sí - Conjetura, procediendo por analogía, lo que ocurre si las notas varían entre o y N: "*En general, para las notas comprendidas entre 0 y N; es decir,* $x \in [0, N]$ *tendríamos:* $F_n(x) = \sqrt[n]{Nx^{n-1}}$; $G_n(x) = \sqrt[n]{N^{n-1}x}$.

El punto de decisión sobre el procedimiento de analogía, se utiliza KPM (Conocimiento de la práctica matemática): *Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas.*

A5 Estudio de características propias
- Validación de los factores $F_n(x) = \sqrt[n]{Nx^{n-1}}$ y $G_n(x) = \sqrt[n]{N^{n-1}x}$

Se da el KoT (Conocimiento de los tópicos): *Procedimientos. Características del resultado.*

D2 ¿Funciona coherentemente como análogo al inicial? ¿Hay analogías claras entre los dos tópicos?

Punto de toma de decisión basado en la supervisión del KSM (Conocimiento de la estructura de las matemáticas). *Conexiones transversales, de complejización y de simplificación.*

A6 Resolución de nuevos problemas
-Se plantea otros problemas nuevos, relacionados con el funcionamiento de los nuevos modelos: *"Después de haber estudiado las características de las funciones: $F_n(x)$y $G_n(x)$, nos surgen nuevos interrogantes:*
***a)** ¿Qué expresión tendrá el valor x, para que la imagen de éste sea* $\frac{N}{2}$*?*
***b)** ¿Qué índice de la raíz, n, debemos tomar, para asegurarnos de que una nota x se transforma en* $\frac{N}{2}$*?*
***c)** ¿Qué n permite que una función nos convierta un valor* a *prefijado en el doble, es decir, en* $2a$*?*

KPM (Conocimiento de la práctica matemática) entrado en p*rocesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas*.

D4 ¿Se generan nuevos tópicos análogos? Sí
- La estudiante obtiene el factor más general: *"Anteriormente hemos definidos los tipos de funciones del modelo radical como:* $F_n(x) = \sqrt[n]{Nx^{n-1}}$ *y* $G_n(x) = \sqrt[n]{N^{n-1}x}$*. Estos dos tipos de funciones son un caso específico de la expresión que engloba a todos los factores:* $H_n^m(x) = \sqrt[n]{N^m x^{n-m}}$*."*

KPM (Conocimiento de la práctica matemática). *Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas*. La profundización de la estudiante en las características de las funciones F_n y G_n, como factores de corrección, permite la *combinación* de las dos familias de funciones en una nueva familia de factores de corrección que engloba a todos los anteriores. La familia de funciones $H_n^m(x) = \sqrt[n]{N^m x^{n-m}}$ generaliza el factor de corrección inicial $y = \sqrt{10xy} = \sqrt{10x}$, manteniendo las analogías con él. Este proceso forma parte de la cuarta fase del proceso de resolución de problemas, que tan poco se trabaja en clase. Para el profesor, la clave está en trabajar con la estudiante la *combinación*; es decir, profundizar en un tópico permite analizarlo desde variados puntos de vista, confrontarlo a otro tópico similar, comparar los contextos de cada uno y, en algunos casos, *combinar* algunas características de cada uno, para obtener otro nuevo. El profesor considera que es muy similar al proceso de descubrimiento y, a nivel educativo con estudiantes de estas edades, constituye una forma de acercamiento al descubrimiento y la creación, insuperable e inmejorable.

5. Epistemología personal del conocimiento matemático y toma de decisiones en la tutorización del PIM

En esta sección profundizamos en el tipo en las mediaciones epistémicas del profesor a través de las relaciones entre acciones, decisiones, conocimiento. En lo que el profesor ha convertido en rutina de enseñanza en la tutorización (en su comportamiento en la acción, momento a momento).

En el análisis de la tutorización del PIM (sec. 4) se muestra una unidad entre el conocimiento subjetivo y objetivo de matemáticas al utilizar una enseñanza basada en investigación (Inquiry Based-Teaching). En la creación de "experiencia matemática" en la enseñanza, la epistemología personal del profesor se manifiesta en la dimensión ontológica de matemáticas, en creencias epistémicas relativas a las estructura de conocimiento, la estabilidad del conocimiento y las fuentes del conocimiento y su justificación. Aparece en menor proporción creencias sobre la forma de conocer y creencias sobre el aprendizaje.

En los momentos de decisión se da el predominio de creencias epistémicas sobre la estructura del conocimiento matemático (ver D4) y la orientación del profesor hacia la meta planteada (ver D1 y D2).

Para el Profesor FC una creencia epistémica es que "los conocimientos matemáticos más importantes son las formas de hacer y los métodos específicos de trabajar en matemáticas. Entre estos conocimientos destaco la búsqueda de patrones, regularidades y leyes matemáticas, en procesos cambiantes, a partir de particularizaciones y ejemplos genéricos" (Entrevista FC, 2016). Aunque FC no lo verbaliza como tal en las entrevistas, la reiterada observación de su práctica matemática en clase (ejemplo es el PIM presentado aquí, ver D1 y A3, A4, A6) nos ha llevado a extender la formulación de esta creencia epistémica: "los patrones a desarrollar más son los patrones inductivos y analógicos". La dominancia de la analogía se muestra como un razonamiento epistémico en acto (tácito), momento a momento en la clase.

En el episodio de decisión D1 que sigue a esta acción A2, se pone manifiestos como la rutina de comportamiento viene guiada por la meta, del lograr el manejo de símbolos y los procesos de validación.

En el episodio A3 que sigue las creencias epistémicas se dan a través del razonamiento epistémico y recursos que pone en juego. Se hace explícito en los conocimientos sobre estructuras matemáticas (KSM). El profesor considera que el estudio de patrones y funciones es un tema clave en el que educar a los estudiantes en el tópico KoT es a través de la KSM: "Uno de los temas centrales de las matemáticas es el estudio de patrones y funciones. Este estudio requiere que los estudiantes reconozcan, describan y generalicen patrones y construyan modelos matemáticos para predecir el comportamiento de fenómenos del mundo real que muestran el patrón observado" (Entrevista FC).

Esta creencia en interacción con los subdominios de conocimiento se vuelve hacer explicita en A6, FC nos indica al respecto: "La búsqueda de nuevos contextos en los que encontrar nuevos tópicos análogos se hace siempre desde la profundización, con los tópicos conocidos, en el contexto de estos últimos…Una de las formas del profesor para fomentar el espíritu de profundización en los estudiantes es mostrarles las matemáticas como un conocimiento en construcción, como una ciencia experimental".

Por último, reseñamos las tipologías de emociones del profesor que han surgido. Las hemos tipificado en dos: metas u objetivos emocionales y emociones epistémicas. La descripción emocional que hace el profesor y se pone de manifiesto en su mediación epistémica es relativa a que la estudiante logre una estabilidad emocional para pensar mejor matemáticamente y favorecer emociones epistémicas que le ayuden a tener una visión activa y dinámica sobre el que hacer matemático. Los objetivos emocionales son tanto el resultado final en términos de lo que queremos lograr y nos motivan en el proceso de lograr. Hay tres dominios principales en los cuales los objetivos "emocionales" desempeñan una función vital según este profesor:

- el dominio "profesional" sobre el "quehacer matemático propio del matemático o de una metodología de investigación".
- el dominio de la relación; relación con el objeto matemático y con otros sujetos
- el dominio del auto-crecimiento que incluye el funcionamiento mental y físico y los elementos de autorregulación que actúan para mejorar la mente y el espíritu matemático.

En este PIM emergen con más fuerza los dos primeros. Entre los ingredientes que propicia están: una comprensión de cuáles son los dominios críticos en el proceso, ideas flexibles para superar obstáculos, estrategias y recursos para mantener el equilibrio emocional en la interacción a través del apoyo.

6. Discusión, cuestiones y líneas abiertas

Tres son los núcleos sobre los que articulamos esta sección conclusiva: 1) la conceptualización de epistemología personal y 2) los objetivos del estudio a la identificación de elementos que interactúan en la toma de decisiones en acto a través del análisis de la interacción entre epistemología personal y conocimiento matemático, 3) elementos que tendría que explicitarse en el modelo MTSK.

En relación a la conceptualización de *epistemología personal* es necesario una perspectiva multifacética e integrada en las que se consideren tanto los aspectos cognitivos, metacognitivos y afectivos contextualizados y en dominios de conocimientos específicos. Estudios como el de Schoenfeld (2010) o el presentado aquí con profesores hacen uso de construcciones teóricas como herramientas operativas para analizar las decisiones y acciones de los docentes. En ellos los conocimientos, metas, creencias se convierte en recursos para la práctica. Categorías que permiten extender las dimensiones tradicionales del concepto de epistemología personal (certeza del conocimiento, la simplicidad del conocimiento, la fuente del conocimiento, y la justificación del saber (Hofer y Pintrich, 1997).

En lo presentado la utilización de las valoraciones subjetivas implícitamente expresadas en la tutorización PIM, a través de la herramienta heurística de la analogía, capturan aspectos de la preocupación profunda de este profesor en la enseñanza. Preocupación se hace explicita a través de las creencias epistémicas relativas a la estructura de conocimiento, la estabilidad del conocimiento y las fuentes de conocimiento y su justificación y la emoción epistémica.

Estas creencias y emociones epistémicas son algo que envuelve la naturaleza de su regla de acción, es decir, las rutinas de acción. Como hemos expuesto, un análisis detallado revela que FC considera en alto valor que los estudiantes hagan matemáticas y tiene el recurso de precisar cuestiones a raíz de los comentarios de los estudiantes. Tiene un estilo de enseñanza basado en “rutina de interrogación” que consiste en hacer preguntas y dar respuestas integrando la de la estudiante. Esa rutina se da en la Fig. 2. De hecho utiliza esa rutina varias veces en el desarrollo de la tutorización. La rutina parece traerla a nivel consciente, ya que actúa como una componente de los requisitos cognitivos y emocionales de la tarea exigida a la estudiante. Asimismo se evidencia que las acciones y los contextos de decisión en los que surgen los razonamientos epistémicos y las creencias epistémicas que marcan las normas epistemológicas en la tutorización tienen por objeto lograr un aprendizaje autorregulado por parte de la estudiante.

Consideramos como cuestión abierta de investigación la precisión entre rutinas, hábitos y mecanismos de actuación (donde su comprensión conllevaría más profundización psicológica). En el término hábito comprendemos las formas consagradas de entendimiento que constituyen el fondo de nuestras creencias explícitas. El hábito incluye la visión del mundo que influye en el comportamiento.

En este sentido, el proceso de cognición epistémica (razonamientos y creencias) propician el establecimiento de un hábito en el estilo de enseñanza del profesor: el uso de la analogía como herramienta para la modelización.

Por último, respecto elementos que tendría que explicitarse en el modelo MTSK y que ampliarían el núcleo central, es de interés tener en cuenta los conceptos que se presentan como posible conceptualización teórica: lo que hemos tipificado aquí como epistemología personal (categorías del concepto: creencias y emociones epistémicas, razonamiento epistémico y recursos epistémicos), la diferenciación conceptual de rutinas, hábitos, orientaciones, mecanismos de actuación; y otros conceptos no abordados aquí pero que el análisis realizado en este estudio pone de manifiesto: el concepto de estructuras de afecto-cognición global local (Gómez-Chacón, 2000, 2017), el concepto orientaciones acuñado por Schoenfeld (Schoenfeld, 2010).

Referencias

Barzilai, S, y Zohar, A. (2014). Reconsidering Personal Epistemology as Metacognition: A Multifaceted Approach to the Analysis of Epistemic Thinking, *Educational Psychologist*, 49(1), 13-35,

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham: Open University Press.

Bendixen, L. D., y Rule, D. C. (2004). An integrative approach to personal epistemology: A guiding model. *Educational Psychologist*, *39*, 69–80.

Bromme, R. (2005). Thinking and knowing about Knowledge. En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard, F. Seeger (Eds.). *Activity and Sign –Grounding Mathematics Education*. (pp. 191-201). New York: Springer.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 8) (pp.2985-2994). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

De la Fuente, C. (2016). *Invariantes operacionales matemáticos en los proyectos de investigación matemática con estudiantes de secundaria*. Doctoral Dissertation, Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Elby, A., y Hammer, D. (2010). Epistemological resources and framing: A cognitive framework for helping teachers interpret and respond to their students' epistemologies. En L. D. Bendixen y F. C. Feucht (Eds.), *Personal epistemology in the classroom: Theory, research, and implications for practice* (pp. 409–434). New York, NY: Cambridge University Press.

Ernest, P. (1991). *The* Philosophy *of the* Mathematics Education. England: Taylor y Francis Group.

Gómez-Chacón, I. M. y De la Fuente, C. (in print). Exploring teacher's epistemic beliefs and emotions in inquiry-based teaching of mathematics, En S. Chamberlin y B. Sriraman (Eds.) (En print). *Affect and mathematical modeling. Advances in Mathematics Education*, Springer

Gómez-Chacón, I. Mª (2017). Emotions and heuristics: the state of perplexity in mathematics, *Journal ZDM-Mathematics Education*, 49, 323–338.

Gómez-Chacón, I. M (2016b). Hidden connections, double meanings A mathematical viewpoint of affective and cognitive interactions in learning. R*egular Lecture in Proceedings ICME 13,* 13th International Congress on Mathematical Education, Hamburg University.

Gómez-Chacón, I. Mª (2014). Matemáticas: creación y descubrimiento. Un estudio desde la epistemología personal. En A. Villar Ezcurra y A. Sánchez Orantos (Ed.), *Una ciencia humana*: Libro Homenaje a Camino Cañón Loyes, (131-142). Madrid: Publicaciones Universidad Pontificia de Comillas.

Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático. (Emotional Mathematics. Affects in Mathematics Learning*) Madrid: Narcea.

Gómez-Chacón, I. M. y De la Fuente, C. (2017, in print). Problem-Solving and Mathematical Investigation: creative processes, actions and mediations, En N. Amado, S. Carreira y K. Jones, (Ed.) *Broadening the scope of research on mathematical problem solving*: A focus on technology, creativity and affect. Springer.

Gómez-Chacón, I. M., Romero, I. Mª y Garcia, Mª M. (2016a) Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: a Mathematical Working Space-framed study concerning cognition and affect, *ZDM-Mathematics Education*, 48(6), 909-924.

Hofer, B. K., y Bendixen, L. D. (2012). Personal epistemology: Theory, research, and future directions. En K. R. Harris, S. Graham, T. Urdan, C. B. McCormick, G. M. Sinatra, y J. Sweller (Eds.), *APA educational psychology handbook, Vol. 1: Theories, constructs, and critical issues* (pp. 227–256). Washington, DC: American Psychological Association.

Hofer, B. K., y Pintrich, P. R. (1997). The development of epistemological theories: Beliefs about knowledge and knowing and their relation to learning. *Review of Educational Research*, 67(1), 88-140.

Leder, G., Pehkonen E., y Törner, G. (Eds.) (2002). *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Maass, J. y Schloeglmann, W. (Eds.) (2009). *Beliefs and Attitudes in Mathematics Education: New Research Results*. Rotterdam: Sense Publishers.

Muis, K. R. (2007). The role of epistemic beliefs in self-regulated learning. *Educational Psychologist*, *42*, 173–190.

Op ’t Eynde, P., De Corte, E., y Verschaffel, L. (2006), Epistemic dimensions of students’ mathematics-related belief systems. *International Journal of Educational Research*, 45(1-2), 57-70.

Roesken, B. y Casper, M. (Eds.) (2011). *Current State of Research on Mathematical Beliefs*. XVII Proceedings of the MAVI-17 Conference Sept. 17 - 20, in Bochum, Germany. Professional School of Education, Ruhr-Universität Bochum.

Schoenfeld , A.H.: (1987). 'What's all the fuss about metacognition?' In Schoenfeld, A H (Ed) *Cognitive Science and Mathematics Education*, 189-215. Hillsdale NJ,USA: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A. H. (2010). *How We Think: A Theory of Goal-Oriented Decision Making and its Educational Applications.* New York: Routledge.

7 PROBLEMAS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA DONDE LA CONTRIBUCIÓN DE MTSK PUEDE SER RELEVANTE

Montes, M.A.
Aguilar, A.
Escudero-Ávila, D.
Moriel-Junior, J.
Contreras, L.C.
Climent, N.

Esta mesa redonda se organiza con la intención de generar una discusión acerca de posibles líneas que orientarán el trabajo con el modelo MTSK en los próximos años. Asumimos que estas reflexiones pueden, y deben, dada la naturaleza de la investigación en Educación Matemática, concretarse, y re-orientarse según se vaya avanzando en las mismas, así como combinarse con otras líneas que emerjan de manera natural. Organizamos esta sesión en torno a la misma pregunta: ¿Qué aporta MTSK a la investigación en Educación Matemática?, particularizada en cuatro aspectos: El formador de profesores, la detección de las necesidades formativas de los futuros profesores, el diseño de tareas y programas de formación, y la formación continua.

En cuanto al formador, se planteó cómo el MTSK permite al formador organizar el contenido de la formación. En primer lugar, la progresiva familiarización con el modelo, permite profundizar en los elementos de conocimiento del contenido, tanto didáctico como matemático, susceptibles de ser conocidos por un profesor. Esto, para un formador de profesores novel, supone una guía para su propia formación. La especificidad del modelo, respecto de la matemática, permite evitar un discurso psicopedagógico general, cuya aportación a los futuros docentes no es responsabilidad del profesor de Didáctica de las Matemáticas, y centrarse en aquellos aspectos en los que la especialización del formador es (debe ser) mayor, esto es, los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Centrándonos ahora en la detección de las necesidades formativas de los futuros profesores, podemos identificar, al menos, tres niveles de organización: el conjunto de conocimientos mínimos exigibles a un futuro profesor recién ingresado en la titulación; el conjunto de conocimientos exigibles y deseables en un profesor recién egresado, que debería poder gestionar procesos de enseñanza y aprendizaje en aulas reales; y el conocimiento

Montes, M., Aguilar-González, A., Escudero-Avila, D., Moriel, J. Jr., Contreras, L.C., y Climent, N. (2017) (2017). Problemas de la Educación Matemática donde la contribución de MTSK puede ser relevante. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 68-70). Huelva: CGSE.

que determina el estatus de 'profesor experto'. Detectamos aquí la necesidad de identificar aspectos específicos de cada uno de estos niveles para así caracterizar mejor estas necesidades. En este sentido, y desde la experiencia que aportan las diferentes investigaciones de evaluación de conocimiento que se han realizado, enfocadas en geometría, aritmética, y concretamente en fracciones, MTSK permite organizar cuestionarios para indagar en los múltiples aspectos de conocimiento ligados a cada concepto dado el sistema de categorías que propone. De igual manera, MTSK permite organizar al formador su docencia de manera que promueva la construcción de un núcleo especializado de los recursos que usará el docente que supere el programa de formación, en el sentido de Schoenfeld (2010), para la enseñanza de las matemáticas.

En esta discusión se identificó la necesidad de incorporar algunos elementos que permitan integrar el MTSK a un marco de desarrollo profesional, de tal manera que podamos generar programas de formación basados en la organización de conocimientos específica que propone este modelo.

Centrándonos ahora en el diseño de tareas, la potencialidad del modelo está íntimamente ligada de nuevo, al esfuerzo por desarrollar una herramienta analítica, con un conjunto de categorías e indicadores que permiten al investigador-formador centrar cada tarea en aspectos concretos, de forma organizada. Además, MTSK nos permite extraer situaciones de la práctica susceptibles de ser transformadas en tareas formativas. Es importante señalar que el punto de partida para el diseño de tareas no ha de ser, necesariamente un elemento del Conocimiento de los Temas. Por ejemplo, pensemos en que el objetivo es diseñar tareas para que el futuro profesor comprenda las dificultades que suelen tener los estudiantes de primaria en las relaciones área-perímetro de las figuras planas. En este caso, el núcleo del objetivo de la tarea reside en un elemento del Conocimiento de las Características del Aprendizaje Matemático que pretende construir. Las relaciones entre subdominios y categorías permitirán al formador diseñar el recorrido que hará por aquellos subdominios y categorías que tengan relación con el objetivo principal. Dichas relaciones también son una aportación específica de MTSK, derivadas de las investigaciones. Esto es especialmente relevante cuando los modelos de formación dominantes se articulan sobre la base del conocimiento del contenido. Ese cambio en el foco hace que, sin perder de vista los elementos del conocimiento matemático que la gestión de una tarea escolar requiere, sean o puedan ser los elementos del conocimiento didáctico del contenido matemático los que se tengan presentes en un inicio, mostrando una visión más cercana a la práctica docente.

Finalmente, en cuanto a la formación continua, MTSK constituye un modelo de organización de un conocimiento específico, que permita centrarse en aquellos docentes en activo que desean continuar su formación. En estos casos, MTSK permitirá identificar buenas prácticas docentes, sustentadas en sólidos repertorios de conocimiento, que podrán ser objeto de discusión en reuniones con profesores en activos. Por otro lado, explorar el conocimiento de profesores en activo, junto al de profesores en formación, puede ser una ventana al estudio de cómo se construye el conocimiento profesional.

Referencias

Schoenfeld, A.H. (2010). *How we think*. New York: Routledge.

Agradecimientos

Agradecemos el apoyo brindado por el Programa para el Desarrollo Profesional Docente, para el Tipo Superior (PRODEP), de la Subsecretaría de Educación Superior de México, para el desarrollo y presentación de este trabajo. Número de convenio de autorización: 511-6/17-14551.

8 SÍNTESIS, PROBLEMAS ABIERTOS, PREGUNTAS PARA LA REFLEXIÓN

Sosa, L.
Contreras, L.C.
Gómez-Chacón, I.Mª
Flores-Medrano, E.
Montes, M.A.

En este documento pretendemos dar cuenta de las principales ideas recogidas en cuanto a lo abordado en cada uno de los talleres y la mesa redonda programados en las actividades de las III Jornadas SIDM "Avances, utilidades y retos del modelo MTSK", incluyendo en cada uno, problemas abiertos y preguntas para la reflexión; finalmente mostramos un pequeño apartado con reflexiones generales.

1. El conocimiento del formador de profesores y otros temas abiertos en el uso de MTSK

Hay varios ámbitos de investigación en los que el MTSK puede ser de utilidad. Nos referiremos en este apartado a aquellos que han surgido en el propio proceso de construcción del modelo, como son el de la ejemplificación, el conocimiento requerido para abordar situaciones de aprendizaje de determinados temas matemáticos, los relacionados con el diseño de la formación inicial del profesor de matemáticas y los vinculados al conocimiento del formador de profesores.

Como decíamos en Liñán, Contreras y Barrera (2016), un conocimiento que nuestras investigaciones con MTSK no permiten ubicarlo de forma determinante en ninguno de sus subdominios es el de los ejemplos. Conscientes del papel esencial de los espacios de ejemplos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, propusimos

Sosa, L., Contreras, L.C., Gómez-Chacón, I. Mª, Flores-Medrano y E. Montes, M.A. (2017). Síntesis, problemas abiertos, preguntas para la reflexión. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 71-79). Huelva: CGSE.

entonces considerar los *espacios de ejemplos* como una nueva categoría del KoT, una categoría no asociada a conceptos concretos, sino más bien articulada a través de todos los conceptos matemáticos de los que un profesor tiene conocimiento, dado que esa articulación es un indicador de la comprensión del tema que tiene ese profesor. Así, la acción de ejemplificar nos brinda un escenario donde estudiar MTSK; los ejemplos y espacios de ejemplo nos pueden informar del KoT (de su calidad y de su riqueza), así como del KSM- conocimiento de ejemplos que potencian conexiones interconceptuales-, y si a través del uso de ejemplos indagamos sobre la intencionalidad con los que el profesor los usa, nos podrán informar del KMT (conocimiento de ejemplos que ayudan a construir conceptos o superar obstáculos de aprendizaje, o disponer de criterios- usando transparencia y variación -que permitan construir una adecuada secuencia de ejemplos), del KFLM (por qué los elije en relación con dificultades de sus estudiantes). Pero, además, como queda sugerido antes, también el uso de los ejemplos podría informar del KPM (por ejemplo a través del uso que el profesor hace de los contraejemplos).

Dentro de los temas abiertos, estamos interesados en analizar qué conocimiento especializado se requiere para abordar determinadas situaciones de aprendizaje de *temas matemáticos* (como la relación área-perímetro, la idea de infinito, la clasificación de figuras planas o las relaciones entre fracciones decimales y porcentajes), donde afinamos el enfoque a aspectos muy concretos del KoT, y cómo los estudiantes para profesor de Matemáticas (EPP) pueden desarrollar conocimiento especializado a partir del análisis de situaciones reales de aula. Por ello, a partir del trabajo de Liñán (2017) nos planteamos utilizar parcialmente aquellas situaciones de aula potencialmente ricas para movilizar MTSK en los profesores o futuros profesores. Queremos comprobar la utilidad del diseño de viñetas mediante su implementación en un aula de formación inicial de maestros como elemento de reflexión y para la construcción de MTSK. De nuestros casos analizados anteriormente, nos centraríamos en los conocimientos potencialmente útiles para gestionar situaciones de aula de matemáticas de primaria. En complemento a lo anterior, queremos estudiar qué conocimiento se moviliza en los EPP con esa estrategia formativa.

Entendemos que el *desarrollo profesional* de un maestro de matemáticas, en formación inicial o continua, es fruto de una elaboración cognitiva individual (García, 1997), que implica la integración de los conocimientos relacionados con cada subdominio del MTSK. Consideramos importante que el desarrollo del conocimiento especializado de un profesor de matemáticas tenga lugar a través de la participación activa en tareas contextualizadas de aula, para ayudarles a comprender que su papel en las aulas de formación es muy diferente al resto de aprendices de matemáticas, propiciando un cambio de visión, para que no se sientan como aprendices de matemáticas si no como aprendices de profesores de matemáticas. Ello justifica una nueva línea de trabajo que incluye el uso de MTSK como elemento de diagnóstico y evaluación del conocimiento de un profesor, su uso para el diseño de tareas formativas y para el diseño y evaluación de programas de formación y del propio desarrollo profesional.

El diseño de las viñetas se realizará a partir del análisis del conocimiento especializado[1] derivado de la observación de las interacciones profesor-estudiantes en aulas de primaria de estudios de caso anteriores. Las viñetas provendrán, en unos casos, de episodios concretos observados, y en otros serán elaboradas a partir de fragmentos de los mismos. Nos preguntamos en qué medida la discusión y análisis de las viñetas dará la oportunidad a los profesores de observar y reflexionar sobre el aprendizaje de sus alumnos, movilizando conocimiento previo y creando la posibilidad de generar nuevo conocimiento, considerando las interacciones entre maestro y alumnos en las viñetas (Climent *et al*., 2016).

Así, el MTSK empezará a utilizarse como articulador del diseño de programas de formación de profesores. La estructura de sus subdominios y categorías, así como las relaciones que la investigación está permitiendo establecer entre ellos se está usando para organizar el conocimiento especializado en relación con la gestión de una tarea específica. A través de un proceso de reconstrucción de las situaciones de aula que provienen de las observaciones de nuestras investigaciones, se realizaran experimentos de enseñanza que se refinarán en ciclos sucesivos y concluirán en el diseño de tareas para la formación.

Como ya se ha señalado en el capítulo 2, es preciso analizar las características del conocimiento del formador de profesores de matemáticas (MTEK), donde, además de trabajar en la determinación de subdominios y categorías del MTEK, necesitamos trabajar en cómo formar formadores, cómo evaluar su formación y en determinar criterios para su selección.

2. El dominio afectivo en el MTSK

Los objetivos y cuestiones centrales de discusión para el grupo han sido planteados por Inés M. Gómez-Chacón en la ponencia *Epistemología personal y conocimiento matemático del profesor* (ver ponencia en estas Actas). Con esta ponencia se ha buscado reflexionar sobre las relaciones entre el núcleo central del modelo MTSK y los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En el estudio presentado en la ponencia se discute sobre los diferentes elementos que interactúan y dan lugar a la toma de decisiones en contexto a través del análisis de la interacción entre epistemología personal y conocimiento matemático del profesor. Gómez-Chacón ha propuesto una conceptualización de término epistemología personal desde una ontología y epistemología actual del conocimiento matemático y plantea algunos aspectos a explicitar en el modelo MTSK.

La discusión en el grupo participante en las Jornadas se ha articulado en torno a tres ejes:

a) Dominio afectivo como núcleo central del MTSK.

b) Relaciones dominio de conocimiento matemático y dominio afectivo: puntos de conexión.

[1] Tendremos en cuenta tanto el conocimiento observado en la maestra como las oportunidades de conocimiento que emergen en el aula, pudiendo así reflexionar tanto acerca del conocimiento puesto en juego, como sobre aquellos otros que podrían haber coadyuvado a gestionar la situación descrita o que pudieran ser relevantes de cara a la formación inicial.

c) Herramientas teóricas y metodológicas para el análisis.

En relación al primer eje, se ha apreciado la introducción hecha del concepto *Epistemología personal*. Éste puede favorecer la construcción de elementos caracterizadores del dominio afectivo, posibilitando un análisis más amplio especialmente en la relación con el actual dominio de las creencias y concepciones sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje, así como su sentido dentro del modelo MTSK. Se ha considerado pertinente incorporar elementos como las emociones epistémicas, las actitudes del profesor que tengan relación con los subdominios. También, ha quedado abierta la cuestión de la influencia de la Identidad profesional y sus interacciones con el dominio afectivo, asimismo la exploración necesaria de la emoción provocada en un grupo (profesor-estudiantes) donde se genera una emoción compartida (con-emoción, conmociones).

Con respecto al segundo eje varias han sido las cuestiones planteadas. Primeramente se ha discutido sobre el reto de integración y conexión. En la concepción inicial del modelo MTSK se pretendía encajar las creencias/concepciones como elementos que influyen en el conocimiento matemático, la ponencia presentada ha puesto de manifiesto que es necesario integrar otros descriptores del domino afectivo como son creencias y emociones epistémicas y la identidad del profesor y, entrar más a fondo sobre qué marco teórico sustentará los descriptores del dominio afectivo. Queda planteada la cuestión si se podría hablar de un dominio afectivo "especializado", es decir, que afecte o permee los subdominios del MTSK. Finalmente, se señala que el posicionamiento antropológico es clave a la hora de aproximarse a todas estas cuestiones.

Por último, en relación al tercer eje: aspectos teóricos y metodológicos para el análisis del dominio afectivo en el MTSK se ha reseñado la importancia de un acercamiento fenomenológico y desde ahí definir e identificar patrones. Los patrones se deben concebir desde una estructura o sistema dinámico. El concepto de estructuras de afecto-cognición global local (Gómez-Chacón, 2016) puede ser una herramienta eficaz a nivel metodológico.

Para terminar y como prospectiva de avance se reconoce la solidez que puede tener para futuros trabajos esta línea de investigación, dado que se parte de la experiencia de investigación de varias décadas realizada por dos grupos de investigadores diferentes: 1) sobre conceptualización de estructuras de interacción cognición-afecto y el sistema de referencia afectivo-cognitivo dado por el conocimiento específico matemático (e.g. Gómez-Chacón, 2016) y 2) sobre el modelo analítico MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) (p.e. Carrillo et al., 2013)

Y se plantean como objetivos específicos a desarrollar en futuros trabajos:

a) Focalizar en las estructuras de interacción cognición-afecto.

b) Priorizar unas categorías de estudio: epistemología personal, emociones, creencias epistemológicas y conocimiento de la práctica matemática KPM.

c) Poner en valor las investigaciones ya realizas por miembros del grupo sobre dimensión afectiva y creencias, algunas en particular realizadas utilizando el modelo analítico MTSK.

3. Profundización en el KPM

Durante las actividades realizadas en el taller de profundización sobre el Conocimiento de la Práctica Matemática surgieron algunos aspectos que podemos resaltar:

a) No existe un sistema de categorías definido para el subdominio. Se han hecho propuestas de categorías basadas en prácticas (una categoría por cada práctica y una serie de subcategorías e indicadores a partir de las propiedades y caracterizaciones de dicha práctica, e.g. Flores-Medrano, 2015) y otras que solo contienen descriptores basados en el trabajo matemático. Se tendría que avanzar en la consolidación de ambas propuestas para poder establecer a una de estas como acuerdo de sistema de categorías para el subdominio, o bien tener ambas y utilizarlas según se adecuen a los objetivos de las distintas investigaciones.

b) La literatura respecto al conocimiento que tiene el profesor acerca de las prácticas matemáticas, considerando aquí la que como grupo hemos generado, resulta escasa y explora pocos elementos y, casi siempre, se centra en la práctica de demostrar. Se tendría que explorar literatura ajena al conocimiento del profesor y focalizada en la descripción de características de las distintas prácticas (e.g. Escudero, Gavilán-Izquierdo y Sánchez-Matamoros, 2014).

c) Hace falta llegar a un acuerdo sobre la definición de Práctica Matemática. En Flores-Medrano (2015) se hace una propuesta, pero no ha sido puesta a discusión internamente (en los distintos foros), ni externamente (en la escritura de algún artículo).

Las actividades estuvieron organizadas de tal forma que se pudiera analizar el potencial de utilizar herramientas analíticas en la investigación sobre este subdominio. Se cuestionó sobre la completitud de dichas herramientas. Es decir, se tiene que trabajar en la caracterización de las categorías de cada subdominio (práctica), de tal manera que obtengamos sistemas que contemplen en su totalidad a los aspectos que puedan contener y que evite solapamientos entre sus elementos.

4. Problemas de la Educación Matemática donde la contribución de MTSK puede ser relevante

La discusión en torno a los “Problemas de la Educación Matemática” en los que la contribución de MTSK puede ser relevante pretende hacer que el grupo dé un salto en cuanto a sus objetivos con las investigaciones que realizamos. Así, se espera pasar de pretender mejorar el modelo, su potencial analítico, o la comprensión del conocimiento del profesor, a identificar focos de investigación relevantes y reconocidos a nivel nacional e internacional en el área, para aportar nuevos resultados a través del uso de MTSK.

En esta línea, se puso de relieve que es necesario, a la hora de desarrollar estas investigaciones, reflexionar sobre las limitaciones que el modelo puede generar en las mismas.

En la discusión, emergieron diversos temas generales en los que podríamos centrar nuestras futuras investigaciones. Entre estas figura el uso analítico del MTSK, poniendo énfasis en las relaciones entre subdominios de conocimiento, para analizar situaciones de la práctica de aula de cara a su uso potencial como actividades de formación de maestros. Asimismo, entendemos que el MTSK podría ser relevante en el diseño de programas de formación, dada la sensibilización hacia las necesidades formativas que nos permite tener. En esta misma línea, cabe destacar la aportación del modelo a la hora de identificar y explicitar elementos concretos de conocimiento, así como la estructuración que permite hacer al formador. Estas dos posibles líneas de investigación, el diseño de tareas de enseñanza, y el diseño de programas de formación, convergen hacia la evolución de nuestras investigaciones desde el estudio del conocimiento en momentos concretos, como si de fotografías estáticas se tratase, a estudios de desarrollo profesional, buscando la longitudinalidad. Finalmente, entendemos que una línea con gran potencial es el estudio de buenas prácticas de enseñanza, de cara a avanzar en la línea de la caracterización del profesor experto.

5. Reflexiones generales

En el MTSK se destaca de manera integrada lo especializado del conocimiento del profesor de matemáticas, eso podría servir para defender lo especializado de nuestra profesionalización y por ende recuperar parte del prestigio del profesor de matemáticas.

Usar el modelo MTSK en la formación de profesores (inicial o continua) implica un proceso en el cual se recomienda primero sensibilizar al (futuro) profesor de la necesidad formativa (tanto en la importancia y el papel de la reflexión como en la necesidad e importancia del conocimiento del profesor –de los conocimientos que tiene pero sobre todo de los que necesita) para tratar de reducir un poco lo del efecto de “la bomba atómica” (artefacto potencial pero mal usado), es decir, se trata de que primero se comprenda el modelo y la relevancia de éste y con ello intentar evitar un “mal” uso de éste (inclusive aún y cuando en el MTSK se cuenta con categorías para cada subdominio –excepto el KPM que por ahora sólo tiene indicadores-, puede ser difícil entender el MTSK en su conjunto, en una primera vez, posiblemente falta mayor descripción y ejemplos de las categorías). Luego se ve necesario el acompañamiento del formador de profesores al futuro profesor o profesor en servicio en las diversas etapas que implica la práctica docente (preactiva - planeación, activa –aula, y post-activa –fuera del aula) cuando se pretende que éstos usen el MTSK en su práctica. Es destacable que se requiere de un trabajo colaborativo entre el formador y los formados pues lo importante en el uso del MTSK viene durante todo el proceso de formación y no sólo con el fruto de ese proceso. Más aún, durante ese proceso, muchas veces puede ser difícil reconocer los conocimientos que debemos mejorar y en ese momento juega un papel importante el control de las emociones, el autoestima, la (auto)motivación para poder tomarlo como una oportunidad para mejorar profesionalmente.

Es de resaltar pues, que en términos de *desarrollo profesional* puede ser interesante usar el modelo al fijarse en todo el proceso formativo que puede darse mientras se va usando el MTSK. Por ejemplo, en términos de la discusión de argumentos de que un indicador referido a un contenido matemático concreto, corresponda a cierto subdominio, planteándose y resolviendo qué se necesitaría para que ese indicador sea o no de otro subdominio; así como provocar la reflexión (personal y grupal) en cuanto a los conocimientos que debe considerar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en distintos niveles educativos, etc.

Por supuesto, el papel de la gestión del formador juega un papel fundamental, por ejemplo, para diseñar actividades/tareas en las que el (futuro) profesor se dé cuenta de conocimientos que requiere(n) (re)construir (MK/PCK). Para ello, el formador de profesores debe tener humildad para reconocer su propio MTSK y desarrollo profesional, darse la oportunidad de aprender (autoformación y autoconocimiento del formador –es una gran responsabilidad para formarse él mismo sobre todo cuando ha de formar a (futuros)profesores de distintos niveles educativos-) y lograr ser un “buen” gestor de conocimientos.

En cuanto al dominio afectivo (creencias acerca de las matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje) se han tenido avances significativos. Sin embargo, parece desvinculado del resto de investigaciones que se realizan. No queda clara la manera en la que una investigación pueda tocar estos aspectos y otros. Da la impresión de que se puede convertir en aspectos focalizados. Es cierto que hay investigaciones sobre relaciones entre dominio afectivo y otros subdominios del MTSK, pero queda pendiente mostrar, con evidencias sólidas, cómo es que esas creencias impregnan al conocimiento (supuesto con el que se propuso que quedaran al centro y con línea punteada), o bien, desmentir este supuesto.

Por otro lado, uno de los esfuerzos que resultan más interesantes proviene de la preocupación de dar garantía a la información que proporcionamos como evidencia (ya hace tiempo se venía trabajando la noción de indicio y la de oportunidad para investigar). A estos esfuerzos se suma la noción de conocimiento potencial (Liñán, 2017) que, además, vela por el aprovechamiento de la información y que, una vez definidos diversos mecanismos de triangulación (por ahora se ha optado por la triangulación entre investigadores), puede resultar un punto de unión entre las investigaciones interpretativas y aquellas de intervención dirigida.

Más aún, pese a tener líneas abiertas sobre profundización y definición de elementos en el seno de distintos subdominios (e.g. KPM), los trabajos se han diversificado, aportando una gran variedad de frentes por explorar. Por ejemplo, recientemente existe la discusión en cuanto a si el uso de la tecnología en el aula forma parte del KMT o si forma un espacio fuera del MTSK quedando la relación usos/intencionalidades de la tecnología – MTSK.

Así pues, estando el trabajo del grupo muy centrado en la investigación con el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, es necesaria una primera reflexión en el sentido de la maduración que vemos en las reflexiones del grupo. Desde las Jornadas de 2013 hasta las actuales, el desarrollo del modelo MTSK nos ha permitido desarrollar argumentos más elaborados, y fundamentados, así como compartir un lenguaje común, que supone una base para discutir diversos temas son una menor cantidad de asunciones implícitas por la mera terminología usada.

En estas jornadas observamos que nuestras investigaciones nos permiten comprender tanto el conocimiento del profesor, objeto principal de nuestras reflexiones, como la naturaleza de la propia matemática en cada nivel, comenzándose por tanto un proceso de acercamiento a la naturaleza sociocultural de la disciplina.

Nuestras líneas de investigaciones actuales, desarrolladas algunas de ellas en los talleres y sesiones de discusión de las III Jornadas, nos permiten avanzar, a través de la exploración del conocimiento del profesor, en el conocimiento que el formador de profesores pudiera o debiera poseer para desempeñar su propia actividad profesional. En este sentido, también creemos que en siguientes pasos deberíamos usar el modelo MTSK para realizar diseños a diferentes niveles en la formación inicial y continua de los profesores. Un nivel macro, curricular, a través del estudio de la completitud de los planes de estudios en cuanto a la construcción potencial de conocimiento que contemplan; un nivel meso, en cuanto al diseño de los planes de estudios por cada asignatura de formación de maestros; y un nivel micro, relativo al diseño de unidades y tareas de formación de profesores.

Finalmente, estas jornadas, y el MTSK como perspectiva de investigación aporta dos elementos fundamentales en el desarrollo de nuestra investigación. En primer lugar, es un eje vertebrador de la comunicación entre los que nos acercamos a este enfoque, permitiendo un diálogo entre perspectivas teóricas que enriquece nuestra comprensión de la realidad a la que nos acercamos. En segundo y último lugar, reuniones como esta, los seminarios de los viernes, y el propio desarrollo de investigaciones en la línea común que compartimos, supone una oportunidad para continuar formándonos, aprendiendo, y creciendo en grupo, complementándonos unos a otros, siempre a través de una crítica profunda y constructiva, que no es sino una de las señas de identidad del propio grupo.

Referencias

Ball, D.L. (2008). Mathematical knowledge for teaching: Explicating and examining a program of research. Presentation made at the annual meeting of the American Educational Research Association, New York.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 8) (pp.2985-2994). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

Climent, N., Montes, M. Á., Contreras, L. C., Carrillo, J., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Barrera, V. J. y León, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las Matemáticas a través del análisis de vídeos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *9*, 85-103.

Escudero, I., Gavilán-Izquierdo, J.M., Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(1), 7-32

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)*. Tesis de doctorado publicada en http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11503. Huelva: Universidad de Huelva.

García, M. (1997). *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje*. GIEM-Kronos: Sevilla.

Gómez-Chacón, I. M (2016). Hidden connections, double meanings A mathematical exploration of affective and cognitive interactions in learning. *Regular Lecture in Proceedings ICME 13- Hamburg University*. (Publicado por Springer en 2017).

Liñan, M. (2017). *Conocimiento Especializado en Geometría en un aula de 5º de primaria*. Tesis de doctorado inédita. Huelva: Universidad de Huelva

Liñan, M.M., Contreras, L.C., Barrera, V. (2016). Conocimiento de los Temas (KoT). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 14-25). Huelva: CGSE.

COMUNICACIONES

1 EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MAGNITUDES PROPORCIONALES. UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

Barrera, V.J.
Liñán, M.M.
Pérez, B.

Resumen

Como profesores de Didáctica de las Matemáticas y de la Física, somos conscientes de las dificultades que muestran los estudiantes para maestro (EPM) en relación con la comprensión de la proporcionalidad numérica, tanto en contextos matemáticos como de la física fundamental. El modelo analítico del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) se ha revelado fundamental en el estudio del conocimiento especializado de los EPM. Uniendo ambas ideas, presentamos la primera parte de una propuesta didáctica que pretende obtener una aproximación al MTSK de los EPM en este contenido. Partiendo de los resultados obtenidos, se diseñará la intervención que pueda mejorar el conocimiento sobre proporcionalidad de los EPM.

Palabras clave:

MTSK, Estudiantes para Maestro, conocimiento del contenido, magnitudes proporcionales, proporcionalidad numérica.

[a]Universidad de Sevilla, [b]Centro de Estudios Universitarios Cardenal Spínola CEU.

Barrera, V.J., Liñán, M.M. y Pérez, B. (2017). El conocimiento especializado de los estudiantes para maestro en la resolución de problemas de magnitudes proporcionales. Una propuesta didáctica. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 81-85). Huelva: CGSE.

1. Motivación y justificación

Los EPM muestran ciertas dificultades al establecer razonamientos proporcionales, tanto en la resolución de problemas, como en la interpretación de respuestas de estudiantes de primaria al respecto (Buforn, Fenández y Llinares, 2015). No ayuda a solventar estas dificultades el conocimiento exclusivamente procedimental de la razón usando la regla de tres y el producto en cruz, ambos mecanizados en etapas anteriores, lo que provoca además errores en la resolución de problemas en los que la relación entre las cantidades no es proporcional (Buforn y Fernández, 2014). Dado que gran parte de las leyes de la física se sustentan en el razonamiento proporcional, como por ejemplo la las relacionadas con la cinemática, las dificultades citadas anteriormente se reflejan en la resolución de situaciones problemáticas en el ámbito de la física fundamental.

Los estudiantes del Grado en Educación Primaria reciben formación, entre otros contenidos, sobre proporcionalidad numérica, números racionales, magnitudes (en particular las proporcionales) y medida, y problemas aritméticos escolares (PAEs). Centrándonos en las magnitudes proporcionales, relacionadas directamente con el resto de contenidos, el enfoque dado en su enseñanza pretende una alfabetización científica, dejando a un lado el manejo algebraico de las fórmulas y la repetición sistemática en la resolución de problemas estandarizados,para trabajar a partir de la relaciónentre las magnitudes que forman parte del fenómeno. Esto implica identificar la proporcionalidad, o no, de las variables involucradasy establecer esquemas mentales que les permitan la resolución de problemas multiplicativos.

Esta visión de la educación científica nos llevó a trabajar conjuntamente desde las áreas de Matemáticas y Física con el objetivo de generar espacios de reflexión que facilitaran la significación de fracciones, razones y proporciones en el contexto de un problema. Observamos dificultades en la comprensión de la proporcionalidad desde el punto de vista matemático y, como consecuencia, desde el punto de vista físico. Al resolver problemas relacionados con magnitudes directa o indirectamente proporcionales, continuas o discretas, como la numerosidad, la velocidad, la aceleración, la densidad, la fuerza, etc., los EPM cometen errores relacionados con el fundamento matemático de los factores de conversión de unidades compuestas, que están íntimamente relacionados con la propia comprensión de la magnitud, de la interpretación como razón del número racional, de la interpretación de la división como medida o como reparto, y de la comparación multiplicativa.

Los trabajos sobre el conocimiento especializado de los EPM en fracciones y proporcionalidad numérica realizados bajo el enfoque del MTSK[1] (Montes, Contreras, Liñán, Muñoz-Catalán, Climent y Carrillo, 2015; Moriel-Junior, 2014; Liñán, Barrera e Infante, 2014), han demostrado la eficacia del modelo como herramienta de análisis para la comprensión de las fortalezas y las debilidades en el conocimiento especializado de los EPM. Las debilidades en nuestros estudiantes se han hecho patentes en distintas pruebas de

[1] MTSK: *Mathematics Theachers´ Specialised Knowledge* (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2014; SIDM, 2016).

evaluación para las asignaturas mencionadas y en el día a día de nuestras clases, aunquede manera difusa. Desde estas premisas, presentamos la primera parte de una propuesta didáctica para identificar el MTSK de cualquier grupo de EPM, que pueda servir como punto de partida para el futuro diseño de intervenciones para la formación inicial.

2. Proporcionalidad: una propuesta didáctica

Hemos diseñado una actividad en la que proponemos una serie de problemas contextualizados en la física fundamental[2], sobre los que planteamos cuestiones diseñadas para desgranar el MTSK en proporcionalidad de los EPM.

La primera pregunta implica la resolución de los problemas propuestos y la justificación de cada paso dado. La segunda, cuestiona el conocimiento de la magnitud correspondiente del resolutor. La tercera dará información sobre el conocimiento de la relación entre la proporcionalidad y los números racionales. Finalmente, la cuarta pregunta invita a la discusión sobre la relación entre las cantidades que intervienen en el enunciado, pues los problemas aritméticos multiplicativos podrían tener una interpretación proporcional.

Dados los siguientes problemas:

1. Resuélvelos, indicando claramente las fases que sigues para ello y lo que haces en cada una de ellas.
2. Identifica y caracteriza las magnitudes involucradas justificando tu respuesta.
3. Si consideras que, explícita o implícitamente, intervienen fracciones en el problema, caracterízalas indicando de manera justificada su interpretación (parte-todo, razón, cociente, operador), contexto (discreto o continuo), modo de representación, etc.
4. Decide razonadamente si es un problema aritmético. Si fuera posible clasifícalo desde la variable semántica.

Cada respuesta nos dará información, más o menos detallada, sobre el MTSK en proporcionalidad, en concreto del dominio del conocimiento matemático (MK), de los EPM. Para caracterizarlo, utilizaremos la siguiente rúbrica (SIDM, 2016):

[2] No se especifican los enunciados puesto que la actividad que se propondrá sobre ellos será aplicable a cualquier conjunto de problemas. Se considerará la variable didáctica *conjunto de problemas a los que se les aplican las cuestiones de la propuesta didáctica*, entendiendo como variable didáctica (Ruiz, 2003, p. 49-50) los “elementos de la situación que puede ser modificados por el maestro y que afectan a la jerarquía de las estrategias de solución que pone en funcionamiento el alumno [...] Una variable didáctica es un elemento de la situación [didáctica] tal que, si actuamos sobre él, podemos provocar adaptaciones y aprendizaje”.

1.1Procedimiento de resolución: ¿Cómo se hace?¿Cuándo se puede hacer y por qué en este caso se puede hacer? ¿Por qué se hace así?Características del resultado: ¿es coherente con los datos de entrada? ¿Las unidades de medida corresponden con la operación realizada? ¿La unidad de medida obtenida sirve para medir la magnitud involucrada en el problema? 1.2 ¿Qué modos de representación se utilizan en la resolución? 1.3 Procesos asociados a la resolución de problemas: ¿Qué heurísticos ha utilizado? ¿El proceso está justificado? 1.4 Fases de resolución: ¿se indica claramente la jerarquía y planificación? 2.1 Conoce las magnitudes involucradas en el problema y las aísla. Conoce las unidades de medida apropiadas para cada una de ellas. 2.2 Caracteriza la magnitud: ¿Fundamental/derivada? ¿Discreta / continua? ¿Extensiva/intensiva? ¿Proporcional: directa/inversa/no proporcional? 3 ¿Reconoce el tipo de números que intervienen en el problema? ¿Identifica la fracción irreducible?: Interpretación, tipo, contexto, modo de representación. 4.¿Conoce qué características tiene un PAE y sabe si el problema las cumple?: criterios de clasificación, en particular variable semántica. ¿Identifica el papel que juega cada cantidad?

Las entradas de la rúbrica permitirán analizar la respuesta de cada pregunta, informando sobretodas las categorías del KoT y detallando los indicadores de *procedimientos*. De ellas, la primera, tercera y cuarta añadiráninformación sobre algunos indicadores de KPM relativos a la resolución de problemas.Las conexiones (KSM) podrían revelarse en las respuestas a todas las preguntas, pues, por ejemplo, en la resolución de los problemas podríamos ver el conocimiento sobre conexiones de simplificación entre los factores de conversión de las unidades y la factorización en Z o, inversamente, de complejización si partimos de esta última relacionándola con el factor de conversión.

3. Algunos comentarios y reflexiones finales

Esta propuesta de actividad para observar MTSK, en particular MK, en proporcionalidad puesta en práctica en distintos grupos de EPM de varias Universidades tendría una doble finalidad. Por un lado, el diseño de intervenciones interdisciplinares entre matemáticas y física en la formación de EPM partiendo del análisis de la información obtenida; por otro, mejorar nuestro propio conocimientoespecializado como formadores de maestros basado en la observación de las producciones de los EPM.

La puesta en práctica de la actividad en diferentes centros de formación de EPM podría generar un mapeo del MK en proporcionalidad, teniendo en cuenta el conocimiento emergente (Barrera, Liñán, Muñoz-Catalán y Contreras, 2016) evocado al investigador partiendo de su sensibilidad teórica (Strauss y Corbin, 1994).

Referencias

Barrera, V. J., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, C. y Contreras, L. C. (2016). Conocimiento especializado, movilizado y emergente, en una clase de primaria sobre las posiciones relativas de las rectas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 167-176). Málaga: SEIEM.

Buforn, Á. y Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *Bolema*, *28* (48), 21-41.

Buforn, Á., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Conocimiento de matemáticas y la competencia de reconocer el desarrollo del razonamiento *up and down* en los estudiantes. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 191-199). Alicante: SEIEM.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2014). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Actas delCERME8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME

Liñán, M.M., Barrera, V. e Infante, J.M. (2014). Conocimiento especializado de los estudiantes para maestro: la resolución de un problema con división de fracciones. *Escuela Abierta*, 17, 41-63.

Montes, M.Á., Contreras, L.C., Liñán, M.M., Muñoz-Catalán, M.C., Climent, N. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación*, 367, 36-62.

Moriel-Junior, J.G. (2014). *Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações*. (Tesis doctoral). Universidade Federal de Mato Grosso: Mato Grosso, Brasil.

Ruiz, L. (2003). Aprendizaje y matemáticas.En Chamorro, M.C. (Coord.), *Didáctica de las matemáticas para Primaria* (pp. 31-68). Madrid: Pearson Educación.

SIDM (2016). Documento interno sin publicar del Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Huelva.

Strauss, A. y Corbin, J. (1994). Grounded Theory Methodology. En N.K. Denzin y Y.S. Lincoln (Eds.) *Handbook of QualitativeResearch* (pp. 217-285). Thousand Oaks: Sage Publications.

2 CONOCIMIENTO EMOCIONAL Y CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

García-González, M.S.
Martínez-Sierra, G.

Resumen

La investigación sobre afecto en Didáctica de la Matemática ha mostrado que las emociones influyen en la toma de decisiones del profesor en el aula de clase. De ahí que nos hemos propuesto como objetivo de investigación analizar la relación entre el conocimiento emocional del profesor de matemáticas y su conocimiento especializado de acuerdo con el modelo MTSK. Hasta el momento hemos hecho la recolección de datos de nuestro caso de estudio, un profesor de matemáticas de nivel preuniversitario Mexicano. Con el análisis de estos datos pretendemos hallar evidencia dela relación entre el conocimiento emocional del profesor y los subdominios del MTSK, llamamos a esta relación ecología emocional.

Palabras clave:

Conocimiento emocional, MTSK, ecología emocional.

García-González, M.S. y Martínez´-Sierra,G. (2017). Conocimiento emocional y conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 86-90). Huelva: CGSE.

1. Introducción

La investigación en Didáctica de la Matemática ha hecho evidente la presencia del afecto en el aula de clase, esto debido a un hecho ineludible, las relaciones entre sus actores principales, el profesor y sus estudiantes. Así, se ha reportado que constructos como las emociones, actitudes, creencias, valores, emociones y autoeficacia, (Goldin, et al.,2016) permean la enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, Zembylas (2005) señala que cuando un profesor toma decisiones en el aula, las variables afectivas actúan y se reflejan en su propia concepción de enseñar y por tanto en sus métodos de enseñanza. En el caso de los estudiantes, se ha evidenciado que las emociones influyen en sus objetivos perseguidos en los cursos de matemáticas, como asistir a clases, poner atención, acreditar un examen o graduarse de la escuela (Martínez-Sierra y García-González, 2014; 2016; 2017).

La presente investigación particulariza en las emociones del profesor de matemáticas, el motivo obedece a la incipiente investigación al respecto, lo que demanda conocer cuáles son las emociones que los profesores experimentan en momentos determinados de la clase de matemáticas, creemos que esto nos ayudará a entender con mayor profundidad su práctica docente. En una investigación de tipo exploratoria, con profesores de matemáticas de nivel pre-universitarioen México, encontramos que las emociones que experimentanlos profesores son desencadenadas por la valoración de diferentes situaciones del aula en función de las siguientes metas:'que los estudiantes aprendan', 'que se interesen en la clase' y 'que participen en la clase' (García-González y Martínez-Sierra, 2016).

Debido a nuestro interés de profundizar en la práctica del profesor de matemáticas, nos hemos propuesto como objetivo de investigación explorar las relaciones entre el modelo MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge, Carrillo et al., 2014) y el conocimiento emocional del profesor. Contemplar el afecto, en particular las emociones es pertinente desde este modelo, ya que como se ha señalado por sus creadores, el hacerlo permitirá comprender al profesor, su conocimiento y su actividad docente con mayor profundidad (Montes, 2016).

2. Referentes teóricos

Zembylas (2007) ha puesto de manifiesto en el contexto de la enseñanza en general, la pertinencia de incluir el *conocimiento emocional* —conocimiento del profesor acerca de sus experiencias emocionales con respecto a sí mismo, otros (por ejemplo, estudiantes, colegas) y el contexto social y político más amplio en el que tiene lugar la enseñanza y el aprendizaje(p. 356) —dentro de los tipos de conocimientos presentes en el Pedagogical Content Knowledge (PCK). Propone el término *ecología emocional* para teorizar acerca de la relación entre el conocimiento emocional y elPCK. La ecología emocional se refierea cómo los profesores y los estudiantes crean el entorno que configura la forma en que ambos están emocionalmente conectados y comprometidos con el aprendizaje. La ecología emocional se construye en diferentes planos, individual, social y sociopolítico, y depende de variables diversas, por ejemplo los temas tratados, la pedagogía, los discursos escolares, las historias personales y el currículo.

Este mismo autor, resalta la necesidad de realizar más investigaciones sobre áreas y contextos específicos de la educación para describir los aspectos relevantes del conocimiento del docente entemasvariados debido a que no hay mucha información sobre el tipo de circunstancias que motivan el cambio en el conocimiento del profesor, tanto en su comportamiento como en su transformación emocional. Nuestra investigación pretende contribuir a este llamado, analizandola relación entre el conocimiento emocional del profesor de matemáticas y su conocimiento especializado, es decir, el matemático, para ello nos valdremos del concepto *ecología emocional*, antes mencionado.

Son tres los términos que delimitan nuestros referentes teóricos, conocimiento emocional, MTSK y ecología emocional. El *conocimiento emocional* lo entendemos desde Zembylas (2007) como el conocimiento del profesor acerca de sus experiencias emocionales y las de sus estudiantes. El *MTSK* de un profesor se refiere a dos grandes tipos de conocimiento, el de la matemática (MK) y el del conocimiento didáctico del contenido (PCK), es decir, la matemática y su enseñanza, para evidenciarlo el modelo se vale de 6 subdominios (ver Figura 1). La *ecología emocional*, la redefinimos desde Zembylas (2007) como la relación entre el conocimiento emocional del profesor de matemáticas y su MTSK. La hipótesis que nos hemos planteado, es que el conocimiento emocional permea los diferentes tipos de conocimiento señalados por el MTSK.

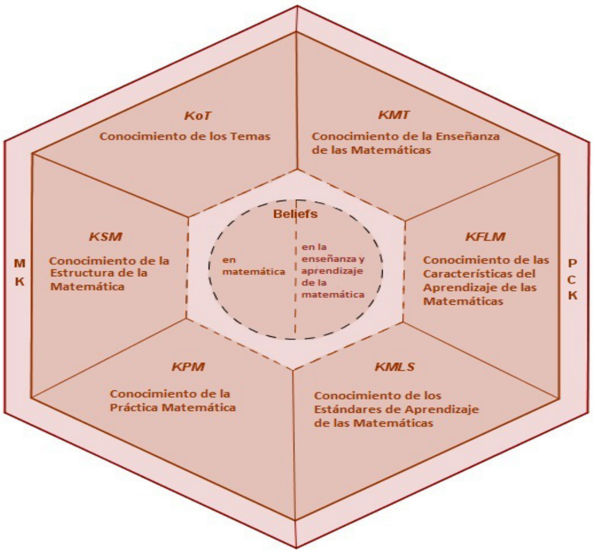


Figura 1. Subdominios del MTSK (Carrillo *et. al.*, 2014).

3. Recolección de los datos

Debido a la naturaleza de nuestro problema hemos optado por un estudio de caso, se trata de un profesor de matemáticas del estado de Hidalgo, México de nivel pre-universitario, nos enfocaremos en la asignatura de cálculo integral. Este profesor tiene 37 años de edad, estudió una licenciatura en Ingeniería en Electrónica de Comunicaciones y una maestría en Didáctica de la Matemática. La elección del caso obedeció a la disposición del profesor para participar en la investigación.

Hemos considerado las siguientes fuentes de evidencian: (1) Una entrevista biográfica al profesor, para conocer las experiencias emocionales propias y de sus alumnos que reconoce en su práctica docente, (2) Auto-informes de experiencias de clase para percatarnos de su MTSK y experiencias emocionales, (3) Observaciones de clase, para confrontar la evidencia de 1 y 2, (4) Entrevistas a sus estudiantes para conocer las emociones que reconocen de su profesor y de ellos mismos y (5) Entrevistas semi-estructuradas para llenar huecos de información que no arrojen las fuentes consideradas.

4. Análisis de datos

Hasta el momento hemos hecho la recolección de datos con las fuentes 1, 2 y 3. Para el logro del objetivo planteado pretendemos analizar la evidencia atendiendo a un análisis temático (Braun y Clarke, 2006) en el que los temas principales serán el conocimiento emocional y el MTSK, estos dos serán relacionados a su vez en el tema ecología emocional, lo que nos permitirá identificar la relación entre conocimiento emocional y MTSK. Como resultado de la investigación, en el tiempo en que se desarrollarán las III Jornadas SIDM, pretendemos mostrar evidencia del conocimiento emocional del profesor en el MTSK.

Referencias

Braun, V., y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*, 77–101. http://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E., y Montes, M.A. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

García-González, M. y Martínez-Sierra, G. (2016). Emociones en profesores de matemáticas: un estudio exploratorio. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XX (pp. 247-252). Málaga: SEIEM.

Goldin, G., Hannula, M., Heyd-Metzuyanim, E., Jansen, A., Kaasila, R., Lutovac, S., Di Martino, P., Morselli, F., Middleton, J., Pantziara, M. y Zhang, Q. (2016). *Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education. An Overview of the Field and Future Directions*. ICME-13 Topical Surveys: Springer.

Martínez-Sierra, G., y García-González, M. del S. (2014). High school students' emotional experiences in mathematics classes. *Research in Mathematics Education*, 16(3), 234–250. http://doi.org/10.1080/14794802.2014.895676

Martínez-Sierra, G., y García-González, M. del S. (2016). Undergraduate mathematics students' emotional experiences in Linear Algebra courses. *Educational Studies in Mathematics*, 91(1), 87–106. http://doi.org/10.1007/s10649-015-9634-y

Martínez-Sierra, G., y García-González, M. del S. (2017). Students' emotions in the high school mathematics classroom: The appraisals in terms of a structure of goals. *International Journal of Science and Mathematics Education*. 15(2), 349–369. DOI: 10.1007/s10763-015-9698-2.

Montes, M.A. (2016). Las creencias en MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. *Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 55-59). Huelva: SGSE.

Zembylas, M. (2007). Emotional ecology: The intersection of emotional knowledge and pedagogical content knowledge in teaching. *Teaching and Teacher Education*, 23(4), 355–367.

3 LOS SUBDOMINIOS DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO QUE MUESTRA EL FUTURO PROFESOR AL ENSEÑAR LA CONSTRUCCIÓN DE LA MEDIATRIZ

Hernández, M.

Zubieta, G.

Resumen

En el presente artículo se muestra la descripción y el análisis de algunos episodios de la práctica de un futuro docente, que cursa el séptimo semestre en la Escuela Normal Superior de México (ENSM), al impartir dos clases de geometría con estudiantes de primer grado de secundaria, la primera en el aula con el uso del juego de geometría en lápiz-y-papel y la segunda en el laboratorio de cómputo utilizando como apoyo el software GeoGebra. La finalidad fue identificar los subdominios del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) propuesto por Carrillo, Contreras y Flores (2013), que emergen en el futuro docente al enseñar el tema de la construcción de la mediatriz en triángulos.

Palabras clave:

Futuro profesor, conocimiento especializado, mediatriz.

Hernández, M. y Zubieta, G. (2017). Los subdominios del conocimiento especializado que muestra el futuro profesor al enseñar la construcción de la matriz. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 91-96). Huelva: CGSE.

1. Introducción y fundamentos

En la actualidad las escuelas normales en México son las instituciones Federales, dependientes de la Secretaría de Educación Pública (SEP), que se encargan de la formación de los futuros profesores de educación Básica en alguna de las especialidades que contempla el currículo, es por ello, que el interés de este estudio es describir y analizar su práctica docente. Los planes y programas de la ENSM, de sus diferentes especialidades, consignan que durante séptimo y octavo semestres el futuro profesor lleve a cabo el trabajo docente "en condiciones reales", por lo cual, su permanencia en la escuela secundaria es durante todo el ciclo escolar (asisten 23 semanas) [Secretaría de Educación Pública- Subsecretaría de Educación Básica y Normal (SEP-SEBN), 2004].

Por otra parte, para analizar la práctica del futuro profesor de matemáticas, es necesario tener o adoptar un marco fundamentado en un modelo situado en el centro del conocimiento matemático que el profesor debe enseñar y en la actividad matemática que ello supone llevar a cabo. En el presente estudio fue adoptado el modelo propuesto por Carrillo et al. (2013) denominado Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), pues reúne los requerimientos teóricos y metodológicos necesarios para llevar a cabo el proyecto.

El modelo citado consta de seis subdominios (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), tres referentes al conocimiento matemático (MK): conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de la estructura matemática (KSM) y conocimiento de la práctica de la matemática (KPM); y otros tres referentes al conocimiento pedagógico de contenido (PCK): conocimiento de las características de aprendizaje de matemáticas (KFLM), conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de matemáticas (KMLS).

A continuación, se describen rasgos observados en este estudio que se relacionan con los subdominios enunciados: Conocimiento de los temas (KoT), incluye significados de conceptos, o ejemplos específicos que caractericen aspectos concretos del tópico abordado. Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), involucra el conocimiento de recursos que permitan al profesor lograr que sus alumnos descubran relaciones entre ciertos conceptos matemáticos. Conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM), se contemplan aspectos que abarcan el conocimiento de las características del proceso de comprensión de los estudiantes de distintos contenidos, errores, dificultades, y obstáculos asociados a cada concepto. Conocimiento de los estándares de aprendizaje en matemáticas (KMLS), este indica que el profesor de matemáticas debe conocer el currículo institucional.

2. Aspectos metodológicos

La técnica privilegiada para la recopilación de datos fue la observación no participativa, en ese sentido, Stake (1999) argumenta que el investigador registra lo que acontece a través de la observación con la finalidad de ofrecer una “descripción [...] incuestionable” para, posteriormente, analizarla (p. 61, cursivas en el original). Por los argumentos antes mencionados, la observación se llevó cabo mediante video-grabaciones (una cámara dirigida, hacia lo que hizo y dijo el profesor), reforzadas con audio-grabaciones y notas de campo. El análisis que según Stake (1999) consiste en darle sentido a los datos recopilados, dejando de lado nuestras impresiones, estuvo centrado en la práctica de un futuro docente que cursaba el séptimo semestre en la ENSM y el escenario fue el aula de clases con el fin de estudiar los conocimientos geométricos y didácticos utilizados.

3. Resultados

En la primera sesión observamos que el futuro docente se apoyó en hojas de trabajo que entregaba a cada uno de sus alumnos con indicaciones que debían ser consideradas para la solución de las actividades, además de ello al inicio de cada clase daba una explicación general en el pizarrón y consideraba las respuestas dadas por algunos estudiantes, como se muestra en el siguiente episodio.

Futuro profesor: A ver, alguien que me apoye a entregar estas hojas de trabajo [*entregando las hojas a un estudiante*].

Estudiantes: Yo [...]

Futuro profesor: ¿Qué es la mediatriz? [*señalando a un alumno que levantaba la mano*]

Estudiante: Es perpendicular

Futuro profesor: ¿Y pasa por dónde?

Estudiante: Por el punto medio

Futuro profesor: Por el punto medio ... es perpendicular al segmento, pero pasa por el punto medio [*camina hacia el estudiante que respondió y entrega una tarjeta de participación*]. [...]

Futuro Profesor: [*toma una escuadra, la apoya en el pizarrón y traza un triángulo*] ¿Cómo trazo las mediatrices de ese triángulo? [*coloca en los vértices del triángulo trazado en el pizarrón las letras ABC*]

Estudiante: Se abre el compás en BC

Futuro Profesor: ¿Será la abertura de este tamaño? [*apoya el compás en el vértice B y usa una abertura igual al segmento BC*] ¿Y luego?

Estudiante: Marca un arco como de arriba y como de abajo

Futuro Profesor: [*traza dos arcos*] ¿Y luego?

Estudiante: Y luego se apoya en C y traza de lado a lado

Futuro Profesor: [*Toma la escuadra y la apoya sobre las intersecciones de los arcos*] Trazo una línea recta.

Estudiantes: Una recta perpendicular que pasa por el punto medio.

De acuerdo al episodio anterior el futuro profesor trazó un triángulo y dadas las respuestas de sus estudiantes tomó con el compás una distancia BC la cual uso como radio para construir en el pizarrón arcos de circunferencia con centros B y C intersecándose dichos arcos en dos puntos (D y E), concluyendo que la recta DE era una recta perpendicular con $\overline{BC}$ ya que formaba ángulos de 90 grados, además por las condiciones de la construcción la recta perpendicular pasaba por el punto medio de $\overline{BC}$, obteniendo así la perpendicular mediatriz.

En la segunda clase el futuro docente organizó al grupo de manera que todos los estudiantes observaran una pantalla ubicada dentro del laboratorio de cómputo, con las ideas principales y los elementos generales que los estudiantes le iban dando, realizó con apoyo de GeoGebra la construcción de la mediatriz, como se muestra en el siguiente episodio.

Futuro profesor: ¿Qué es la mediatriz?

Estudiante: Yo, yo, es una recta perpendicular que equidista de los extremos de un segmento [*mirando sus apuntes de la clase anterior*]

Futuro profesor: ¿Quién me dice cómo trazo una mediatriz?

Posteriormente al episodio anterior el futuro profesor entregó una hoja de trabajo a sus estudiantes y les solicitó que comenzaran con la solución de las actividades utilizando el software como apoyo. Los estudiantes que al leer las instrucciones tenían alguna confusión eran apoyados por el futuro profesor, el cual daba ideas o pistas para que el estudiante pudiera continuar y concluir su hoja de trabajo.

A continuación, se muestran los subdominios del MTSK que observamos en el futuro docente al impartir sus clases de geometría:

Conocimiento de los temas (KoT): El futuro docente concretiza las definiciones. Da una explicación previa de las definiciones antes de entregar la hoja de trabajo. Aparece la construcción de la mediatriz con regla y compás en lápiz-y-papel como la recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio con la consecuencia de que esa recta obtenida es la equidistancia de cualquier punto sobre ella hacia los extremos del segmento correspondiente.

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT): Utiliza hojas de trabajo, que se componen de ejemplos visuales e instrucciones para las construcciones, además de una justificación de los procesos usados para construir lo solicitado, cada ejercicio de las hojas de trabajo se acompañaba de preguntas para que el estudiante analizara las propiedades de sus trazos y llegara a la definición requerida con apoyo de GeoGebra lo cual le servía para consolidar las ideas, por ejemplo, lograron visualizar que las rectas perpendiculares formaban ángulos de 90° y que la condición de recta mediatriz era debido a que pasaba por el punto medio del segmento dado.

Conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM): El conocimiento del tema, además de la elaboración de la planificación (para el diseño de las actividades uso las fases del modelo de Van Hiele) y el conocimiento del uso de los recursos permitió al futuro profesor utilizar el juego de geometría para mostrar a sus estudiantes que el radio podía variar cumpliendo con la condición de ser mayor a la mitad del segmento o mayor al segmento mismo, esto ayudó a los estudiantes a observar que la medida podía variar pero que las circunferencias de un radio menor a la mitad del segmento dado no se cortaban y no podían trazar la mediatriz, los estudiantes pusieron en juego su lenguaje común mientras adquirieron un lenguaje matemático, mezclando el lenguaje común con el lenguaje matemático. Para esta actividad se pidió a los alumnos que indagaran los atajos que el software brinda, como la herramienta para localizar el punto medio de un segmento y la obtención de la perpendicular a una recta que pasa por un punto dado, el uso de GeoGebra permitió a los estudiantes realizar la construcción solicitada con todos los elementos revisados en el aula con lápiz-y-papel, observamos que el futuro profesor conocía algunas de las estrategias de solución seguidas por los estudiantes, por ejemplo, se observa que los segmentos iniciales siempre los hacían paralelos a la base de su cuaderno o del pizarrón.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje en matemáticas (KMLS): Muestra su conocimiento del programa de estudios de secundaria ya que en su planificación se observa un desglose de contenidos, los aprendizajes esperados, el propósito de cada actividad y los conocimientos previos que los alumnos de primero de secundaria requieren para la construcción de mediatrices.

En el subdominio del conocimiento de los temas (KoT), observamos que la mediatriz fue considerada por los estudiantes también como la recta perpendicular que equidista de los extremos de un segmento, esta idea apoyó al futuro docente para revisar al objeto matemático como lugar geométrico (el cual se vio en sesiones posteriores) al colocar sobre la mediatriz obtenida puntos, los estudiantes observaron que las distancias de los puntos colocados sobre la mediatriz y los extremos del segmento siempre eran iguales, esto nos indicó que el futuro profesor conocía el contenido de la sesión que impartió, ya que consideró la equidistancia a los extremos del segmento (como lugar geométrico) y su consecuencia que fue la perpendicular que pasó por su punto medio.

El conocimiento perteneciente a los subdominios del KMT y el KFLM fue detectado al reflexionar, no sobre la construcción en sí, sino sobre la acción del profesor al usar el juego de geometría además de usar GeoGebra para ayudar a los alumnos a seguir sus razonamientos. Consideramos que el conocimiento que se mostró fue en relación con las explicaciones acerca de la construcción de la mediatriz como la recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio, por ello, teniendo en cuenta las ideas vertidas en Carrillo et al. (2013) sobre los distintos subdominios, todo el conocimiento que se puso en juego durante las clases fue especializado, por ser propio de su futura profesión.

Referencias

Secretaría de Educación Pública- Subsecretaría de Educación Básica y Normal. (2004). *Lineamientos para la organización del trabajo académico durante séptimo y octavo semestres. Licenciatura en Educación Secundaria*. México: SEP

Carrillo, J., Contreras, L.C. y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina y I. Segovia, I. (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*, (pp. 193-200). Granada: Editorial Comares.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos* [estudios de caso]. Madrid, España: Morata.

4 LAS OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE Y EL DOMINIO DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DEL MTSK EN EDUCACIÓN INFANTIL

Martín, J.P.
Carrillo, J.

Resumen

El objetivo de esta investigación consiste en describir y comprender el conocimiento desarrollado por una maestra de infantil de 5 años en una sesión sobre resolución de problemas. Esta sesión será analizada desde la perspectiva del dominio matemático (Mathematical Knowledge) perteneciente al modelo MTSK, y el enfoque desde el cual se analizará será el interpretativo, utilizando métodos cualitativos. Además, se analizará la gestión de la participación y las oportunidades de aprendizaje que promueve la maestra en su aula. Los análisis se realizarán con ayuda de instrumentos extraídos del proyecto METE (Mathematics Education Traditions of Europe) para analizar las oportunidades de aprendizaje, del modelo MTSK para estudiar el conocimiento matemático, y de un instrumento extraído de Carrillo, Climent, Gorgorió, Prat y Rojas (2008) para analizar la gestión de la participación.

Palabras clave:

Oportunidades de aprendizaje, MTSK, dominio matemático, educación infantil, gestión de la participación.

Martín, J.P. y Carrillo, J. (2017). Las oportunidades de aprendizaje y el dominio de conocimiento matemático del mtsk en educación infantil. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 97-101). Huelva: CGSE.

1. Introducción

El aprendizaje de las matemáticas está condicionado por una serie de factores que a veces dificultan la construcción de conocimientos por parte del alumnado. Entre estos factores se encuentran el conocimiento del profesor y la gestión en el aula, por parte de este, del aprendizaje matemático de sus alumnos. Estos factores son objeto de interés actualmente.

El foco de interés de esta investigación es buscar conexiones entre el conocimiento profesional específico del profesor de matemáticas, teniendo en cuenta la gestión de la participación, y las oportunidades de aprendizaje (en adelante, OTL) que el profesor ofrece durante en el aula. Se busca, por tanto, detectar e identificar atributos del conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas que se manifiestan en los docentes a partir de sus acciones en el aula.

2. Marco teórico y metodología

La investigación que se presenta busca comprender de manera profunda el conocimiento matemático que desempeña una maestra en un aula de infantil de 5 años. Las actividades planteadas han sido elaboradas por un grupo de maestros/as, profesores universitarios y alumnos en formación de la Universidad de Huelva. Concretamente, la actividad analizada consistirá en repartir 26 cubos en grupos de tres, en asamblea, y en partes iguales.

Se trata de un estudio de caso ex post facto, ya que no se modifica el fenómeno u objeto de análisis. Además, se emplearán métodos cualitativos dentro de un paradigma interpretativo, ya que el objetivo consiste en describir, comprender e interpretar el conocimiento matemático de una maestra. Para ello, se recogerá la información a través de la observación de aula con ayuda de grabaciones de audio y video de las sesiones.

Esta investigación tratará de interpretar y conocer el conocimiento matemático que pone en uso esta docente en su aula. Para ello, se utilizará como guía el modelo *MTSK*, más concretamente el dominio matemático (*MK*) y su subdominio *KoT (conocimiento de los temas)*. Las categorías pertenecientes al *KoT* (Carrillo et al, 2014) son: *fenomenología* (conocimiento acerca de modelos atribuibles a un tema), *propiedades y sus fundamentos* (relativos a un tema o procedimiento), *registros de representación* (distintas formas en que se puede representar el tema en cuestión), *procedimientos* (conocimiento de algoritmos convencionales y alternativos), y *definiciones* (conjunto de propiedades que hacen definible a un objeto).

Por su parte, según Floden (2002), al caracterizar las OTL, se suele recurrir a la siguiente cita: “*si los estudiantes habían tenido o no la oportunidad de aprender un tópico determinado o habían estudiado cómo resolver un tipo particular de problema presentado en el test”(Husen, 1967a, pp. 162-163, citado en Burstein, 1993).*

Para analizar las oportunidades de aprendizaje que ofrece la maestra, se utilizará un instrumento de análisis procedente del Proyecto METE (2005). Se tomará de este instrumento el *foco matemático*, que contiene las siguientes categorías: *Conceptual*: promueve desarrollo conceptual; *mecánico*: promueve la adquisición de destrezas, procedimientos, técnicas o algoritmos; *estructural*: promueve las conexiones entre diferentes entes matemáticos; *derivational*: desarrollo de nuevos entes matemáticos a partir del conocimiento existente; *eficiencia*: elegancia o la comparación crítica del trabajo; *resolución de problemas*: la solución de tareas no triviales; *razonamiento*: justificaciones y argumentaciones.

Por último, en relación con la gestión de la participación, se utilizarán las dimensiones extraídas de Carrillo (2008). En primer lugar, la *responsabilización del aprendizaje* puede ser: *transmisión* (alumno es receptor); *cesión de la responsabilidad* (el alumno es protagonista); y *corresponsabilización* (los alumnos se cuestionan y responden entre sí conjuntamente). La segunda dimensión establecida es la *comunicación promovida*, pudiendo ser *unidireccional*, *contributiva*, *reflexiva* e *instructiva*, ordenadas de menor a mayor protagonismo por parte del alumnado. Por último, la *validación del conocimiento*, pudiendo recaer en el *profesor*, en *profesor y alumnos* o en los propios *alumnos*.

3. Análisis de un episodio

Se muestra a continuación el análisis de uno de los episodios extraídos de las sesiones. Se ha seleccionado este episodio por su riqueza y por su variedad de información.

El episodio seleccionado ha sido extraído de la segunda sesión. En él, la maestra pretende afianzar en sus alumnos el conocimiento sobre la estructura de un problema y de las partes que lo componen a través de un feedback. Para ello, utiliza un papel continuo donde se expondrán dichas partes una vez resuelto el problema. La actividad a realizar consistirá en el reparto equitativo en 3 partes iguales de 26 cubos de madera. De esta manera, la maestra enfatiza durante todo el episodio el *foco de resolución* de problemas en los alumnos, ya que intenta con esta explicación que los alumnos comprendan de manera general la estructura del problema (parte inicial, parte de “acción” y parte final o resultado).

A lo largo de este episodio la docente agrupa a su alumnado en forma de asamblea, con el objetivo de facilitar a estos la participación en la actividad. A la hora de presentarla y exponer qué se va a hacer, la maestra promueve el *foco mecánico* ya que en varias ocasiones lanza preguntas a los alumnos tales como: “¿en qué consistía la actividad?”, o “¿qué teníamos que hacer?”, aludiendo al proceso seguido durante la actividad del reparto de 26 cubos.

Además, la maestra también hace hincapié en el cociente y el resto de la división, donde se puede apreciar la relación con *KoT,* haciendo referencia a “qué tenemos” y “lo que sobra”, permitiéndole orientar la sesión y pidiendo a sus alumnos la exposición en el papel. A continuación, se muestra un fragmento donde se percibe ese conocimiento:

A la hora de repartir los 26 cubos, una alumna los ordena paralelamente en 2 columnas poniendo de manifiesto que falta 1 cubo para rellenar una columna o sobran 2 cubos de las dos columnas restantes:

Alumna: *Aquí falta un cubito.*

Maestra: *Pues no hay más y todos los equipos tienen que tener lo mismo.*

Alumna: ¿Y si quitamos estos dos de aquí para que todos los equipos tengan lo mismo? (haciendo referencia a los dos cubos que sobresalen).

Por otro lado, aparece el *foco de explicación*, ya que a lo largo de todo el episodio, la maestra, con la ayuda del papel continuo y las aportaciones de los alumnos, explica las partes del problema.

Durante el desarrollo del feedback, la docente ofrece a los alumnos la oportunidad para que comprendan la estructura global de un problema, ayudando a sus alumnos a completar el papel continuo donde, previamente, la maestra lo ha dividido en tres columnas nombradas como: "¿qué teníamos?", "¿qué hemos hecho?", y "¿cuál es el resultado?", aludiendo a los datos, resolución y resultado del problema (*foco de resolución de problemas*). Asimismo, la maestra pone de manifiesto su *KPM* (subdominio del conocimiento de la práctica matemática, entendida como la sintaxis de la construcción del conocimiento matemático) al establecer las partes en las que se divide el problema: *datos, resolución y resultado*.

Maestra: *¿Qué teníamos al principio, cuantos cubos ha sacado la seño de la caja?*

Alumnos/as: *26 cubos.*

Maestra: *Vamos a ponerlo aquí (papel continuo).*

Maestra: *Y ¿qué teníamos que hacer con los 26 cubos?*

Alumna: *Repartirlo a los 3 equipos.*

Finalmente, a la hora de trabajar la columna de "¿qué hemos hecho?", es decir, la resolución del problema, la maestra expone la estrategia utilizada por una alumna que resultó definitiva para resolverlo, que consistió en ir formando filas de elementos en cada uno de los grupos para comprobar que todos los grupos tienen la misma longitud.

Maestra: *Y, ¿qué hemos hecho?... De uno en uno, de dos en dos... y no nos salía. ¿Y cómo lo hemos resuelto?*

Alumna: *Lo hemos puesto en fila.*

El foco utilizado por la docente resulta el *foco mecánico y de eficiencia*, ya que la maestra pone el énfasis en una estrategia en concreto que considera adecuada para la resolución de este problema (poner en fila los cubos). Esta oportunidad de aprendizaje se produce en un ambiente en el que la *responsabilidad del aprendizaje recae mayormente en los alumnos* ya que la docente, al principio de la actividad, no interviene y permite a sus alumnos tantear el material. La comunicación promovida es *contributiva*, ya que los alumnos exponen y discuten sus ideas con respecto al proceso de resolución del problema.

4. Conclusiones

Se pueden apreciar fragmentos de conocimiento matemático, sobre todo en el *KoT (conocimiento de los temas)* y el *KPM (conocimiento de la práctica matemática),* por ejemplo, a la hora de ejemplificar y establecer las partes en las que se puede dividir un problema y el dominio del concepto de reparto.

Por otro lado, en cuanto a las oportunidades de aprendizaje (OTL) promovidas, la docente utiliza su conocimiento sobre ellas para aprovechar y favorecer el aprendizaje de sus alumnos. Por ejemplo, durante la exposición de reproducciones de los alumnos, favoreciendo la explicación de las partes de un problema o destacando las estrategias más adecuadas a la hora de resolver un problema.

De manera general, se puede decir que la docente cuenta con un perfil que promueve las oportunidades de aprendizaje del alumnado, actúa como guía de conocimiento y no se ciñe al libro de texto a la hora de impartir sus sesiones, sino que aprovecha cada momento para crear una situación novedosa que favorezca la adquisición de nuevos conocimientos.

Referencias

Andrews, P., Carrillo, J. y Climent, N. (2005). Proyecto “METE” (Mathematics Education Traditions of Europe): el foco matemático. En Maz, A., Gómez, B., y Torralbo, M. (Eds.), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 131-138). Córdoba: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Carrillo, J., Climent, N., Gorgorió, N., Prat, M., y Rojas, F. (2008). Análisis de secuencias de aprendizaje matemático desde la perspectiva de la gestión de la participación. *Enseñanza de las Ciencias*, *26*(1), 67-76.

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., y Montes, M.A. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Materiales para la docencia*. Huelva: Servicio de Publicaciones Universidad de Huelva.

Floden, R. (2002). The measurement of opportunity to learn. En. A. Porter y A. Gamoran (Eds.), *Methodological advances in cross-national surveys of education achievement* (pp. 231-266). Washington, DC, USA: National Academies Press.

Schmidt, W. y McKnight, C. (1995). Surveying educational opportunity in mathematics and science: an international perspective. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *17* (3), 337-353.

5

UNA PROPUESTA COLABORATIVA PARA ENRIQUECER LA FORMACIÓN MATEMÁTICA INICIAL Y CONTINUA DE MAESTROS DE INFANTIL

Ramírez, M.
Joglar, N.
Muñoz-Catalán, M.C.

Resumen

En este trabajo presentamos los resultados de una experiencia realizada conjuntamente por maestros en activo, estudiantes para maestro y formadores-investigadores, en el área de didáctica de las matemáticas en Educación Infantil, con el objetivo inicial de enriquecer la formación de los maestros implicados, conectando la formación con la práctica profesional. El objetivo principal es identificar el conocimiento especializado movilizado por las maestras en formación inicial y continua en el diseño, el análisis y la implementación de una tarea, así como en la reflexión sobre su propia práctica. Impulsados por el interés de promover la flexibilidad matemática de los alumnos a través del uso y conversiones entre distintos modos de representación, el trabajo se desarrolla sobre una actividad en la que se tratan aspectos del número. Se utiliza el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) sobre las sesiones de trabajo.

Palabra clave:

Formación maestros, Educación Infantil, flexibilidad matemática, representaciones, descomposiciones aditivas

Ramírez, M., Joglar, N. y Muñoz-Catalán, M.C. (2017). Una propuesta colaborativa para enriquecer la formación matemática inicial y continua de maestros de infantil. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 102-107). Huelva: CGSE.

1. Marco teórico

El marco teórico de la investigación aquí descrita se sitúa en la intersección de dos dominios. Por un lado, se han considerado investigaciones sobre el tratamiento de la comparación, descomposición y la representación de cantidades en Educación Infantil (Alsina y Llach, 2012), especialmente aquellas que enfatizan el uso de diferentes modos de representación en la línea descrita por Lesh (1997). Dado que estamos dirigiendo las actividades a niños de Educación Infantil, los modos de representación que tendrán más peso en nuestro diseño serán el manipulativo, el verbal y el gráfico-icónico, utilizado por ejemplo en las configuraciones puntuales de los dados. Dentro del sistema de representación gráfico-icónico, se tratará de favorecer el desarrollo de la "flexibilidad matemática" en los alumnos (seguiremos la definición de flexibilidad matemática dada por Star y Rittle-Johnson, 2009). En segundo lugar, se ha elegido el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas MTSK (*Mathematics Teacher Specialized Knowledge)*, para articular los análisis sobre el conocimiento sobre las actuaciones de los profesores, noveles y expertos, en las diferentes fases del proceso: planificación, acción y reflexión (Carrillo et al., 2013).

2. Desarrollo de la experiencia y metodología

La experiencia realizada consiste en una secuencia cíclica de fases de planificación, instrucción y reflexión (Figura 1), en la que participan estudiantes para maestro (EPM), sus formadoras y maestros en activo, con el objetivo de que los EPM aprendan a analizar y mejorar una secuencia de enseñanza sobre un contenido matemático concreto, trabajando a partir de una actividad basada en el juego del Tetris[1].

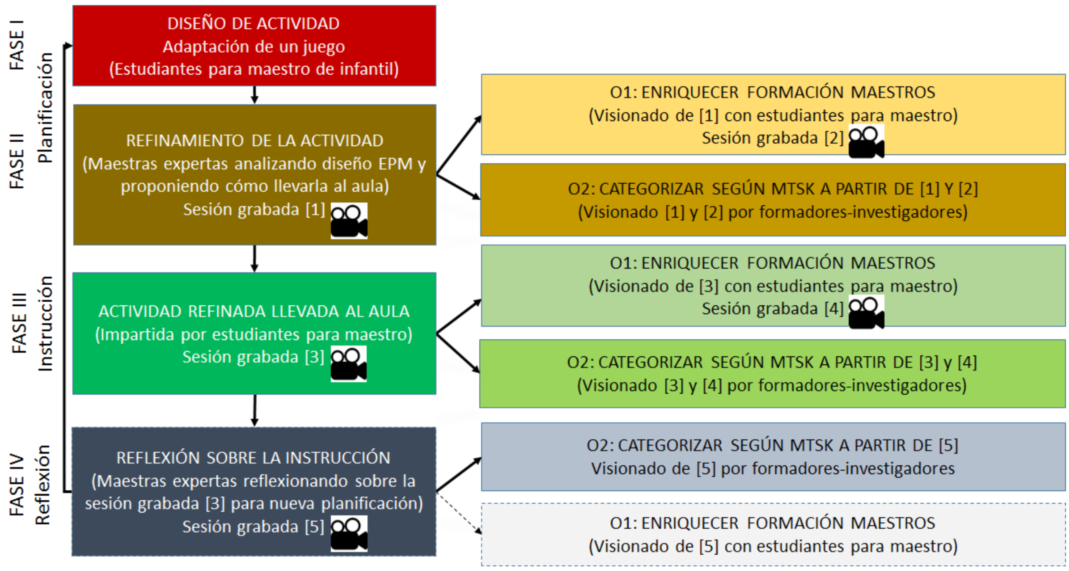


Figura 1. Fases y objetivos de la experiencia

1 Se puede ver este juego en blog de Elisa Hernández: http://www.aprendiendoeninfantil.com/2016/10/os-gustaba-jugar-al-tetris.html)

Las sesiones de las distintas fases se graban en vídeo para su posterior visionado con dos objetivos: por un lado, enriquecer la formación de los maestros, ya sean estudiantes para maestro o maestras expertas y, por otro lado, permitir a las formadoras-investigadoras categorizar según el modelo MTSK el conocimiento especializado de los maestros puesto en juego en cada momento del ciclo. En las Tablas 1, 2, 3 y 4 se pueden consultar las distintas cuestiones que se plantean en las sesiones de las distintas fases (planificación, instrucción y reflexión).

La fase de planificación se inicia con la realización de una actividad en la asignatura "Desarrollo de Pensamiento Matemático y su Didáctica I" en segundo curso del Grado de Maestro de Educación Infantil en la UCM. Los EPM deben adaptar un juego con contenido numérico y geométrico para el aula de 3, 4 y 5 años.

Tras el diseño, las formadoras-investigadoras revisan las propuestas de los estudiantes de Grado, valorando la adecuación a la edad de los alumnos de infantil, las variables didácticas consideradas, la flexibilidad matemática que se promueve y el lenguaje movilizado, con el objetivo de elegir tres para la siguiente fase. A continuación, los maestros en ejercicio de dos centros diferentes llevan a cabo la evaluación y refinamiento de esas tres propuestas para llevarlas al aula (Tabla 2).

En la fase de instrucción (Tabla 3), los estudiantes para maestro en prácticas llevan al aula la actividad en los dos centros, con las modificaciones propuestas por los maestros expertos sobre la propuesta inicial de los estudiantes en la sesión de planificación. Estas sesiones en el aula se graban en vídeo [3] y su visionado permite, por un lado, a las formadoras-investigadoras hacer unos análisis previos de los conocimientos movilizados por las futuras maestras en el aula revisando los vídeos y, por otro lado, a los EPM reflexionar sobre su propia práctica, ayudándoles a conocer los procesos de enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático concreto.

El visionado del vídeo [3] puede utilizarse también para realizar una fase de reflexión sobre la mejora de la instrucción planteando preguntas a maestros expertos como las que aparecen en la Tabla 4. Al igual que las dos fases anteriores, esta sesión de reflexión se graba en vídeo [5], con el objetivo de permitir a las formadoras-investigadoras ver despacio la sesión para seguir describiendo el conocimiento matemático y didáctico-matemático evidenciado en la actuación del maestro. En el momento de la redacción de esta comunicación, se está valorando realizar el visionado con maestros en formación para enriquecer sus conocimientos sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos.

Tabla 1. Descripción de parte 1 de la Fase de Planificación: Diseño de actividad

Fase	Perfil involucrado	Preguntas planteadas a los estudiantes para maestro	Preguntas que se plantean las formadoras-investigadoras
Planificación	EPM	Diseñar y construir tres adaptaciones para 3, 4 y 5 años del Tetris. • Identificar los contenidos matemáticos trabajados. • Identificar los aspectos para adecuar a cada edad. • Describir cómo llevar la actividad a cada aula.	¿Qué conocimientos matemáticos especializados ponen en juego los EPM al hacer esos diseños? [Evidencias solo a partir de sus respuestas, no entrevistas en ese momento.]
DISEÑO DE ACTIVIDAD			**EN LA EVALUACIÓN DE LOS TRABAJOS**

Tabla 2. Descripción de la parte 2 de la Fase de Planificación: Refinamiento de la actividad

Fase	Perfil involucrado	Preguntas planteadas a los maestros sobre las actividades presentadas	Preguntas planteadas a otros maestros en formación (inicial o continua)	Preguntas que se plantean las formadoras-investigadoras
Planificación	Maestras en activo	¿Qué os parece el juego? ¿En qué consiste? ¿Qué contenidos matemáticos trabajan? ¿Creéis que se puede adaptar a 3, 4, y 5 años? ¿Qué os parecen estas tres adaptaciones de los estudiantes para maestro?	¿Qué contenidos matemáticos se trabajan en la tarea del video? ¿Cómo pretenden conseguir el aprendizaje de esos contenidos en los niños? ¿Qué similitudes y qué diferencias observáis en los comentarios de los distintos maestros que participan en la discusión?	¿Qué conocimientos ponen en juego para hacer esos comentarios los maestros que participan? ¿Qué similitudes y diferencias existen entre los conocimientos de las maestras expertas, los estudiantes y las formadoras-investigadoras?
REFINAMIENTO DE LA ACTIVIDAD (GRABACIÓN EN VIDEO [1])			**VISIONADO DEL VÍDEO [1] POR ESTUDIANTES (GRABACIÓN EN VIDEO [2])**	**VISIONADO DE LOS VIDEOS [1] y [2] POR LAS FORMADORAS INVESTIGADORAS**

Tabla 3. Descripción de la Fase de Instrucción

Fase	Perfil involucrado	Preguntas planteadas a otros maestros en formación	Preguntas que se plantean las formadoras-investigadoras
Instrucción	Maestras y/o estudiantes	<u>Respecto a las respuestas de los niños:</u> ¿Qué estrategia ha utilizado para responder? ¿Qué puedes decir de su aprendizaje/de su comprensión a partir de su respuesta? ¿Cómo ha podido afectar la consigna del profesor en la respuesta del alumno? <u>Respecto al papel del profesor:</u> ¿Cómo ha planteado el profesor la tarea? ¿En qué momentos el profesor escucha, reflexiona rápidamente y responde a la respuesta del alumno? ¿Cómo responde el profesor? ¿Por qué piensas que ha dado esa respuesta al alumno?	¿Qué conocimientos muestra el profesor en las consignas y explicaciones a los alumnos? ¿Qué conocimientos ponen en juego para hacer esos comentarios los maestros que participan? ¿Qué similitudes y diferencias existen entre los conocimientos de las maestras expertas, los estudiantes y las formadoras-investigadoras?
ACTIVIDAD REFINADA LLEVADA AL AULA (Sesión grabada [3])		**VISIONADO DEL VÍDEO [3] POR ESTUDIANTES (Sesión grabada [4])**	**VISIONADO DE LOS VÍDEOS [3] y [4] POR LAS FORMADORAS INVESTIGADORAS**

Tabla 4. Descripción de la Fase de Reflexión

Fase	Perfil involucrado	Preguntas planteadas a otros maestros en formación (inicial o continua), o incluso con el maestro protagonista	Preguntas que se plantean las formadoras-investigadoras
Reflexión	Maestra expertas	<u>Respecto a la reflexión sobre la mejora de la instrucción</u> ¿Qué aspectos positivos se deben conservar para el rediseño de la lección? ¿Qué dificultades se han producido y cómo evitarlas para la próxima puesta en práctica?	¿Qué conocimientos modifica el profesor tras reflexionar sobre el visionado del video de la lección? ¿Qué evidencias han provocado esos cambios en sus conocimientos?
REFLEXIÓN SOBRE LA INSTRUCCIÓN PARA NUEVA PLANIFICACIÓN		**VISIONADO DEL VÍDEO [3] POR MAESTROS EXPERTOS (Sesión grabada [5])**	**VISIONADO DEL VÍDEO [5] POR LAS FORMADORAS INVESTIGADORAS**

3. Discusión de primeros resultados y trabajo futuro

A pesar de que el trabajo aquí descrito todavía se encuentra en un estado preliminar, adelantamos una primera discusión de los resultados del análisis de la segunda parte de la Fase de Planificación en la que las maestras refinan el diseño de las EPM.

Respecto a conocimientos relacionados con el contenido matemático, a pesar de que el juego planteado a partir del Tetris tiene muchas soluciones, muchos EPM entregaban los trabajos planteando una solución única. Las maestras en ejercicio detectaron rápidamente este aspecto: "En este juego no puede haber una solución, tiene que haber muchas más opciones para poder combinar... Esta tiene más movimiento que ésta... posibilidades de los niños, me refiero aquí hay muy pocas posibilidades de que todos los niños puedan jugar, se acaba antes la figura y deben jugar por lo menos dos veces cada niño...". En general, las maestras en ejercicio reconocen la resolución del juego, identificando posibles soluciones (KoT, KPM). También han identificado estrategias de resolución de distinto nivel de dificultad dependiendo del número de cuadrados y forma del contorno del tablero (KoT). Además, en sus discusiones sobre cómo enriquecer matemáticamente la actividad, se muestran conscientes de la importancia del uso de distintas formas de representación de un objeto matemático y de la relevancia de las conversiones entre ellas usando el lenguaje verbal y gestual (KoT y KPM).

Respecto al conocimiento didáctico del contenido, las maestras en ejercicio identificaron todos los contenidos trabajados en la actividad y también identificaron aspectos sobre las cantidades y las formas de las fichas y el tablero para graduar la tarea: "para tres años y primer trimestre de cuatro las plantillas deberían ser más sencillas, como por ejemplo cuadros, rectángulos, que no tienen los recovecos éstos y cantidades más pequeñas... para cuatro años ir complicando las figuras" (KFLM, KMT, KMLS). Las maestras manifestaron la necesidad de hacer un trabajo previo para trabajar las distintas configuraciones de las fichas del juego usando diferentes representaciones para la construcción de los dados y las fichas de forma adecuada para cada edad, haciendo hincapié en la importancia del uso del lenguaje para facilitar las conversiones entre sistemas de representación. En sus propuestas, las maestras incluyen diseños de tareas que enriquecen las competencias matemáticas: los niños formulan, representan con distintos materiales, construyen sus propias estrategias (KFLM, KMT).

Referencias

Alsina, A. y Llach, S. (2012). La enseñanza de los sistemas externos de representación matemáticos y lingüísticos en la educación infantil. *Revista de Investigación Educativa, 30*(1), 131-144.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Carrillo, J, Contreras, L. C., Climent, N, Montes, M. A., Escudero D. I. y Flores, E. (Eds.). (2016). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros de Educación Primaria*. España. Ediciones Paraninfo S. A.

Lesh, R. (1997). Matematización: la necesidad "real" de la fluidez en las representaciones. *Enseñanza de las Ciencias, 15*(3), 377-391.

Star, J. R., y Rittle-Johnson, B. (2009). Making algebra work: Instructional strategies that deepen student understanding, within and between algebraic representations. *ERS Spectrum, 27* (2), 11-18.

6 ANÁLISIS DEL DISCURSO COMO HERRAMIENTA PARA CARACTERIZAR EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

González-Regaña, A.
Gavilán-Izquierdo, J.M.
Toscano-Barragán, R.
Martín-Molina, V.
Fernández-León, A.

Resumen

En este trabajo proponemos articular conjuntamente el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) y la perspectiva comognitiva. El análisis de los datos se realiza en dos fases: una primera donde se identifican las características discursivas de la perspectiva comognitiva y una segunda en la que se identifican los subdominios del MTSK. Los resultados muestran que es posible usar la perspectiva comognitiva como herramienta para identificar los subdominios del MTSK.

Palabras clave:

Aprendizaje, articulación de teorías, conocimiento especializado del profesor de matemáticas, discurso, marco comognitivo.

González-Regaña, A., Gavilán-izquierdo, J.M., Toscano-Barragán, R., Martín-Molina y V. Fernández-León, A.(2017). Análisis del discurso como herramienta para caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 108-113). Huelva: CGSE.

1. Introducción

En este trabajo hacemos una propuesta de articulación de dos perspectivas teóricas, una de naturaleza sociocultural sobre el discurso, la perspectiva comognitiva (Sfard, 2008), y otra sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, el modelo MTSK (Muñoz-Catalán et al., 2015). Sfard (2008) considera que las matemáticas son un tipo de discurso, luego estudiar el conocimiento del profesor de matemáticas puede hacerse mediante un estudio de su discurso.

Un precedente de esta propuesta lo encontramos en Cooper (2014), que plantea considerar conjuntamente el modelo de conocimiento del profesor de Ball, Thames y Phelps (2008), MKT por sus siglas en inglés, y la perspectiva comognitiva de Sfard (2008), dando lugar al "mathematical discourse for teaching", que resalta el carácter discursivo del conocimiento.

2. Marco Conceptual

A continuación describimos brevemente el marco teórico comognitivo de Anna Sfard (2008) y el modelo MTSK (Muñoz-Catalán et al., 2015) que nos han servido para enmarcar nuestro estudio.

2.1 Marco comognitivo

El marco teórico comognitivo de Sfard (2008) considera que el aprendizaje matemático es un cambio en el discurso matemático, el cual está definido a través de cuatro características: uso de palabras (el vocabulario matemático y el cotidiano usado con significado matemático), mediadores visuales (diagramas, símbolos, objetos físicos, etc.), narrativas (definiciones, teoremas, pruebas, etc.), y rutinas (patrones característicos del discurso matemático, como definir, conjeturar, probar, estimar, etc.) con sus metarreglas asociadas (el cómo y el cuándo de la rutina).

Por otro lado, queremos destacar aquí la relevancia que la autora da en su teoría al denominado conflicto comognitivo, definido como el fenómeno que ocurre cuando narrativas aparentemente en conflicto surgen de diferentes discursos (Sfard, 2008). Otras de las nociones importantes dentro del marco comognitivo son las reglas del discurso, entre las que se distinguen reglas a nivel objeto y reglas a nivel meta. Las reglas a nivel objeto son definidas como narrativas acerca de las regularidades en el comportamiento de los objetos (Sfard 2008), mientras que las reglas a nivel meta definen patrones en la actividad de los participantes en el discurso tratando de producir y justificar narrativas a nivel objeto. Desde esta perspectiva, Sfard (2008) distingue entre aprendizaje a nivel objeto (crecimiento en el número y complejidad de las narrativas y rutinas y aprendizaje a nivel meta (que se manifiesta en el cambio de las metarreglas del discurso).

2.2 Modelo MTSK

El modelo MTSK (Muñoz-Catalán et al., 2015) caracteriza el conocimiento especializado del profesor de matemáticas a través de seis subdominios, tres de ellos para el dominio del conocimiento matemático y tres para el dominio del conocimiento didáctico del contenido. Dentro del primer dominio se considera el Conocimiento de los Temas (KoT), donde se incluyen "aquellos aspectos de los conceptos que permiten relacionarlos con contextos reales o con el propio contenido matemático en forma de ejemplos" (Muñoz-Catalán et al., 2015, p. 596); el Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM), que incluye las relaciones entre diferentes conceptos y estructuras matemáticas; y el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM), que abarca los procesos de construcción de conocimiento matemático. Dentro del segundo dominio se considera el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), caracterizado por el conocimiento de diferentes "vías, recursos y formas de enseñar matemáticas" (Muñoz-Catalán et al., 2015, p. 597); el Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM), que incluye el conocimiento sobre cómo aprenden y piensan los estudiantes los contenidos matemáticos; y el Conocimiento de los Estándares del Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS), que considera el conocimiento que un profesor puede tener del currículo y los estándares oficiales.

3. Metodología

Este estudio forma parte de otro más amplio acerca del proceso de definir en el que se estudia el discurso de varios grupos de alumnos del Grado en Educación Primaria y del Máster en Educación Secundaria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (MAES).

Con el fin de llevar a cabo la articulación del marco comognitivo y el modelo MTSK, hemos realizado primero un análisis del discurso desde la perspectiva comognitiva y, posteriormente, lo hemos usado para identificar qué subdominios del MTSK aparecen. Concretamente, para ejemplificar la articulación propuesta, nos centraremos en este trabajo en un grupo de cuatro alumnos del Grado en Educación Primaria cuando resuelven una tarea sobre propiedades y definiciones de poliedros.

Los datos utilizados en este trabajo son las transcripciones del diálogo entre los alumnos del grupo (A1, A2, A3, A4) cuando resuelven la tarea y las respuestas escritas a la tarea que fueron finalmente consensuadas por el grupo.

El análisis se lleva a cabo en dos fases:

- Primera fase: se identifican características del discurso según la perspectiva cosmognitiva (palabras y sus usos, mediadores visuales, narrativas asumidas y rutinas).

- Segunda fase: se identifican los subdominios del MTSK que se ponen de manifiesto en el discurso de los futuros profesores.

4. Resultados

A continuación mostramos el proceso seguido, utilizando transcripciones de los comentarios de los futuros profesores para ejemplificar tanto el análisis realizado como algunos resultados.

En primer lugar, mostramos qué responden cuando se les pide que describan las características de un cubo que se les proporciona en un dibujo en papel.

Transcripciones del discurso de los alumnos	Identificación de las características del discurso matemático	Evidencias de conocimiento de los diferentes subdominios
A2: Es un cubo con 6 caras y 8 vértices A1: y 12 aristas, ¿no? A2: No me acuerdo ni de qué eran las aristas... A4: que une un vértice con otro, ¿no? A1: Sí. [...] A3: 6 caras, 8 vértices, 12 aristas...	Narrativas a nivel objeto sobre el número de caras, vértices y aristas de un cuerpo geométrico.	Los futuros profesores muestran un conocimiento (o desconocimiento, en el caso del alumno A2) del subdominio KoT.
A3: y, ¿cuántos ángulos rectos? 1, 2, 3, 4... A4: Son 3 x4, ¿no? A3: Sí. A4: Son todos rectos... son poliédricos.	Rutina (a nivel objeto) de contar que se repite múltiples veces para contar número de caras, vértices, aristas, ángulos y diagonales.	En el conteo de ángulos, los futuros profesores muestran una carencia de KoT sobre qué constituye un ángulo en un poliedro.

Tabla 1. Datos y análisis de las respuestas de los estudiantes cuando se les pide describir las características de un cubo

Cuando se les pide a los futuros profesores que definan un cubo, obtenemos lo siguiente:

Transcripciones del discurso de los alumnos	Identificación de las características del discurso matemático	Evidencias de conocimiento de los diferentes subdominios
A3: Un cubo es… un cuerpo geométrico… [escribiendo] A1: que son todos prismas, porque están formados de varios polígonos. A4: Polígonos de 6 caras A3: de 6 caras… iguales [escribiendo] A1: de base cuadrangular A3: [repite mientras escribe] A4: Es un hexaedro, eso lo primero	Narrativas a nivel objeto sobre el número de caras y nombre de un cuerpo geométrico. En la línea 223, aparecen palabras matemáticas usadas de forma ambigua (“formada de varios polígonos”). En la línea 228 se muestra una narrativa que finalmente no fue asumida. Para definir, usan una rutina de etiquetar y de enumerar elementos y sus propiedades.	Los futuros profesores muestran carencias de conocimiento de los subdominios KoT y KPM, puesto que nombran características del cubo que son ciertas, pero tienen dificultades con el significado de definir.

Tabla 2. Datos y análisis de las respuestas de los estudiantes cuando se les pide definir un cubo

En los fragmentos mostrados, hemos usado las características del discurso para detectar carencias e conocimiento de los subdominios del modelo MTSK. En concreto, vemos en el primer fragmento que las narrativas nos sirven para identificar (falta de) conocimiento KoT y, en el segundo fragmento, el uso de palabras, las narrativas y las rutinas nos han mostrado una falta de KPM.

5. Conclusiones

En este trabajo se ejemplifica una posible articulación del marco comognitivo y el modelo MTSK, en el sentido de que el análisis del discurso nos ha proporcionado evidencias del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en los diferentes subdominios del mismo. En concreto, de los subdominios KoT (cuando los futuros profesores describen poliedros) y KPM (cuando definen poliedros).

Desde nuestro punto de vista, una aportación relevante de la articulación entre el marco comognitivo y el modelo MTSK es que nos permite “mirar” el discurso matemático para identificar el conocimiento especializado. Por tanto, puede aportarnos una manera de obtener indicadores del conocimiento del futuro profesor.

Referencias

Ball, D., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. doi:10.1177/0022487108324554

Cooper, J. (2014). Mathematical discourse for teaching: A discursive framework for analyzing professional development. En C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle, y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, (Vol. 2, pp. 337–344). Vancouver: PME.

Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. A., y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 18*(3), 589-605.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourse, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.

7

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO QUE LA OPORTUNIDAD EVOCA AL INVESTIGADOR: LOS ÁNGULOS EN LOS SÍMBOLOS INDO-ARÁBIGOS

Liñán, M.M.
Barrera, V.J.
Muñoz-Catalán, M.C.
Contreras, L.C.

Resumen

Al caracterizar el conocimiento especializado de una maestra cuando enseña Geometría en su aula de quinto de Primaria, y en el momento del inicio de las primeras transcripciones cotejadas con las notas de campo, se observó que no bastaba con mirar a la maestra para advertir la riqueza de conocimiento especializado sobre el que reflexionar. Desde el paradigma interpretativo, presentamos un estudio de caso como ejemplo que muestra cómo todos los elementos presentes en el aula (maestra, alumnos, libro de texto, materiales didácticos, etc.) pueden evocarnos conocimiento matemático especializado, más allá de las evidencias e indicios.

Palabras clave:

MTSK, oportunidad para evocar conocimiento especializado,Educación Primaria, Geometría, progresiones aritméticas.

Liñán, M.M., Barrera, V.J., Muñoz-Catalán, M.C. y Contreras, L.C. (2017). El conocimiento especializado que la oportunidad evoca al investigador: los ángulos en los sínbolos indo-arábigos. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 114-118). Huelva: CGSE.

1. Introducción

Nuestro interés se centra en aquello que nos permite aprender de la observación y análisis del conocimiento puesto en juego en el aula, lo que implica al profesor, a los alumnos y a los diferentes medios que el grupo utiliza en el proceso deenseñanza-aprendizaje; es decir, todo aquello que posibilita a un investigador comprenderel conocimiento vinculado a la práctica de un profesor,aprovechando como fuente de datos para el análisis las situaciones que se dan en el aula miradas desdenuestra sensibilidad como matemáticos y como formadores de maestros. Esta nueva perspectiva nos permite tener en cuenta conocimientos que van más allá del currículum oficial vigente en cada momento, puesto que las diferentes situaciones que se presentan nos permiten utilizar nuestra sensibilidad teórica (Strauss y Corbin, 1994) para poner en discusión, ante la comunidad de investigación en el área, la bondad o no de llevar a la formación de maestros diferentes conocimientos que, en principio, podrían no parecer relacionados con los plasmados en el currículum.

Podemos ver un claro ejemplo de esta situación en Barrera, Liñán, Muñoz-Catalán y Contreras (2016) o en Liñán, Montes y Contreras (2013), donde se observa la riqueza que surge en el aula al tratar las posiciones relativas de las rectas y la definición de recta, semirrecta y segmento, respectivamente, donde emergen conocimientos sobre el contexto de dichas posiciones (plano o espacio), sobre el papel de las metáforas cognitivas (Lakoff y Núñez, 2000) cuando se tratan conceptos que no se pueden definir (Puig Adam, 1986), o sobre el infinito. Todos estos conocimientos que podrían no ser susceptibles de ser encontrados en la observación del profesor (evidencias e indicios), se convierten en un conocimiento especializado que las oportunidades evocan al investigador.

Nuestro fundamento teórico se apoya en el modelo analítico del *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (MTSK, en sus siglas en inglés) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2014; SIDM, 2016).

2. Diseño metodológico

Dado que adoptamos una posición relativista de la realidad, enmarcamos esta investigación en el paradigma interpretativo (Bassey, 1995). Los datos proceden de la observación de lo que ocurre en un aula de 5º de Primaria en la que una maestra con más de 30 años de experiencia enseña Geometría. Esto nos sitúa en el contexto general de un estudio de caso único (Bassey, 1999), porque estudiamos una singularidad en profundidad y en su entorno natural, e instrumental (Stake, 2005) ya que permitirá una mejor comprensión del conocimiento para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría de 5º de Primaria y avanzar en la caracterización de dicho conocimiento para la formación de maestros. El caso estará centrado en el análisis del MTSK en el aula observada, teniendo en cuenta todos los elementos que intervienen en ella. La observación, de naturaleza no participante, se ha registrado en vídeo y cuaderno de campo con el consentimiento de las partes durante los meses en los que la maestra impartió el contenido geométrico del curso. Para el análisis del conocimiento especializado movilizado por la maestra, nos hemos basado en la identificación de indicios y evidencias (Escudero-Ávila, 2015); como ya hemos dicho, hemos comprendido la importancia del resto de los actores presentes en el aula, por lo que hemos redefinido la oportunidad (Escudero-Ávila, *opus cit.*)como aquellos momentos o circunstancias que surgen en el aula a través de los diferentes agentes y que nos permiten, como investigadores, reflexionar sobre *el conocimiento especializado que nos evocan,* permitiéndonos además iniciar la reflexión sobre la caracterización del conocimiento especializado en Geometría para enseñar este contenido en Educación Primaria. Además de apoyarnos en nuestra sensibilidad teórica (Strauss y Corbin, 1994), hemos realizado una triangulación de expertos para proceder a la validación de los conocimientos derivados o provocados por esos otros actores intervinientes en el aula (Flick, 2007), procurando minimizar la posibilidad de sesgo (causado por el investigador) en los mismos.

3. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

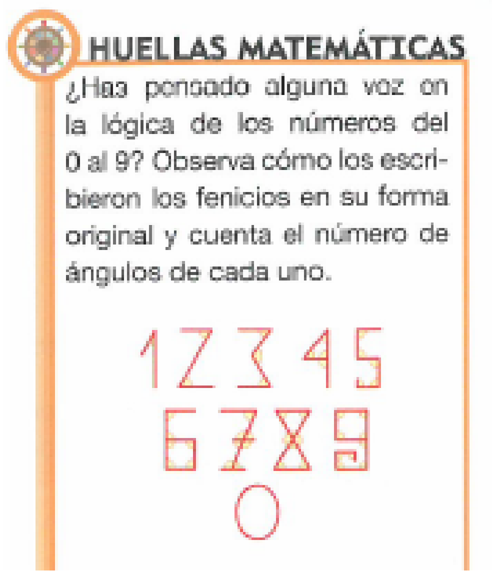


Figura 1 Actividad propuesta

La maestra le pide a un estudiante que lea la actividad que aparece en la figura 1.Es de destacar que esta explicación proviene de un bulo que se propagó en las redes sociales sin ninguna base histórica, como refleja en su investigación sobre la historia de las cifras Ifrah (1997). Este autor muestra la evolución de los símbolos indoarábigos que usamos hoy en día, en la que no tuvieron influencia alguna los fenicios. Sin embargo, gracias a esta lectura del libro de texto, a un alumno se le ocurre sumar del 1 al 9, el número de ángulos que tiene cada cifra según esta nota del libro, usando el algoritmo estándar y ordenando los números (1+2+3...); así, otra alumna se da cuenta de que hay una forma diferente de hacer la suma mucho más rápida y sin errores: propone, sin saberlo, el procedimiento para sumar una progresión aritmética, partiendo de los términos primero y último y del número de los mismos: *Pero 9+1=10, 8+2=10... todos suman diez y me sobran 5, 4 por 10 cuarenta, más cinco 45*. Los alumnos siguen discutiendo diferentes resultados (sin tener en cuenta la solución propuesta por su compañera), hasta que la maestra propone que los cuenten mentalmente: *mirad, la cuenta de la vieja, siempre ha existido. Contar 9 más 8 más 7....*La estudiante que lo ha resuelto observando el patrón, insiste:*Pero eso es más complicado. Siete y tres...*

Puesto que no observamos apenas indicios ni evidencias significativassobre el MTSK de la maestra en este caso, nos preguntamos qué MTSK requeriríalagestión de la clase atendiendo al descubrimiento de la alumna. Emergen varias oportunidades sobre las que valdría la pena incidir: reflexionar sobre el (para ellos) nuevo[1] procedimiento para sumar números que se diferencian en una cantidad constante (**KoT, procedimientos**), usando hechos numéricos (**KoT, propiedades y sus fundamentos**) o números figurales (**KoT, fenomenolo-**

[1] Para los estudiantes de esta clase, en este momento de su formación, lo es.

gía; KoT, registros de representación) como estrategia de resolución de problemas y uso de heurísticos (**KPM, procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas**), y obtener un nuevo resultado que sería la suma de elementos consecutivos de una progresión aritmética teniendo en cuenta su significado (**KoT, propiedades y sus fundamentos**).

Además, podríamos observar **conexiones de complejización (KSM),** puesto que se define implícitamente una progresión aritméticacon los 9 primeros números naturales (comenzando en el 1) y su suma evoca a su vez la suma de los n primeros términos de un progresión aritmética, lo que resultaría una generalización partiendo de un caso particular; surge, consecuentemente, una relación con **KoT (Definiciones, propiedades y sus fundamentos)** en dicho proceso de generalización (progresión aritmética y suma de sus elementos). Del mismo modo, se muestra una oportunidad sobre el razonamiento inductivo (**KPM, Formas de validación y demostración**),aumentando o reduciendo el número de sumandos, con la intención de generalizar.

Podríamos contemplar, asimismo, la oportunidad de plantear la estructura propuesta por Polya (1995) (**KPM, Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos**), procurando estructurar la solución de la cuestión planteada siguiendo las fases propuestas por este y comparando las diferentes estrategias formuladas por los estudiantes.

Finalmente, observamos también la oportunidad que brindaría conocer el uso de recursos materiales (**KMT, recursos materiales y virtuales**) para resolver de manera manipulativa el problema de la suma, como los números figurales o las regletas de Cuisenaire.

4. Coda

En el episodio descrito, disponemos de escasos indicios y evidencias sobre el MTSK de la maestra que nos permitan iniciar la caracterización de su conocimiento geométrico especializado. Sin embargo, distinto papel ha jugado para este fin el conjunto de los acontecimientos de la clase (oportunidades) por la variedad de elementos de conocimiento especializado evocados.Utilizar MTSK como modelo de análisis del conocimiento especializado del profesor de matemáticas no solo nos permite acceder al conocimiento que la maestra muestra en un aula a través de dichas evidencias e indicios, si no también reflexionar sobre el conocimiento especializado que nos evocan las oportunidades que surgen en la misma a través de los diferentes agentes que actúan en ella. En este caso,el error reflejado por el libro y la intervención de los alumnos han provocado la oportunidad de reflexionar sobre el MTSK emergente en la sesión relacionado con la suma de los n primeros números naturales que surge inesperadamente en el aula. Lo que en principio podría haber provocado un obstáculo de origen didáctico se podría erigir en una oportunidad interesante para el docente.

El análisis pormenorizado de los episodios de clase, centrado en el conocimiento matemático especializado observado en situaciones reales de práctica, nos puede proporcionar contenidos para la formación de maestros que emergen directamente de la problematización del conocimiento del profesor evidenciado en la acción.Esta sesiónes especialmente significativa, pues su riqueza para la formación de maestros no reside en el conocimiento especializado movilizado por la maestra (por la escasez de indicios y evidencias), sino en las oportunidades que surgen en su aula y en el conocimiento especializado que nos evocan.

Referencias

Barrera, V. J., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, C. y Contreras, L. C. (2016). Conocimiento especializado, movilizado y emergente, en una clase de primaria sobre las posiciones relativas de las rectas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 167-176). Málaga: SEIEM.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational setting.* Buckingham: Open University Press.

Bassey, M. (1995). *Creating Education Through Research*. Edimburgo: British Educational Research Association.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Escudero-Ávila, D. I. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria.* Tesis de doctorado inédita. Universidad de Huelva.

Flick, U. (2007). *An introduction to qualitative research (3rd edition).* Thousand Oaks: Sage Publications.

Ifrah, G. (1997). *Historia Universal de las Cifras*. Barcelona: Espasa Calpe.

Lakoff, G., y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York, NY: Basic Books.

Liñán, M.M., Montes, M.A. y Contreras, L.C. (2015). Conocimiento sobre la recta de una maestra de tercer ciclo de educación primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 335-342). Alicante: SEIEM.

Polya, G. (1995). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas

Puig Adam, P. (1986). *Curso de Geometría* Métrica I: Fundamentos. Madrid: Euler.

SIDM (2016). Documento interno sin publicar del Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Huelva.

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action.* New York: Basic Books.

Schön, D. A. (1987). *Educating the reflective practitioner*. San Francisco: Jossey-Bass.

Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. En N.K. Denzin y Y.S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research. Third edition* (pp. 443-166). Thousand Oaks: Sage Publications

Strauss, A. y Corbin, J. (1994). Grounded Theory Methodology. En N.K. Denzin y Y.S. Lincoln (Eds.) *Handbook of Qualitative Research* (pp. 217-285). Thousand Oaks: Sage Publications.

8 CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN LA ETAPA DE INFANTIL

Escudero-Domínguez, A.
Muñoz-Catalán, M.C.
Carrillo, J.

Resumen

En este trabajo mostramos algunos avances relevantes de una investigación que está en curso, en la que tratamos de comprender el conocimiento especializado de un maestro de Educación Infantil, utilizando el modelo analítico MTSK (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013). Para ello nos centramos en la primera clase del curso donde trabaja geometría con alumnos de 4 años, y en varias entrevistas llevadas a cabo. El objetivo de la sesión era retomar lo trabajado por los alumnos en el curso anterior sobre cuerpos geométricos, y seguir profundizando en sus características definitorias.Centramos los resultados en algunos aspectos significativos de los prismas, donde hemos identificado elementos de conocimiento de casi todos los subdominios, especialmente de KoT y de KMT.

Palabras clave:

Conocimiento especializado, Educación Infantil, MTSK, cuerpos geométricos, prismas

Escudero-Domíguez, A., Muñoz-Catalán, M.C. y Carrillo, J. (2017). MTSK: Conocimiento especializado para la enseñanza de la geometría en la etapa infantil. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 119-124). Huelva: CGSE.

1. Introducción

En la etapa de Educación Infantil es donde se asientan las bases para establecer conexiones con contenidos matemáticos futuros, por lo que consideramos importante el aprendizaje de la geometría desde las primeras edades, ya que estamos constantemente rodeados de ésta (Clements, 2004). Así, las deficiencias y errores presentes en la enseñanza pueden repercutir en su aprendizaje, lo que justifica un estudio más profundo que permita acercarnos al conocimiento matemático especializado de un maestro para la enseñanza de la geometría en la etapa de infantil, que es el objetivo del presente trabajo.

2. Marco teórico

Para el estudio de esta sesión adoptamos la mirada del MTSK (Carrillo *et al.*, 2013), modelo analítico de tipo descriptivo que nos permite otorgar una interpretación global del conocimiento especializado del maestro. Dentro del modelo existen dos grandes dominios de conocimiento: Conocimiento Matemático (MK) y Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). En MK se incluyen los subdominios de Conocimiento de los Temas Matemáticos (KoT), Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM) y Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM). Y en PCK se sitúa el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS). Dentro de cada subdominio existen una serie de categorías que tomaremos de la propuesta adoptada por el Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (SIDM, 2016).

3. Metodología

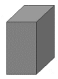
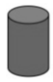
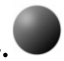
El diseño de investigación consiste en un estudio de caso instrumental (Stake, 2005). Nuestro informante es un maestro en activo, con más de diez años de experiencia en la etapa, comprometido con mejorar su enseñanza de las matemáticas.

Para responder a nuestro objetivo de investigación nos posicionamos en un paradigma interpretativo (Latorre, del Rincón y Arnal, 1997) donde intentamos poner de relieve la comprensión que logramos del conocimiento del maestro de la etapa sobre la enseñanza de la geometría. En este trabajo consideramos la primera sesión videograbada de una clase con alumnos de 4 años sobre el trabajo de cuerpos geométricos, centrándonos aquí en los prismas en particular, y en dos entrevistas relacionadas con dicha sesión. Adoptamos el *enfoque interpretativo* propuesto por Kvale (1996) y consideramos como elementos clave de análisis la identificación de evidencias, indicios y oportunidades (Flores-Medrano, 2015).

4. Primeros resultados

En este trabajo presentamos algunos de los aspectos que emergen como más relevantes del conocimiento especializado sobre los prismas en Educación Infantil. El objetivo de la sesión era observar qué recordaban del curso anterior y seguir profundizando sobre los cuerpos geométricos.

El docente comienza la clase presentando[1] en asamblea las siguientes piezas de madera:

Figuras 1. , 2. , 3. , 4.  y 5. 

Éste hace partícipe al alumnado en la construcción del conocimiento utilizando la capacidad de realizar preguntas para evocar su discernimiento. El maestro,anticipando que ante la pregunta de "¿Quién *me puede decir a mí qué era un cubo?*" van a responder en función del color (KFLM, fortalezas y dificultades), les invita a fijarse en otras cualidades, ya que éste pretende que los alumnos, además de reconocer los cuerpos geométricos, sean capaces de alcanzar propiedades de éstos.Tenemos indicios de que el docente piensa que en el aprendizaje geométrico (KFLM, teorías sobre aprendizaje) esto se interpreta en que hay que avanzar de la identificación de figuras (Nivel 1. Van Hiele) al análisis de las mismas (Nivel 2. Van Hiele) (Jaime y Gutiérrez, 1990), como se observa en una entrevista posterior: *"lo que me interesa es que de alguna forma les vaya sonando, no tanto que conozcan el nombre sino que sean capaces de analizar, que tengan espíritu crítico, digamos que lo que pretendemos es crear la base para que puedan ser capaces de discriminar un prisma; por ejemplo: que no rueda"*. En esta entrevista se evidencia su conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas en lo referente a su pretensión de que los alumnos sean capaces de dar propiedades de los cuerpos geométricos (KMLS, expectativas de aprendizaje).

El docentecomienza siempre las sesiones apoyándose en las piezas de madera, lo que pone de evidenciala importancia que concede al uso de material manipulativo (KMT, recursos materiales y virtuales), al ser consciente de que al alumnado les resulta más fácil dar propiedades de los cuerpos geométricos si tienen delante un objeto con dicha forma que si han de recurrir a su imagen mental. Después les pide el nombre y propiedades de éstas (traslación del material concreto al lenguaje hablado) y, para concluir clasifican en la ficha objetos de la vida cotidiana según su forma tridimensional, favoreciendo la traslación de situaciones reales al diagrama/dibujo (Lesh, Landau y Hamilton, 1983). Se evidencia que conoce distintos registros de representación de un tema (KoT, registros de representación), así como la importancia que le otorga a la utilización de distintos registros de representación y a las traslaciones entre ellos para la enseñanza (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

El material que posee en clase está compuesto por cubos, prismas de base triangular, prismas de base cuadrada, prismas de base rectangular,

1 Sin dar su nombre

cilindros y esferas. Observamos que al trabajar los prismas realiza una selección, quedándose solo con prismas de base cuadrada. Podemos decir que nos encontramos ante un caso de adaptación a la etapa, potenciado además por las limitaciones que poseen estas piezas de madera (prismas rectosno truncados),evidenciando así su conocimiento sobre el papel de las imágenes del concepto en el aprendizaje de los alumnos y las repercusiones que genera el manejo de un ejemplo prototípico (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Sin embargo, nos sorprende que utilice el prisma de base triangular como ejemplo de pirámide.

En una entrevista posterior donde le mostramos una caja con diversos cuerpos geométricos (Figura 6), el maestro reconoce que no recordaba que existían prismas con otras bases que no fueran cuadriláteros, lo que pone de relieve su conocimiento de las propiedades de los prismas (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos).

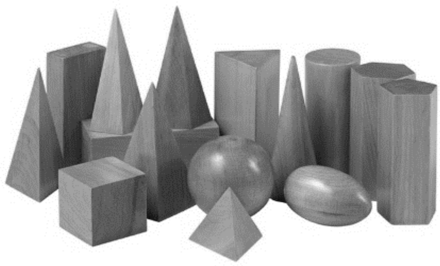


Figura 6. Material presentado al docente por el investigador

En el transcurso de la sesión contemplamos cómo el maestro trata de diferenciarcubo de prisma, asociando prisma con rectángulo y cubo con cuadrado. Se trata de su conocimiento sobre cómo adaptar estos conceptos a la etapa(KMT, teoría sobre enseñanza), ya que en una entrevista nos afirmó: *"el cubo es un prisma pero con todos sus lados iguales"* (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos), es decir, él conoce la definición inclusiva pero de cara a la enseñanza opta por una definición exclusiva (Jaime y Gutiérrez, 1990). Profundizando en las propiedades de éstos, pasa a comprobar, mediante su experimentación, el recuento del número de caras, vértices y aristas que posee cada cuerpo, mostrando indicios de su conocimiento de la práctica en lo referente a la demostración-comprobación mediante una prueba experimental (KPM, formas de validación y demostración). Esto lo lleva a cabo mediante la utilización de piezas de madera en las que por medio del uso de un rotulador y/o pegatinas contabiliza el número de caras, aristas y vértices de dichos cuerpos geométricos (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) para que los alumnos visualicen mejor el recuento de elementos del prisma, ya que el maestro conoce un procedimiento (KoT, procedimientos).

Al definir el concepto de prisma, siempre se apoya en una imagen del concepto (Turégano, 2006)tomando un objeto de la vida cotidiana o en el material manipulativo que lo ejemplifica (KoT, fenomenología y aplicaciones). Lo define así: "*aquel que tiene dos bases paralelas entre sí. Sus caras pueden ser dos rectángulos y dos cuadrados, o cuatro rectángulos...Bueno, cuatro no, son 6 caras las que tiene...Lo que he querido decir, que pueden te-*

ner eso, 4 y 2 o todas las caras rectangulares. También debo decir que tienen vértices y aristas y que no ruedan”, observando asícomo sus definiciones se caracterizan por ser una enumeración de propiedades, mostrando atributos críticos y no críticos de los prismas (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Enlazando con lo anterior, mostramos evidencias sobre conexiones como relaciones intraconceptuales (que forman parte del KoT) en lo referente al paso de los cuerpos geométricos a las figuras planas como parte de éstos. Esta unidad de información evidencia también su conocimiento de cómo es una definiciónmatemática (KPM, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones).

5. Conclusiones

Nuestra investigación pretende recabar información sobre el conocimiento especializado de un maestro en la etapa de Educación Infantil, concretamente sobre la enseñanza de la geometría. Este estudio nos ofrece la oportunidad de debatir la validez del modelo MTSK para esta etapa, ya que en su generación se han utilizado estudios realizados en otras etapas.Podemos avanzar que no prevemos que aparezcan nuevos subdominios pero sí que están emergiendo aspectos de conocimiento que son específicos del maestro de Infantil, mediante la modificación y/o creación de nuevas categorías. En este trabajo quedan reflejados casi todos los subdominios de MTSK, siendo KSM el único que no se ha manifestado al analizar esta sesión. Pensamos que la tarea de traducir y adaptar los conceptos matemáticos a la etapa debe exigir un peso importante en el subdominio KSM que, por ahora, no se está correspondiendo con lo identificado en el conocimiento del maestro, en el cual, sin embargo, parece evidenciarse un rico conocimiento de estrategias y teorías de enseñanza (KMT). Además de lo anterior, podemos indicar que su necesidad de adaptar a la etapa los conceptos (KMT), repercute en aspectos de su KoT (p.e.: en la definición), con lo que mostramos un adelanto de posibles relaciones entre subdominios que podrán aparecer en un futuro. Seguiremos indagando en las características diferenciadoras del conocimiento especializado de este profesional.

Referencias

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Clements, D.H. (2004). Major themes and recommendations. En D. H., Clements, J. Sarama y A.M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7-72). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK).* Tesis doctoral. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Kvale, S. (1996). *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing*. Thousand Oaks: Sage.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares y M. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar.

Latorre, A., del Rincón, D. y Arnal, J. (1997). *Bases Metodológicas de La Investigación Educativa*. Barcelona: Hurtado.

Lesh, R., Landau, M. y Hamilton, E. (1983). Conceptual models in applied mathematical problem solving research. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 263-343). NY: Academic Press.

Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (2016). *Categorías del modelo MTSK*. Documento interno. Huelva: SIDM.

Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. En N.K. Denzin, y Y.S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research* (3rd ed, pp. 443-466). Thousand Oaks: Sage Publications.

Turégano, P. (2006). Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula. *Ensayos, 21,* 35-48.

9 CONTRIBUCIÓN DEL MTSK EN LA ELABORACIÓN DEL PLAN DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMATICA

Quiroga, F.
Gamboa, M.

Resumen

Para actualizar el plan de formación inicial del profesor de matemática de la Universidad de Concepción se debió diseñar un elenco de competencias especializadas que definieran a este profesional. Luego de un trabajo colectivo, la reflexión respecto a fundamentos teóricos y al contexto educativo chileno, se logró elaborar un listado de actitudes distintivas y prácticas típicas del desempeño exitoso de un profesor de matemática. El uso del Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK)permitió resumir lo anterior en cuatro competencias especializadas para el nuevo plan de estudio. Se concluye que al insertar el MTSK en la discusión del grupo de rediseño fue posible construir las competencias, y además justificar teóricamente los énfasis que el equipo quiso dar al nuevo plan en *las competencias y posteriormente en la generación de resultados de aprendizaje y asignaturas.*

Palabras clave:

Formación de profesores, matemática, MTSK.

Quiroga, F. y Gamboa, M. (2017). Contribución del MTSK en la elaboración del plan de formación de profesores de matematica. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 125-130). Huelva: CGSE.

1. Introducción: Contexto de la formación de profesores de matemática en Chile

En el año 1998 se diseña la carrera de Pedagogía en Matemática y Computación a través de un Proyecto FFID[1], dentro del cual se planteaba el objetivo de "Desarrollar y validar una nueva estructura académico-formativa en la especialidad en el área de Matemáticas, con una duración de 5 años, en modalidad anual semestral". Para ese entonces, el perfil de egreso del profesor de Matemática y Computación tenía como objeto la formación de un profesional sensible a las connotaciones que tienen los estudiantes en etapa escolar hacia el quehacer matemático y su vinculación con el carácter explicativo de lo cotidiano. Además de propender al desarrollo de la capacidad para resolver problemas, fortaleciendo la autonomía y la veracidad en la búsqueda de la información. Paralelamente este profesional comprende la organización y estructura del sistema educativo, lo cual le permite un desempeño armonioso en el marco de sus fines y objetivos, comprendiendo el rol disciplinario desde esta perspectiva.

El Plan de Estudio de la Carrera y los programas de asignatura, fueron diseñados considerando la formación en 4 áreas, a saber: 1) el área de formación disciplinaria, la que comprende la formación matemática, 2) el área de formación pedagógica profesional, que permite comprender el fenómeno educativo de forma amplia, además de los caminos que permiten generar aprendizaje en los estudiantes, 3) el área de formación en informática educativa, a fin de gestar la utilización de este recurso como medio de generación de aprendizajes matemáticos, 4) el área de formación general, que buscaba complementar la formación de los estudiantes respecto a habilidades transversales.

2. Desarrollo

A. Diagnóstico

Luego del desarrollo estructural de la carrera, en el año 2006 la carrera se somete a evaluación voluntaria en el contexto de la acreditación de carreras del área de educación, logrando una acreditación de seis años[2]. El año 2011 se realiza un análisis de fortalezas y debilidades en el contexto de la formulación del plan de desarrollo de pregrado de la Universidad de Concepción. En el año 2012 la Universidad de Concepción se adjudica cuatro convenios de desempeño, uno de ellos fue "Profesores UdeC: protagonistas del cambio en la sociedad del conocimiento" PMI UCO1203, que considera en el objetivo 3, el "Rediseñar el Currículo de las carreras de pedagogías para mejorar los aprendizajes de los estudiantes, según un modelo de formación sustentado en el razonamiento y la evidencia científica, el modelo educativo institucional y los referentes nacionales e internacionales sobre Formación de Profesores". Paralelamente a lo antes descrito, la carrera de Pedagogía en Matemática y Computación se somete a un nuevo proceso de acreditación, logrando en esta ocasión el máximo nacional, lo que nos

1 Fortalecimiento de la Formación Inicial de Docentes
2 El máximo de acreditación en ese entonces era 6 años, actualmente el máximo es de 7 años.

compromete a un proceso de mejora continua al más alto nivel, por lo que a pesar de haber obtenido una excelente evaluación por parte de los entes acreditadores a nivel país, se consideró una gran oportunidad el proponer un rediseño para el perfil de egreso en el marco del convenio de desempeño UCO 1203, lo que derivará en el ajuste del plan de estudio.

B. Desafíos de cambio y renovación.

Pese a obtener un alto nivel de acreditación, se consideró como una oportunidad el hecho de renovar el plan de estudios, en función de las nuevas tendencias internacionales acerca de la formación de profesores de matemática, sobre todo considerando el escenario actual de nuestro país referente a su participación en organismos internacionales como la OCDE. Para lo anterior se estudiaron casos, como por ejemplo el proyecto KOM (Niss, 2002), donde se considera buen profesor de matemáticas como aquel que favorece el desarrollo de las competencias de sus estudiantes. Lo anterior requiere que el profesor posea estas capacidades y competencias, esto es: *Competencia curricular*(relacionado con los planes de estudios y los programas existentes de matemáticas y/o la capacidad de construir otros nuevos), *Competencia para la enseñanza*(crear un rico espectro de situaciones de enseñanza-aprendizaje), *Competencias respecto a su desarrollo profesional* **(**mantenerse al día respecto a las tendencias e investigaciones que puedan favorecer el mejoramiento de su práctica profesional).

En otro antecedente documentado por Doerry Wood (2004)se debate sobre ¿Cuál es la naturaleza del conocimiento matemático necesario para la Enseñanza Secundaria? La síntesis de sus aportaciones se podría articular en torno a tres grandes ejes: 1) *La preparación del profesor*: Se indica que en la preparación matemática se pone de manifiesto que hay una desconexión entre lo que el estudiante experiencia como matemáticas y la enseñanza matemática en los cursos formales de matemáticas y los cursos de educación matemática. 2) *El conocimiento matemático para la práctica:* ¿Cuál es la matemática que se necesita para la enseñanza en Secundaria? ¿Cuáles son las diferencias entre esta matemática y la matemática de disciplinas que configuran el currículum de un matemático profesional?, entre otras. 3) *Los diseños de investigación*: Se pone de relieve algunas necesidades como son: la pertinencia de estudios longitudinales sobre prácticas de enseñanza y la necesidad de proporcionar más evidencias sobre el impacto del conocimiento del profesor en el aprendizaje de los estudiantes.

Si bien la teoría expone de forma genérica algunas cuestiones importantes a la hora de definir conocimientos que debe tener un profesor de matemáticas, se hacía necesario una herramienta de análisis que permitiera especificar cada uno de estos conocimientos a fin de estructurar un perfil de egreso que cumpliera con todos estos aspectos antes mencionados.

C. Rol del MTSK en los resultados obtenidos

Una de las herramientas generales que definió inicialmente el trabajo de seleccionar y describir los principales conocimientos que debía manifestar un profesor de matemática fue la definida por la Dirección de Docencia de la Universidad de Concepción[3] en el manual de Rediseño Curricular (UnIDD, 2013). Este manual define como esencial, a la hora de intentar acercarse al perfil del especialista que enseña matemática, la necesidad de "Explicitar y describir aquellas actitudes distintivas y prácticas típicas propias del desempeño exitoso que debe tener y efectuar un profesional recién egresado en los ámbitos de realización de su profesión".

El resultado de dicha aplicación acotó de buena forma la tarea de determinar los conocimientos característicos de un profesor de matemática, sin embargo, al contrastar dichos resultados con los descritos por el MTSK (Carrillo *et al.*, 2013), se generó sin problemas un ordenamiento concreto en cuatro núcleos predominantes que emergieron de la discusión y análisis elaborado por el equipo de trabajo a cargo de la elaboración del perfil especializado[4].

Dichos núcleos predominantes se agruparon y dieron origen a cuatro competencias las cuales deberían manifestar el profesor que recién egresa y que espera enseñar matemática. Puntualmente estas competencias describen aquellos elementos propios y distinguibles de su práctica. A saber, los núcleos se describen de la siguiente forma:

Núcleo 1: Dicho núcleo comprende el dominio de la matemática, sus propiedades, fundamentos, formas de representar y los problemas esenciales. Lo anterior se relaciona consistentemente con el KoT descrito en el MTSK. Además, en dicho núcleo se hizo énfasis en la necesidad de que el futuro profesor maneje el lenguaje matemático y utilice la matemática en la resolución de problemas y en el modelamiento. Dichos elementos son coherentes con los que describe el subdomino KPM descrito en el MTSK. Luego de procesar y redactar dichos elementos, se da origen a la primera competencia especializada del perfil de egreso del profesor de matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de Concepción:

1. *Demostrar dominio de la Matemática a nivel intermedio lo cual se expresa en el dominio del lenguaje y el uso del razonamiento matemático que le permita explicar la demostración de resultados fundamentales, en la resolución de problemas y en el modelamiento de situaciones en diferentes contextos.*

Núcleo 2: De forma análoga a lo anterior, la redacción de la segunda competencia especializada evidencia la presencia de elementos propios del KoT desde el punto de vista de la matemática que se genera en las aulas, sin embargo, también evidencia elementos del KSM en la necesidad de que el futuro profesor tenga conocimientos respecto a la relación entre conocimientos matemáticos deforma que comprenda cómo contenidos contribuyen a la comprensión de otros de distinto nivel de complejidad. Su relación con el KMLS se manifiesta en que la relación entre contenidos descrita anteriormente se desarrolla en un contexto escolar y por ende su aplicación debe tributar a logros de aprendizaje definidos por dicho sistema educativo y curriculum. La segunda competencia especializada queda determinada por la siguiente redacción:

2. *Demostrar dominio de la Matemática propia del sistema educativo es-*

3 La dirección de Docencia es la entidad universitaria encargada de regular la docencia de pre grado.
4 Equipo compuesto por Académicos del área de matemática, educación, estudiantes de pregrado y docentes en ejercicio.

colar nacional y las relaciones que estos conocimientos matemáticos tienen entre sí y cómo éstos evolucionan en otros que serán abordados en diferentes niveles de su formación matemática.

Núcleo 3: Este núcleo está relacionado con el conocimiento que debe tener el profesor respecto a aspectos propios de la enseñanza de la matemática en sus temas específicos, incluyendo todos los elementos asociados a su diseño (KMT), lo anterior resguardando las formas de aprendizaje que son propias del contenido matemático tratado en distintos contextos y condiciones agregando así posibilidades de aprendizaje pero también dificultades que el docente debe saber reconocer. Lo anterior hace referencia directa a los elementos presentes en el subdominio y KFLM. Además, se hace énfasis en el conocimiento de elementos curriculares para el diseño de estas actividades y el rol que se le asigna a la matemática en el desarrollo de los estudiantes(KMLS). Esta competencia especializada se redacta finalmente como sigue:

3. *Diseñar situaciones y estrategias didácticas coherentes con el Currículum escolar para que los estudiantes de distintos contextos educativos: comprendan la matemática, valoren su aporte a la sociedad del conocimiento, construyan conocimiento matemático y desarrollen habilidades cognitivas superiores.*

Núcleo 4: El último núcleo que se generó en la construcción de las competencias pudo estar perfectamente incluido en otros de los núcleos, sin embargo, responde a la necesidad de resaltar el rol específico que tiene la informática como herramienta de soporte para la generación de pensamiento matemático. Se logró fundamentar la inclusión de este énfasis, principalmente por la opinión del equipo de rediseño basado en su experiencia como especialistas y además en los elementos curriculares vigentes, en los cuales el único subsector de estudio que hace referencia específica respecto al uso de herramientas informáticas para la comprensión de conocimientos es la matemática (MINEDUC, 2012). Nuevamente vemos elementos asociados al KMT, en la construcción de este núcleo, el cual dio origen a la siguiente competencia.

4. *Diseñar situaciones didácticas que incorporen herramientas actualizadas de la informática para que los estudiantes visualicen, construyan y validen el conocimiento matemático.*

3. Proyecciones

Al insertar el MTSK en la discusión del grupo de rediseño se generó un impacto positivo en la organización de la información recabada y por lo cual fue posible construir en primer lugar los cuatro núcleos que finalmente dieron origen a las cuatro competencias especializadas. Además, permite justificar teóricamente los énfasis que el equipo quiso dar al nuevo plan tanto en las competencias y posteriormente en la generación de resultados de aprendizajes y asignaturas.

Referencias

Doerr, H. M. y Wood, T. (2004). International perspectives on the nature of mathematical knowledge for secondary teaching: progress and dilemmas. En M. J, Hoines y A. B. Fugllestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 167-196). PME: Bergen,

MINEDUC (2012). *Programa de estudio 2º medio*. Santiago de Chile: Ministerio de Educación.

Niss, M. (Ed.). (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danishkom project*. Roskilde: Roskilde University.

Carrillo, J., Contreras L.C. y Flores, P. (2013) Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas, Investigación en Didáctica de la Matemática. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp.193–200). Comares: Granada.

UnIDD (2013). *Manual de Rediseño Curricular Universidad de Concepción*. Concepción: Dirección de Docencia UdeC.

10 EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UN PROFESOR EN FORMACIÓN INICIAL DE PRIMARIA. TAREAS PARA LA ENSEÑANZA DEL SIGNIFICADO RAZÓN

Reyes, A.M.
Sosa, L.
Carrillo, J.

Resumen

En este trabajo tomamos como referente el MTSK para identificar el KMT que un profesor en formación inicial de primaria, muestra en una planificación para enseñar el significado razón en un grupo de quinto grado de educación primaria en México; en la planificación identificamos conocimientos de la categoría estrategias, técnicas, tareas y ejemplos; en particular, se presentan indicios de conocimiento de una tarea auténtica (Thanheiser et al., 2016) en la que el profesor plantea un problema donde aborda el significado razón bajo su expresión y lectura con números naturales (a:b) y fraccionarios(a/b), a partir de información del contexto de los niños y mediante el planteamiento de otros problemas que contribuyen a resolver la tarea inicial que diseñó.

Palabras clave:

Formación inicial de profesores, primaria, MTSK, KMT, razón

Reyes, A.M., Sosa, L. y Carrillo, J. (2017). El conocimiento especializado de un profesor en formación inicial de primaria. Tareas para la enseñanza del significado razón. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 131-135). Huelva: CGSE.

1. Planteamiento del problema

En México, la formación inicial de profesores de primaria, en el campo de las matemáticas, ha pasado por diferentes reformas que pretenden brindarles conocimientos didácticos y disciplinares que les permitan la enseñanza de diferentes contenidos (SEP, 1997; DOF, 2012). En el Plan de estudios 1997 se abordaban los cursos de matemáticas y su enseñanza I y II; mientras que, en el Plan de estudios 2012 se trabaja aritmética: su aprendizaje y enseñanza, álgebra: su aprendizaje y enseñanza, geometría: su aprendizaje y enseñanza, además de procesamiento de la información estadística.

En los planes de estudio anteriores, las fracciones han ocupado un lugar especial, debido a los diferentes significados que poseen: parte-todo, medida, cociente, razón y operador; lo cual las visualiza como un tema complejo (Llinares y Sánchez, 1997). De acuerdo conLizarde (2013), la problemática de las fracciones "está asociada a la dificultad epistemológica, es decir, dificultades propias de la naturaleza de este tipo de números y de su comportamiento específico, en comparación con los números naturales" (p.45). Por su parte, Ávila (2001) precisa las fracciones como "uno de los objetos de enseñanza reconocidos tradicionalmente como más difíciles en la educación primaria" (p.198).En estas instituciones educativas, la razón como significado de la fracción, es uno de los temas que se abordan en los últimos grados (quinto y sexto grado), sin embargo, Block (2001) señala que las razones se pueden plantear como precursoras de las fracciones en su papel de expresar medidas y operadores multiplicativos. En vista de lo anterior, en este trabajo pretendemos identificar el conocimiento que un profesor en formación inicial de primariaevidencia en una planificaciónal enseñar el significado razón.

2. Perspectiva teórica

El MTSK se ha convertido en un marco de referencia para avanzar en el análisis y la conceptualización del conocimiento especializado que el profesor posee o podría poseer para la enseñanza de las matemáticas durante el ejercicio de la docencia (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013). Bajo este referente teórico, Rojas (2014) realizó una investigación que da cuenta del conocimiento de profesores de matemáticas expertos (primaria y secundaria) para abordar la enseñanza de los números racionales; por su parte, Moriel-Junior (2014)avanzó en la caracterización de los conocimientos que ponen en juego profesores de matemáticas en contextos universitarios para enseñar la división de fracciones. En este trabajo nos interesa avanzar en la identificación del MTSK de un profesor en formación inicial al enseñar el significado razón, de manera concreta, se busca obtener información del KMT, en relación al diseño de tareas auténticas (Thanheiser et al., 2016).

3. Perspectiva metodológica

Este trabajo atiende a una investigación cualitativa (Rodríguez, Gil y García, 1996), donde participa un Profesor en Formación Inicial (PFI) como informante que, en el momento de la investigación, cursaba el sexto semestre de la Licenciatura en Educación Primaria, bajo el Plan de Estudios 2012. El PFI llevó todos los programas del área de matemáticas que se ubican en el trayecto formativo preparación para la enseñanza y el aprendizaje. La fuente primaria para la recolección de datos es una planificación donde abordó la enseñanza del significado razón en un grupo de quinto grado. En este acercamiento pretendemos identificar el KMT del PFI, en el desarrollo de la secuencia didáctica de la planificación, a través del empleo de la categoría *conocimiento de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*; de manera específica, nos interesa identificar el conocimiento de tareas (Stein y Smith, 1998) y tareas auténticas (Thanheiser et al., 2016).

4. Resultados

En este trabajo, identificamos conocimientos de tareas e indicios de conocimientos de tareas auténticas en el desarrollo de la planificación del PFI para enseñar la razón, en un grupo de quinto grado de educación primaria. De acuerdo con Stein y Smith (1998), una tarea se define como "a segment of classroom activity that is devoted to the development of a particular mathematical idea" (p. 269). En este sentido, al comenzar el apartado del desarrollo de la planificación del PFI, está presente una tarea:

En la empacadora de lechugas de Loreto, trabajan Manuel y Sofía, ellos son los encargados de hacer los pedidos de las cajas que se ocuparán para empacar las lechugas que se cosechan. Ayúdales a encontrar lo siguiente:
Si en 4 cajas se empacan 64 lechugas...
¿Cuántas cajas se ocuparán para empacar 112 lechugas?_______________
¿Cuántas cajas se ocuparán para 32 lechugas?_______________________
¿Qué parte de la caja corresponde a una lechuga?___________________
¿Cuál es la razón entre la cantidad de cajas y la de lechugas?__________

Como se puede observar, la tarea se planteó a partir de la resolución de un problema que pone en juego la noción de razón, en función de datos relacionados con el contexto de los niños (empacadoras de lechugas). Según Thanheiser et al. (2016), la resolución de problemas y su conexión con el mundo real, se convierten en algunos de los elementos que definen el grado de que una tarea sea auténtica; así que, en la planificación del PFI,hemos identificado indicios de conocimiento de tareas auténticas para enseñar la noción de razón.

La tarea anterior estabacompuesta de tres problemas (Thanheiser et al., 2016) que abordaban la expresión de la noción de razón con números naturales y fraccionarios y, daban elementos para resolver dicha tarea. En esta comunicación, describimos el primero y el segundo problema, para presentar el tercero. El primer problema pretendía que los niños expresaran la razón como la relación entre dos números naturales (Block, Mendoza & Ramírez, 2010) en un contexto de pasteles y niños (2 pasteles para 8 niños), mientras que el segundo problema, intentaba introducir a los niños a la expresión de la razón de la forma *a*:*b* y su lectura. En el caso del tercer problema se planteaba:

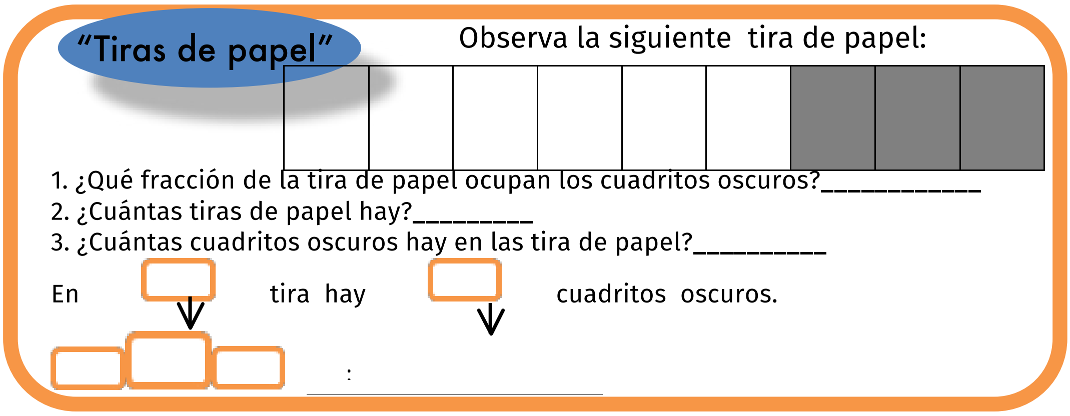


Figura 1: Problema 3 "Tiras de papel"

La pregunta 1 del problema 3, orienta a los niños a la representación de fracciones bajo el significado parte-todo en contextos continuos; según la planificación, la pregunta 2 , 3 y la situación gráfica que se presenta al final, pretenden introducir a expresar la razón de la forma *a*:*b*, tomando como referente que hay una tira y tres cuadritos oscuros, sin embargo, debido a que en este contexto emerge la fracción como parte-todo, en situaciones posteriores puede llevar a los niños a generar confusiones en el papel que desempeña el denominador (9), hasta el grado de omitirlo y señalar sólo el número de tiras y las partes sombreadas, sin importar el número de partes en que está dividido el todo, en este caso, cada tira (rectángulo).

5. Conclusiones

En esta comunicación identificamos,en el desarrollo de una planificación para abordar la enseñanza del significado razón en un grupo de quinto grado de educación primaria, el PFI muestra conocimiento del PCK en relación al KMT, en especial de la categoría estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, a la cual aportamos dos indicadores de conocimiento: *indicio de conocimiento de tareas auténticas* (Thanheiser et al., 2016) para abordar la enseñanza del significado razón en función del planteamiento de problemas que se relacionan con el contexto de los niños e *indicio de conocimiento de tareas compuestas por varios problemas* (Thanheiser et al., 2016).Sin embargo, en la planificación que presentamos, existeun problemaque se plantea (problema 3) y puede provocar confusiones en los niños respecto al significado de conceptos matemáticos adquiridos en grados anteriores (papel del denominador en una fracción bajo el significado parte-todo).

Con base en las investigaciones expuestas en esta comunicación, podemos decir que el estudio del conocimiento matemático y didáctico de fracciones en la formación inicial de profesores de primaria, es un tema vigente que orienta a su caracterización e intervención con el propósito de mejorarlo. De ahí que en esta comunicación avanzamos en la caracterización del tipo de tareas que un PFI diseña para abordar el significado razón en un grupo de quinto grado de una escuela primaria en México.

Referencias

Ávila, A. (2001). *La experiencia matemática en la educación primaria. Estudios sobre los procesos de trasmisión y apropiación del saber matemático escolar*. México: UNAM (Tesis doctoral).

Block, D. (2001). *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico (Tesis doctoral).* México: DIE-CINVESTAV.

Block, D., Mendoza, T. y Ramírez, M. (2010). ¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica. México: SM.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Diario Oficial de la Federación. (2012). Acuerdo 649 por el que se establece el Plan de Estudios para la Formación de Maestros de Educación Primaria. México: Autor.

Lizarde, E. (2013). *Transposición y destransposición del saber matemático y didáctico.Representaciones y prácticas en la formación inicial de profesores*. Huelva: UHU (Tesis de doctorado).

Llinares, S., y Sánchez, M. V. (1997). *Fracciones. La relación parte-todo.* Madrid: Síntesis.

Moriel-Junior, J.G. (2014). *Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações*. Tesis de doctorado inédita. Mato Grosso, Brasil: Universidade Federal de Mato Grosso

Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga, España: Aljibe.

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos*. Granada: España. Tesis de doctorado publicada enhttp://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/7483/descargar/

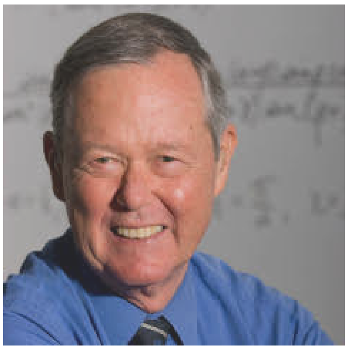
Secretaría de Educación Pública. (1997). *Plan de estudios 1997. Licenciatura en educación primaria.* México: Autor.

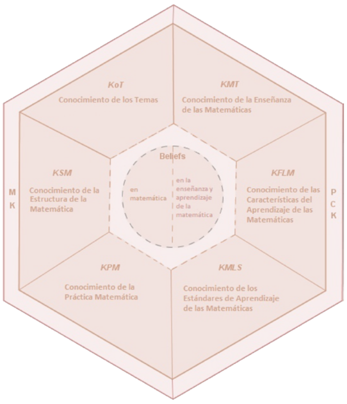
Stein, M. K., y Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268–275.

Thanheiser, E., Olanoff, D., Hillen, A. Feldman, Z., Tobias, J. y Welder, R. (2016). Reflective analysis as a tool for task redesign: The case of prospective elementary teachers solving and posing fraction comparison problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19* (2-3) 123-148.

RELACIÓN DE AUTORES

Nombre	email	Universidad
Álvaro Aguilar González	alaguilargon@gmail.com	Oviedo
Víctor J. Barrera Castarnado	vjbarrera@us.es	Sevilla y CEU Andalucía
José Carrillo Yáñez	carrillo@uhu.es	Huelva
Nuria Climent Rodríguez	climent@uhu.es	Huelva
Kike Carmona Medeiro	f92camee@hotmail.com	Cádiz
Luis C. Contreras González	lcarlos@uhu.es	Huelva
Dinazar I. Escudero Ávila	eadinazar@hotmail.com	Benemérita Universidad de Puebla, México
Ana Escudero Domínguez	aescudero1@us.es	Sevilla
Joaquín Fernández Gago	joaquinf234@gmail.com	Málaga
Aurora Fernández León	aurorafl@us.es	Sevilla
Eric Flores-Medrano	ericfm_0@hotmail.com	Benemérita Universidad de Puebla, México
Mauricio Gamboa	maurigamboa@udec.cl	Concepción, Chile
María S. García González	mgargonza@gmail.com	Autónoma de Guerrero, México
José Mª Gavilán Izquierdo	gavilan@us.es	Sevilla
Jeferson Gomes Moriel Junior	Jeferson.moriel@gmail.com	Instituto Federal do Mato Grosso, Brasil
Inés María Gómez Chacón	igomezchacon@mat.ucm.es	Complutense De Madrid
Alfonso González Regaña	agonzalez@us.es	Sevilla
Marleny Hernández Escobar	marlenylesly@hotmail.com	Cinvestav, México
Nuria Joglar Prieto	njoglar@ucm.es	Complutense De Madrid
María del Mar Liñán García	mlinan@us.es	Sevilla Y Ceu Andalucía
Juan P. Martín Díaz	juampemrt6@gmail.com	Huelva
Verónica Martín Molina	veronicamartin@us.es	Sevilla
Gustavo Martínez Sierra	gmartinezsierra@gmail.com	Autónoma de Guerrero, México
Miguel Á. Montes Navarro	miguel.montes@ddcc.uhu.es	Huelva
Mª Cinta Muñoz Catalán	mcmunozcatalan@us.es	Sevilla
Beatriz Pérez Bueno	bperez@ceuandalucia.es	Ceu Andalucía
Fabián Quiroga Merino	fquiroga@udec.cl	Concepción, Chile
Mónica Ramírez García	monica.ramirez@edu.ucm.es	Complutense de Madrid
Ana María Reyes Camacho	anyreca0712@hotmail.com	Escuela Normal Rural “Gral. Matías Ramos Santos”, Loreto (Zacatecas), México
Leticia Sosa Guerrero	lsosa19@hotmail.com	Autónoma de Zacatecas, México
Rocío Toscano Barragán	rtoscano@us.es	Sevilla
Diana Vasco Mora	dianav350@gmail.com	Técnica Estatal de Quevedo, Ecuador
Gonzalo Zubieta Badillo	gzubieta@cinvestav.mx	Cinvestav, México





Este libro, Actas de las III Jornadas del SIDM de la Universidad de Huelva, se terminó de diseñar y componer en Huelva el 21 de septiembre de 2017, fecha en la que Jeremy Kilpatrick cumple 82 años.

Jeremy Kilpatrick trabaja como profesor emérito en la Universidad de Georgia. Gran conocedor del panorama internacional de la Educación Matemática, recibió en 2007 la medalla Felix Klein por toda una vida dedicada a la investigación.

Reconocemos aquí su contribución a la Didáctica de la Matemática y agradecemos la consideración que muestra al modelo MTSK: Kilpatrick y Spangler (2016) señalan que los subdominios de MTSK KoT, KSM, KPM "deberían incluirse en el conocimiento, destrezas y habilidades matemáticas deseables para los futuros formadores" (p. 301).