# IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

J. Carrillo, M. Codes y L.C. Contreras
Editores

uhu.es
PUBLICACIONES

uhu.es PUBLICACIONES
COLLECTANEA
225

DATOS EDICIÓN

PRIMERA EDICION EN FORMATO EBOOK: MAYO 2020



EI.S.B.N. (pdf): 978-84-18280-03-0

*Maquetación y composición EBOOK*
MAQUETACCIÓN

CEP

Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (4º. 2019. Huelva). IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas / J. Carrillo, M. Codes y L.C. Contreras (editores). – Huelva : Universidad de Huelva, 2020

229 p. ; 24 cm. – (Collectánea (Universidad de Huelva)) ; 225

Texto electrónico (archivo Pdf)

ISBN (pdf) 978-84-18280-03-0

1. Matemáticas – Estudio y enseñanza – Congresos. I. Codes Valcarce, Myriam. II. Carrillo Yáñez, José. III. Contreras González, Luis Carlos. IV. Título. V. Serie

51:37.02(063)
37.02:51(063)

Obra sometida al proceso de evaluación de calidad editorial por el sistema de revisión por pares.

Publicaciones de la Univesidad de Huelva es miembro de UNE



Clique para mayor información

Esta publicación está financiada por COIDESO

coideso
Pensamiento Contemporáneo e Innovación para el Desarrollo Social

EL EBOOK LE PERMITE

Citar el libro

Navegar por marcadores e hipervínculos

Realizar notas y búsquedas internas

Volver al índice pulsando el pie de la página

Comparte #LibrosUHU

Únete y comenta

Novedades a golpe de clik

Nuestras publicaciones en movimiento

Suscribete a nuestras novedades

# Índice


INTRODUCCIÓN ........................................................................................ 7

*José Carrillo*

**PLENARIAS**

TEMÁTICA 1: LAS CREENCIAS DE LOS FORMADORES DE PROFESORES QUE ENSEÑARÁN MATEMÁTICAS SOBRE EL CONTENIDO Y LA ESTRUCTURA DE LA FORMACIÓN INICIAL DE LOS PROFSORES DE SECUNDARIA .......................... 14

*Miguel Montes y Luis C. Contreras*

TEMÁTICA 2: MTSK EN EDUCACIÓN INFANTIL .................................................. 24

*Mª. Cinta Muñoz-Catalán, Nuria Joglar-Prieto, Mónica Ramírez-García y Mª. Mar Liñán-García*

TEMÁTICA 3: EL DOMINIO AFECTIVO Y MTSK .................................................. 32

*Mª. Isabel Pascual, Joaquín Fernández-Gago, María García, José Marbán y Ana Maroto*

MESA FINAL: SÍNTESIS Y PROBLEMAS ABIERTOS EN EL IV CONGRESO IBEROAMERICANO DE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS (MTSK) .......................................................... 41

*Myriam Codes, Jeferson G. Moriel-Junior, Christian R. Alfaro y Yosenith A. González*

**TALLERES**

TALLER 1: GENERACIÓN DE PROPUESTA DE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO BASADA EN SITUACIONES DE AULA............................................................. 49

*Mª. Mar Liñán-García, Mª. Cinta Muñoz-Catalán, Nuria Joglar-Prieto y Mónica Ramírez-García*

TALLER 2: DISEÑO DE TAREAS PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS A PARTIR DE MTSK ............................................................ 60

*Nuria Climent y Miguel Montes*

**COMUNICACIONES**


CONSTRUYENDO CATEGORÍAS DEL CONOCIMIENTO DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA ........ 70

*Rosa Delgado y Diana Zakaryan*

ENSINAR A REPRODUÇÃO DAS PLANTAS COM AS LENTES BTSK ........ 79

*Mónica Luís, José Carrillo y Rute Monteiro*

PRÁCTICAS MATEMÁTICAS: UN AVANCE EN SU CARACTERIZACIÓN ........ 87

*Modemar Campos-Cano y M., Eric Flores-Medrano*

O CONHECIMENTO DO ENSINO DE MATEMÁTICA (KMT) EM UMA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DA EDUCAÇÃO INFANTIL SOBRE LOCALIZAÇÃO ........ 95

*Edvonete Souza de Alencar*

RELACIONES ENTRE SUBDOMINIOS DEL PCK: LA EXPERIENCIA DE PRÁCTICA COMUNITARIA ........ 101

*Alejandro Cabrera-Baquedano y María Pezoa-Reyes*

EL USO DE MTSK EN EL DISEÑO DE TAREAS FORMATIVAS PARA ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE EDUCACIÓN PRIMARIA ........ 110

*Víctor J. Barrera-Castarnado, Mª Mar Liñán-García, Mª Cinta Muñoz-Catalán y Luis Carlos Contreras*

APLICAÇÃO DA METODOLOGIA PAP-ER PARA TRANSPOSIÇÃO DO MTSK PARA DIFERENTES ÁREAS DAS CIÊNCIAS DA NATUREZA ........ 119

*Susel Tais Coelho, Stela S. Lima, Leandro Carbo y Geison J. Mello*

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DE PROFESSORES DE BIOLOGIA: UMA ANÁLISE DE PAP-ER SOBRE EMBRIOLOGIA HUMANA ........ 127

*Marcela Marques y Jeferson G. Moriel-Junior*

CONOCIMENTOS DEL PROFESOR: POTENCIALES DEL MODELO DE MATEMÁTICAS PARA LA EDUCÁCION EN LENGUA PORTUGUESA........ 135

*Joseany Moreira, Edson Evangelista y Geison Mello*

¿QUÉ MTSK MOVILIZAN FORMADORES Y MAESTROS CUANDO ANALIZAN UNA ACTIVIDAD SOBRE MEDIDA DE LONGITUD EN EDUCACIÓN INFANTIL? ........ 141

*Noemí Pizarro, Nuria Joglar-Prieto, Mónica Ramírez-García, Blanca Arteaga-Martínez, Mª. Mar Liñán-García, Juan Miguel Belmonte, Mª. Cinta Muñoz-Catalán y Esperanza Hernández*

CONEXIONES DE SIMPLIFICACIÓN Y COMPLEJIZACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LA MULTIPLICACIÓN DE FRACCIÓN POR NATURAL EN LA ESCUELA PRIMARIA ........ 149

*Manuel Montañez-Esparza y Eugenio Lizarde*

MTSK Y FORMACIÓN DOCENTE CONTINUA: EXPLORANDO HORIZONTES DE POSIBILIDADES ....................158

*Eugenio Lizarde*

APUNTANDO INFLUENCIAS DEL DOMINIO AFECTIVO EN EL MTSK. UNA EJEMPLIFICACIÓN CON KMT....................167

*Mª. Isabel Pascual, José Mª. Marbán, Ana Maroto, Joaquín Fernández-Gago y María García*

UM OLHAR PARA O CONHECIMENTO MATEMÁTICO E AS CRENÇAS SOBRE DEMONSTRAÇÃO DE UM FORMADOR DE PROFESSORES ....................175

*Marieli V. R. de Almeida, Silvania Couto, Miguel Ribeiro y José Carrillo*

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DE FUTUROS PROFESSORES AO ATRIBUÍREM SIGNIFICADO A RESPOSTAS DE ALUNOS SOBRE PARALELISMO....................182

*Silvania Couto, Miguel Ribeiro y Marieli V. R de Almeida*

CONCEPCIONES SOBRE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS....................191

*Álvaro Aguilar-González, Joaquín Barbé, Lorena Espinoza, Laura Muñiz-Rodríguez y Luis J. Rodríguez-Muñiz*

CONHECIMENTO, CONHECIMENTO ESPECIALIZADO E CULTURA: REFLEXÕES CONCEITUAIS....................201

*Renato D. G. L. Ribeiro y José Carrillo*

EL USO DE UN VÍDEO DE ANIMACIÓN PARA PROMOVER CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO SOBRE MEDIDA EN ESTUDIANTES PARA MAESTRO DE EDUCACIÓN INFANTIL....................210

*Myriam Codes y Mª Cinta Muñoz-Catalán*

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN INFANTIL PARA LA ENSEÑANZA DE GEOMETRÍA....................219

*Ana Escudero-Domínguez, Dinazar Escudero-Ávila, Álvaro Aguilar-González y Diana Vasco-Mora*

TRANSFORMACIÓN DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE FUTURAS PROFESORAS DE PRIMARIA SOBRE DIVISIÓN DE FRACCIONES....................228

*Macarena Valenzuela-Molina y Elisabeth Ramos-Rodríguez*

**COMITÉ CIENTÍFICO**

*José Carrillo, Universidad de Huelva (España)*
*Nuria Climent, Universidad de Huelva (España)*
*Myriam Codes, Universidad de Huelva (España)*
*Luis Carlos Contreras, Universidad de Huelva (España)*
*Pablo Flores, Universidad de Granada (España)*
*José Mª. Marbán, Universidad de Valladolid (España)*
*Miguel Montes, Universidad de Huelva (España)*
*Mª Cinta Muñoz, Universidad de Sevilla (España)*
*Miguel Ribeiro, Universidade Estadual de Campinas (Brasil)*
*Ivonne Sandoval, Universidad Pedagógica Nacional (México)*
*Diana Vasco, Universidad Técnica Estatal de Quevedo (Ecuador)*
*Diana Zakaryan, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)*
*Marcos Zapata, Universidad de Piura (Perú)*

# Panorámica de la investigación con MTSK en el mundo

José Carrillo


## Resumen

La investigación que usa el modelo teórico MTSK como fundamento o referente se ha extendido a varios países en el ámbito iberoamericano y fuera de él, y se ha diversificado en amplitud de temas, algunos de ellos intrínsecos a la línea de investigación del conocimiento del profesor de matemáticas, y otros de interés general en Educación Matemática. Asimismo, los investigadores relacionados con el MTSK están definiendo una serie de desafíos que, apoyándose en la colaboración ya existente entre ellos, auguran un futuro prometedor.



## Palabras clave

MTSK, profesor, matemáticas, educación matemática, colaboración



## Abstract

The research which uses the MTSK theoretical model as basis or referential has been expanded through several countries in the Latin American world and abroad, and it has been widely diversified in issues, some of them being inherent to the line of research of the mathematics teacher, and others being of general interest in Mathematics Education. Moreover, researchers who are related to MTSK are defining a series of challenges which, with the support of the existing collaboration amongst them, show a promising future.



## Keywords

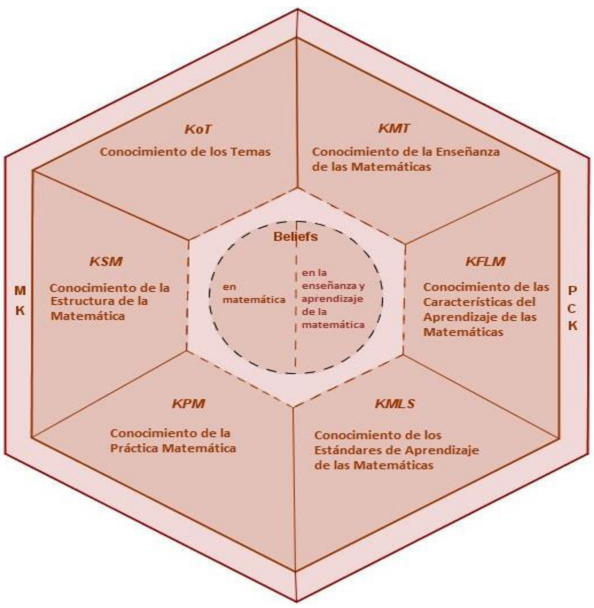
MTSK, teachers, mathematics, mathematics education, collaboration


Carrillo, J. (2019). Panorámica de la investigación con MTSK en el mundo. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (7-12). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

El modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK por sus siglas en inglés) (figura 1), aunque internamente desarrollado en la Universidad de Huelva desde el año 2011, puede decirse que se difundió en el ámbito internacional en 2013 (por ejemplo, Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), aunque tal difusión se vio precedida de alguna presentación en congresos nacionales (por ejemplo, Escudero, Flores y Carrillo, 2012).

Nacido en el seno del Seminario de Investigación en Educación Matemática (SIDM), en el que participan investigadores de universidades iberoamericanas, el MTSK se ha venido desarrollando y difundiendo en varios formatos (congresos, revistas, libros, conferencias, seminarios...). Además de en Carrillo y Contreras (2017), donde se recogen las ponencias y discusiones del congreso sobre MTSK del año 2017, podría asumirse que un recorrido corto a la vez que fundamental sobre la esencia del modelo trazaría un itinerario compuesto por el libro Carrillo *et al* (2014), en el que la presentación del modelo va precedida de un posicionamiento del grupo de autores sobre las nociones de creencia, concepción y conocimiento, y los artículos Carrillo *et al* (2018), donde se presenta exhaustivamente el modelo, y Carrillo, Montes, Contreras y Climent (2017) (cuya versión en español es descargable de la web del IREM de Estrasburgo, Francia) o Carrillo, Climent, Contreras y Ribeiro (2017), en los que se desarrolla ampliamente un caso de análisis empleando el modelo. Este recorrido se podría complementar con Scheiner, Montes, Godino, Carrillo y Pino-Fan (2019), artículo que reflexiona sobre el carácter especializado del conocimiento del profesor de matemáticas.

**Figura 1**
**Modelo MTSK**



Otras publicaciones ponen de manifiesto la dinámica colaborativa entre investigadores de diferentes países y la variedad de focos. A continuación, se presentan ejemplos de estas publicaciones. Se han seleccionado por la relevancia de la revista en el área. En Sosa, Flores y Carrillo (2015) se profundiza en el subdominio del Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas, en Flores-Medrano *et al* (2016) se abordan relaciones entre el modelo MTSK y el de los Espacio de trabajo matemático (ETM), en Montes y Carrillo (2017) se concreta el MTSK en relación con el infinito, en Zakaryan *et al* (2018) se estudian relaciones entre subdominios, en Aguilar-González, Muñoz-Catalán y Carrillo (2019) se muestran relaciones entre las creencias y los subdominios de conocimiento, en Espinoza-Vásquez, Zakaryan y Carrillo (2018) se concreta el MTSK respecto del concepto de función, mientras que en Zakaryan y Ribeiro (2018) el objeto matemático es el número racional, y en Delgado-Rebolledo y Zakaryan (2019) se presentan relaciones entre el Conocimiento de la práctica matemática y el dominio del Conocimiento didáctico del contenido.

De este modo, investigadores de España, Portugal, México, Costa Rica, Venezuela, Colombia, Ecuador, Perú, Chile, Brasil y Argentina (y otros países europeos, como Italia y Alemania, o el caso de una tesis doctoral presentada en la universidad de París VII, dirigida por Alain Kuzniak, en la que se utiliza el MTSK en combinación con el ETM) están colaborando, compartiendo investigaciones y abordando objetos de estudio que conforman una amplia panorámica de intereses en relación con el conocimiento (especializado) del profesor.

Son los países anteriormente mencionados los que conforman la Red Iberoamericana MTSK, que integra a su vez a investigadores de diversas universidades y grupos en cada país. La tabla 1 da cuenta de la variedad de temas y de los países en los que se está abordando cada tema.

**Tabla 1**

**Relación de temas abordados en la Red Iberoamericana MTSK y países**

| Temas | Países |
|---|---|
| MTSK en el diseño y análisis de planes de estudios | Chile, México |
| Relaciones entre subdominios | Chile, México, España |
| MTSK sobre temas | Ecuador y Argentina (profesor universitario)<br>Chile, Brasil (incluyendo mapeamiento), México, Colombia, Perú, España |
| Desarrollo del KPM | Chile, México, España |
| MTSK en Ed. Infantil | Brasil, Chile, Ecuador, España |
| BTSK (Biología) | Portugal, Brasil |
| STSK (Estadística) | Chile |
| CTSK (Química) | Brasil |
| PTSK (Física) | Brasil |
| LTSK (Lengua) | México, Brasil |
| Relación ETM-MTSK | Chile, Brasil, España, Francia |
| MTSK y dominio afectivo | México, España |
| Conocimiento del formador | México, Brasil, España |
| Concepciones | España |
| MTSK y cultura | Brasil, España |
| KSM | México |

| | |
|---|---|
| MTSK y tecnología | Chile, México, España |
| MTSK y desarrollo profesional (incluyendo formación inicial y evolución del conocimiento) | Chile, México |
| MTSK y diseño de tareas formativas y asignaturas y de productos para la formación docente | Perú, Brasil, España |
| MTSK para el análisis del currículum | Brasil, España |
| MTSK y detección de necesidades formativas | México |
| MTSK en relación con elementos teóricos de la Educación Matemática | México |
| Relaciones entre MK-PCK y Concepciones | España |
| MTSK como herramienta metacognitiva en la formación | México, España |

Tanto estos temas como los estudios proyectados se corresponden con una serie de desafíos que contribuyen a que la Red progrese y evolucione adaptándose a desafíos más generales procedentes de la Educación Matemática. Los desafíos propuestos son los siguientes:

1. Describir los subdominios y categorías del MTSK con más profundidad
2. Reflexionar sobre el significado del MTSK en Educación Infantil
3. Aplicar MTSK a diferentes temas
4. Mejorar la imagen de relaciones entre subdominios
5. Abordar el dominio afectivo (incluyendo creencias)
6. Desarrollar investigaciones que relacionen procesos de aprendizaje de alumnos con el MTSK
7. Testar el MTSK con profesores que apliquen perspectivas críticas o visiones culturales singulares (respecto de la matemática o del curriculum, por ejemplo)
8. Enfocar el *Mathematics Teacher Educators' (Specialized) Knowledge*
9. Proyectar el MTSK sobre prácticas de enseñanza concretas
10. Analizar el MTSK en entornos tecnológicos
11. Diseñar tareas formativas basadas en MTSK
12. Relacionar el MTSK con otras perspectivas o enfoques teóricos (como el ETM)
13. Aplicar el MTSK en contextos de desarrollo profesional
14. XTSK (STSK, BTSK, CTSK, PTSK, LTSK)
15. Diseñar cuestionarios MTSK

Estos desafíos se corresponden con tres grandes objetivos, el primero de los cuales es subalterno de los otros dos:

a) Seguir desarrollando el modelo MTSK.

b) Aproximarnos a responder a preguntas esenciales de la E y A de las matemáticas

c) Realizar aportaciones a la formación (inicial y continua) del profesorado

La frecuente incorporación de nuevos investigadores a la Red o al SIDM, el acercamiento de investigadores procedentes de otros enfoques, la frecuente difusión de nuestros estudios en diferentes foros, la dinámica colaborativa establecida, el planteamiento de desafíos de un modo organizado (con coordinadores por cada tema) y el esclarecimiento de objetivos que trascienden los desafíos concretos, constituyen una conveniente trama de partida para el desarrollo de investigaciones relevantes en la línea del conocimiento (especializado) del profesor de matemáticas.

## Referencias


Aguilar-González, Á., Muñoz-Catalán, M. C., y Carrillo, J. (2019). An Example of Connections between the Mathematics Teacher's Conceptions and Specialised Knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *15*(2), em1664.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: Middle East Technical University, Ankara.

Carrillo, J., Climent., N., Contreras, L. C., Montes, M., Escudero-Ávila, D., y Flores-Medrano, E. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones: Huelva.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Ribeiro, C. M. (2017). Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) in the "Dissecting an equilateral triangle" problem. *RIPEM - International Journal for Research in Mathematics Education, 7*(2), 88-107.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Carrillo, J., y Contreras, L. C. (2017). *Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva*. Huelva (España): CGSE.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L. C., y Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 22*, 185-205.

Delgado-Rebolledo, R., y Zakaryan, D. (2020). Relationships Between the Knowledge of Practices in Mathematics and the Pedagogical Content Knowledge of a Mathematics Lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18, 567-587. DOI: 10.1007/s10763-019-09977-0

Escudero, D, Flores, E., y Carrillo, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Sosa, E. Aparicio y F. M. Rodríguez (Eds.), *Memoria de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 35-42). México DF: Cinvestav.

Espinoza-Vásquez, G., Zakaryan, D., y Carrillo J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *21*(3), 301-324.

Flores-Medrano, E. Montes, M. A., Carrillo, J. Contreras, L. C., Muñoz-Catalán, M. C., y Liñán, M.M. (2016). El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema*, *30*(54), 204-221.

Montes, M., y Carrillo, J. (2017). Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del Infinito. *Bolema*, *31*(57), 114-134.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., y Pino-Fan, L. R. (2019). What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(1), 153-172.

Sosa, L., Flores-Medrano, E., y Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 173-189.

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E., y Carrillo, J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(2), 105-123.

Zakaryan, D., y Ribeiro, M. (2018). Mathematics teachers' specialized knowledge: A secondary teacher's knowledge of rational numbers. *Research in Mathematics Education*, *21*(1), 25-42.

# Plenarias

# Las creencias de los formadores de profesores que enseñarán matemáticas sobre el contenido y la estructura de la formación inicial de los profesores de secundaria

Miguel Montes
Luis C. Contreras

## Resumen

En este trabajo nos centramos en el formador de profesores de secundaria, en pos de identificar los elementos alrededor de los que se organizan sus creencias sobre el contenido de la formación inicial de profesores de secundaria. Para ello, se exploraron las creencias de ocho profesores vinculados con la formación de profesores de secundaria de diversas formas, con varios perfiles profesionales distintos, que completaron un cuestionario que abordaba diferentes ítems, así como entrevistas semiestructuradas aclaratorias. Del análisis, basado en la Grounded Theory, de estos cuestionarios, emergieron seis organizadores de las creencias de los formadores.

## Palabras clave

Formador de Profesores, Creencias, Secundaria, Contenido de la Formación Inicial.

## Abstract

In this work, we focus on the high school teacher educator, in order to identify the elements around which their beliefs, on the content of the prospective training of secondary school teachers, are organized. For this, the beliefs of eight teachers linked to the training of secondary school teachers were explored in various ways, with several different professional profiles, who completed a questionnaire that addressed different items, as well as semi-structured explanatory interviews. From the analysis, based on the Grounded Theory, of these questionnaires, six organizers of the formators' beliefs emerged.

## Keywords

Teacher Trainer, Beliefs, Secondary, Prospective Teacher Training Content.

Montes M. y Contreras L. C. (2019). Las creencias de los formadores de profesores que enseñarán matemáticas sobre el contenido y la estructura de la formación inicial de los profesores de secundaria. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (14-23). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Introducción

Linda Darling-Hammond, que en su libro *Powerful Teacher Education* se refiere a la tarea docente como una *tarea imposible* para los profesores, como una forma de mostrar la dificultad que entraña la enseñanza, sostiene que la formación de profesores parece incluso más imposible que la enseñanza en sí misma… “especialmente dado el desafío de preparar una amplia gama de personas que se convierten en profesores que a su vez pueden permitir que un grupo de estudiantes, enormemente diverso, cumpla con estándares mucho más altos de lo que nunca se había esperado de los sistemas educativos” (Darling-Hammond, 2006, p. 8). En los últimos años, el formador de profesores de matemáticas ha comenzado a recibir un alto grado de atención desde la investigación, y comienza a ser frecuente el tratamiento de esta cuestión en monográficos de revistas especializadas (Jaworsky y Huang, 2014; Beswick y Goos, 2018) y en encuentros científicos relevantes de educación matemática (e.g. Beswick y Chapman, 2012).

Por otro lado, las creencias de los profesores de matemáticas han sido objeto de estudio en educación matemática durante las tres últimas décadas (puede verse una revisión al respecto en Goldin, Rösken y Törner, 2008), no así la de los formadores de profesores que según Chauvot (2009) está en su más tierna infancia y todavía no se han abordado suficientemente los vínculos entre las creencias y la práctica. El trabajo de Zazkis y Zazkis (2011) pone de relieve cómo afectan las creencias, sobre la relevancia que los formadores otorgan al conocimiento matemático, en la toma de decisiones que hacen en la formación de profesores. Los formadores del estudio mantenían una creencia compartida de que el conocimiento matemático es relevante, pero bajo una misma denominación de conocimiento se encerraban diferentes formas de entenderlo (como ya anticipara Skemp, 1978), como identificar el conocimiento matemático con su proceso de construcción (hacer matemáticas o pensar matemáticamente), considerar la matemática como el proceso de plantear y resolver problemas (Schoenfeld, 1985) o poner énfasis en la enculturación y valores, como la precisión y la objetividad. El papel que otorgamos al contenido matemático es determinante, como mostraron los autores del estudio, en el diseño de las tareas que el formador hace en la formación.

Así, uniendo las investigaciones sobre los formadores de profesores, y la línea de trabajo ligada a las creencias, pretendemos en este estudio profundizar en el análisis de algunas de estas creencias de formadores de profesores que enseñarán matemáticas haciendo explícitos, no tanto los contenidos de la formación que cada tipo de formador considera relevantes, sino los criterios que le llevan a determinar dicha relevancia. Así, en lo que sigue, abordaremos la siguiente cuestión: ¿A qué elementos están ligadas las creencias de los formadores sobre el contenido de la formación inicial de profesores de secundaria?

## Un estudio exploratorio para aproximarnos a una respuesta

En este trabajo se eligió una metodología de corte cualitativo, ligada en este caso a una aproximación Bottom-Up (Grbich, 2013). El enfoque del estudio fue interpretativo, dado que se pretendía explorar los elementos a los que las creencias de cada uno de los formadores estaban vinculadas, lo que requería 'ponerse en sus zapatos' (Spradley, 1979).

Para el estudio se seleccionó a un conjunto de profesores que tuvieran inquietud por la formación de profesores, así como algún tipo de vinculación con la formación inicial de profesores de secundaria, ya fuera por su participación activa como docentes en las mismas, o por su experiencia discutiendo el diseño de las asignaturas de programas de formación inicial. Se seleccionó a ocho profesores, cuyas características se sintetizan en la tabla 1:

**Tabla 1**
**Perfil de los informantes**

| Nombre | Perfil profesional | Temática Doctorado | Experiencia profesional Formando Profesores | Experiencia Profesional en Secundaria |
|---|---|---|---|---|
| L | Prof. Secundaria | Estadística y Econometría | 4 Años | 24 Años |
| CM | Experta en E.M. | Desarrollo Profesional | 16 Años | 3 meses |
| C | Experto en Mat. | Códigos espacio-tiempo | 13 Años | 13 Años |
| N | Experta en E.M. | Desarrollo Profesional | 21 Años | 4 meses |
| P | Experto en E.M. | Resolución de Problemas y Desarrollo Profesional | 33 Años | 7 Años |
| M | Experta en E.M. | Políticas de Formación de Profesores de Matemáticas | 9 años | 1 Año |
| MA | Mixto. Experto en E.M. que enseña Mat. | Pensamiento Matemático Avanzado | 30 Años | 6 Años |
| Ce | Experto en Mat. | Espacios Localmente Convexos | 30 Años | 0 Años |

A estos profesores se les entregó un cuestionario de respuesta abierta, para ser completado en dos semanas. El cuestionario se componía de cuatro partes. En la primera, se pedía que se ordenaran, de forma justificada, diversos sistemas de formación de profesores de Secundaria, en función de cuál se considerase óptimo. En la segunda pregunta, se les situó en el contexto de formación inicial de profesores de secundaria español, y se les pidió que organizaran los contenidos del Máster. En la siguiente cuestión, se pasaba a explorar el enfoque con el que se abordarían los contenidos anteriores. Para ello, se les demandaba que, para cada uno de los cinco contenidos que se hubieran seleccionado con un mayor porcentaje, se esbozara una tarea, señalando los aspectos relevantes que deberían ser trabajados. En la última pregunta, inspirada en Zazkis y Zazkis (2011), se preguntó a los formadores por las tres características más relevantes que ellos consideraran que deberían reunir los formadores de dicho máster, de cara a explorar qué agentes consideraban ellos idóneos para la formación de profesores de Secundaria.

Para realizar el análisis, se hizo una doble codificación inicial (Charmaz, 2014) de las respuestas de los formadores al cuestionario, por parte de los investigadores de forma independiente, a través del método de comparación constante (Glaser y Strauss, 1967), identificando los elementos sobre los que los formadores sostenían sus creencias. A continuación, se realizó una revisión por parte de un investigador externo, para asegurar la triangulación por expertos (Flick, 2007) de las categorías.

## Resultados

Mostraremos los resultados atendiendo a lo que los informantes consideran el modelo formativo óptimo, en su valoración de los contenidos de la formación, en cuanto al papel del conocimiento sobre las características del aprendizaje de las matemáticas, en relación con su valoración de la formación práctica y su relación con la formación teórica, en cuanto al papel de la investigación y la innovación educativa y en su valoración de la identidad profesional.

En cuanto al modelo formativo óptimo, todos los informantes apuestan (la cursiva es nuestra) por *programas de formación con una combinación más o menos equilibrada de contenidos matemáticos avanzados y contenidos psicopedagógicos y/o de educación matemática,* como es el caso del Grado en Matemática Educativa utilizado en países de Latinoamérica. Se aportan matices a este modelo, ofreciendo respectivamente, como alternativa, el Grado en Matemáticas con un Doctorado en contenidos psicopedagógicos de Educación Matemática, el Grado en Matemáticas Educativa unido a un Máster en Educación Secundaria, con enfoque eminentemente práctico y realizado en su integridad en un centro de Educación Secundaria, 2 cursos comunes con los matemáticos + 2 cursos específicos con contenidos de educación matemática y psicopedagógicos, o "*un Grado en Matemática Educativa* [en el que] *los contenidos de las disciplinas del área de matemáticas (matemáticas avanzadas) deberían estar fuertemente conectados con los contenidos a ser enseñados en la escuela, y ser complementados por un conjunto de disciplinas del área de educación matemática (que abordasen teorías de enseñanza, aprendizaje, métodos y técnicas de enseñanza asociados a contenidos matemáticos, niveles de aprendizaje, etc.) y educación general. Además, esta cuadrícula curricular debería estar compuesta por actividades de ambientación con la escuela y las clases de matemáticas desde el inicio del curso*" [M]. Salvo en un caso, que se ubica en segundo lugar, el modelo de carrera docente es ubicado en último lugar debido a las carencias esperables, respecto al conocimiento del contenido, en los profesores de Primaria, que los informantes no ven resoluble a través de la actualización científico-didáctica, dado que *"el nivel de profundización en el contenido que se requiere en secundaria sería difícil de completar con una formación inicial de maestro"* [N], o por desconfiar que se pueda implantar después de haberse planteado hace tanto tiempo: *"El modelo de carrera docente me parece muy interesante, y si el proceso de Ampliación/Actualización Científico-Didáctica incluyera el grado de matemáticas, lo pondría en primer lugar. El problema es que ya soy muy viejo para creérmelo"* [Ce].

Los formadores comparten la identificación de un contenido de la formación vinculado a la propia profesión, donde la matemática es un vehículo y no un fin en sí misma. Reconocen que la solidez del contenido matemático es esencial.

> MA: Me parece fundamental el conocimiento profundo de los conceptos básicos de cálculo y algebra que se explican en secundaria. Creo que el grado en Matemáticas proporciona una visión global los contenidos de las asignaturas de Secundaria que es muy importante.

> Ce: [el conocimiento matemático] es un clásico entre los profesores de universidad y no pienso renunciar de ningún modo. A pesar de haber quitado los contenidos, el objetivo final es que alguien aprenda matemáticas (los alumnos a los que darán clase los que realizan el máster). La disposición mental de las matemáticas sólo la entienden los matemáticos.

M: Los aspectos considerados más importantes en el trabajo [con los contenidos matemáticos] es el de la relación entre las matemáticas estudiadas a nivel académico y prácticas matemáticas asociadas a ella con los contenidos escolares con la finalidad de promover la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

N: Incluso en las materias de contenido matemático se [debe considerar] que van a ser profesores (de este modo, se bordaría el contenido en profundidad con reflexiones sobre la enseñanza).

Los profesores estudiados comparten la necesidad de conocer (y abordar en la formación) las características del aprendizaje de las matemáticas, aunque lo hacen desde diferentes perspectivas; desde la lectura de documentos teóricos sobre el aprendizaje del contenido, como el modelo de Van Hiele, o la teoría APOS, orientadas a enriquecer los fundamentos sobre el aprendizaje; desde la discusión (video)casos, orientada a potenciar la reflexión y las capacidades interpretativas desde un rol de profesor que le permita situarse en el rol de alumno, enfrentándose a situaciones problemáticas para comprender el posible aprendizaje de un alumno desde la propia experiencia; o desde el estudio de 'secuenciaciones ideales' de contenidos.

Todo lo anterior es coherente con que, independientemente de sus perfiles, el conocimiento al que más importancia conceden es el relativo a las prácticas profesionales, para minimizar el desequilibrio entre las fuentes teóricas y prácticas para la construcción del conocimiento profesional. Dos de las informantes, miembros de un proyecto de investigación colaborativa con profesores de distintos niveles, conceden importancia, de forma complementaria, a la reflexión sobre estas prácticas:

N: Al [contenido] que daría más peso es a [las prácticas profesionales] porque buscaría que la experiencia de los alumnos en los centros escolares fuera el eje vertebrador de su formación.

C: Le otorgo un gran valor a las prácticas profesionales y a la reflexión sobre ellas. Considero que deberían ser un núcleo importante para la formación de estos profesionales y pensaría en diseñarlas de manera conjunta, ambas íntimamente relacionadas.

P: Considero que la reflexión sobre las prácticas debería incluirse en las propias prácticas... Podría ser una tarea tipo *noticing*, donde destacaría, por un lado, los aspectos a que los futuros profesores dan sentido en relación con el conocimiento matemático suyo y el conocimiento matemático que se pretende construir en los estudiantes de secundaria.

Con ello, los formadores ponen de relieve un ámbito de conocimiento al que conceden importancia, aquél que les permite realizar una reflexión sobre la práctica; muestran el escenario de la formación, los propios centros de Educación Secundaria, y se decantan por algunas herramientas para favorecer esa reflexión, como el *noticing*. Junto a ello ponen de relieve dos aspectos del contenido de la formación sobre el que guiar la reflexión, el relativo a los procesos de enseñanza de las matemáticas escolares y el relativo a los procesos de aprendizaje de dicho contenido. Estos elementos del contenido de la formación, junto a la manera de abordar estas prácticas profesionales, aparece vinculada en algunos casos a la pertenencia a un proyecto de investigación colaborativa de algunos informantes.

Es natural, por tanto, que el segundo núcleo de contenidos al conceden relevancia de forma mayoritaria sea el relativo a conocimientos sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, poniendo de relieve enfoques de enseñanza, desde la perspectiva de las matemáticas (e.g. STEAM, flipped classroom, visual thinking), mostrando herramientas de enseñanza de las matemáticas potentes (e.g. Geogebra), estudiando cómo plantear, gestionar y evaluar tareas de enseñanza de las matemáticas o fomentando una visión docente ligada a la Resolución de Problemas.

N: ...[después Prácticas profesionales], a la que otorgo más peso es a las [Características del aprendizaje de las matemáticas] pues creo que el aprendizaje de la matemática puede ser el punto de partida para sensibilizar a los fututos profesores sobre la necesidad de formación didáctica y porque saber sobre cómo se aprenden estos contenidos posibilita poder intervenir de forma sensible en la enseñanza...

MA: Las distintas metodologías de Enseñanza en general y de las Matemáticas en particular permiten al futuro profesor conocer las distintas vías que se pueden utilizar a la hora de enseñar. Esto es algo que nadie les ha contado durante la carrera...Considerar [un]concepto concreto y pedir a los futuros profesores que analicen su proceso de enseñanza- aprendizaje completo, [los] errores mas comunes, [las] dificultades que aparecen, [los] obstáculos epistemológicos intrínsecos del concepto ...

L: Creo que debería mostrar a los [futuros profesores] cómo usar otras metodologías activas para enseñar Matemáticas como el enfoque STEAM, el ABP, el aprendizaje basado en problemas, el flipped classroom o el visual thinking.

P: Trabajaría con GeoGebra en varios bloques, especialmente geometría y análisis... [con el propósito de] que el futuro profesor reflexionara sobre la potencialidad del software, en particular lo que permite frente al lápiz y al papel, y sus limitaciones, en concreto en relación con la concepción de prueba o demostración.

Los formadores asignan diferentes pesos a la orientación y realización de las prácticas en centros de Educación Secundaria y la relación entre estos centros y la Universidad, mostrando diferentes utilidades del mismo, y entienden de forma diferente el papel del tutor del centro de prácticas, así como la relación entre dichos centros y la Universidad. Dicha relación se percibe como articulada en torno a la relación entre los formadores en ambos centros, al aprovechamiento del contenido de las mismas, o a las relaciones institucionales entre ambos.

L: Deberían comenzar por tener un tutor lo suficientemente preparado y conectado con la Universidad (un buen mentor y referente). Debería haber un proceso de selección de estos tutores ... en el que prime la experiencia y la formación para formar futuros docentes... [es esencial] establecer un planning de tareas a realizar en el centro por los [futuros profesores] consensuado entre el tutor y la Universidad.

N: Cada futuro profesor (FP) se situaría en un aula con un docente y acordaría con este un contenido a abordar. La tarea consistiría en diseñar (en grupos) dos sesiones para abordar ese contenido, discutiendo el diseño con el profesor del aula y con el formador antes de su implementación. El resto de alumnos del grupo observaría la implementación por parte de uno de ellos, tomando notas. Iría cambiando los papeles para que todos fueran observadores e implementadores. Después de la implementación desarrollaría sesiones de reflexión con el profesor del aula, los FPs y el formador.

La investigación y la innovación en didáctica de las matemáticas ocupan el tercer bloque de conocimientos a las que de forma uniforme conceden importancia nuestros informantes, relacionándolo con las prácticas profesionales.

N: [Veo la investigación en didáctica de las matemáticas] como fuente de información para su mejora profesional y su posible papel como profesor investigador de su práctica. La [Innovación en didáctica de las matemáticas] la abordaría desde el análisis crítico de propuestas innovadoras.

C: Esta asignatura ... también la vería relacionada con las prácticas y se podría llevar a cabo antes de que acudan a los centros. El diseño didáctico que deben acometer e implementar durante sus prácticas debería incluir una innovación didáctica. En el caso de haberse inspirado en alguna de las experiencias analizadas, el análisis de su implementación podría incorporar una reflexión en la que se enfrentara su experiencia a la descrita.

Es importante señalar la relevancia que los formadores conceden, como contenido de la formación, a elementos que provienen de la investigación en educación matemática relativa al conocimiento del profesor y al doble papel docente-investigador (sobre su propia práctica que conciben para los futuros profesores. Ello es un primer indicador de la identidad profesional que pretenden construir.

Resulta también destacable, en este caso por la escasa o nula valoración que le conceden de forma uniforme, es a los contenidos matemáticos avanzados.

> N: Descarto [contenidos matemáticos avanzados] porque creo que con la formación actual en contenido lo menos necesario es una matemática más avanzada.
>
> CM: Imagino que el conocimiento sobre el contenido precede a los métodos que serán utilizados para ministrar [sic] tal contenido, de esa manera veo como más importante conocer bien la Matemática que será ministrada [sic] en el aula ... el profesor debe conocer cómo articular el contenido de Matemáticas con las diversas maneras de presentar tal contenido a los estudiantes en la escuela ... y no de contenidos más avanzados sobre dicho tema, por ejemplo, el contenido de funciones puede ser visto de varias maneras, el profesor debe dominar el contenido de función de la escuela y no de nivel de graduación.

Como se ha señalado antes, los escenarios de la formación están estrechamente vinculados a la práctica real y la reflexión sobre ella. Por ello, el tipo de tareas que utilizarían en la formación emana de la práctica de aula (real o simulada) y la estrategia formativa se muestra acorde con el modelo didáctico asociado (investigativo):

> P: Enfrentaría a los futuros profesores a un problema y al análisis de un problema propuesto en un libro de texto. La RP es una de las metodologías recomendadas en los currículos. Los profesores tienen que experimentar la RP y, además, disponer de elementos para analizar la idoneidad de un problema en función de los objetivos de aprendizaje. ... También podrían analizar resoluciones de alumnos de Secundaria o Bachillerato sobre problemas en los que se relacionan dos variables (al comienzo no es tan simple), o sobre problemas de división de fracciones (donde no es fácil disponer de un contexto).
>
> C: [Para tratar las características del aprendizaje de las matemáticas, organizaría la materia] en torno a situaciones reales o recreadas de situaciones de aula, con foco en la respuesta de los alumnos. ... El visionado de discusiones de alumnos cuando resuelven problemas determinados y su análisis matemático y la interpretación de dichas respuestas son otros de los tipos de actividades que se podrían considerar en esta asignatura.

Cuando se les pone ante la situación de seleccionar un nuevo formador, nuestros informantes ponen más énfasis en sus competencias profesionales que en su formación acreditada. Así, CM seleccionaría a un experto en didáctica de la Matemática, entendiendo por tal aquél “que esté familiarizado y domine esta área de indagación y que haya problematizado y reflexionado sobre la formación de profesores de Secundaria ... Un buen generador de oportunidades de aprendizaje para los estudiantes, que les permita posicionarse a los estudiantes como profesores en una situación de enseñanza y aprendizaje particulares y promueva reflexiones didáctico-matemáticas al respecto ... Un profesional con un sólido conocimiento del contenido matemático de Secundaria y también del avanzado. Sería deseable que tuviera experiencia docente en dicho nivel educativo”. De forma similar se expresan P, N y MA. Para MA el dominio del contenido y la experiencia como profesor son muy relevantes “el formador tiene que estar bien formado ... Si se va a contar cómo enseñar es importante que se tenga suficiente experiencia docente y, a ser posible, no solo universitaria sino también en enseñanza Secundaria"; para P, "el área de DM debe ser la encargada de la formación. Si profesor de DM [no tuviera] a su alcance los conocimientos ... necesarios para ello ... los puede obtener por pertenecer a esta área ...[enfatiza] la necesidad de poseer conocimiento de matemáticas (KoT, KSM, KPM). Esto es lo que hace que algunos profesores de DM necesiten un reciclaje (en principio, aquellos que son, por ejemplo, graduados en EP no poseen conocimiento suficiente para abordar profesionalmente los problemas de E y A que se plantean en la ESO y el Bachillerato). También considera esencial la experiencia profesional en esa etapa "tener imágenes reales de la situación (actual) de la enseñanza en la etapa ... [aspecto que reúnen los] profesores de Secundaria y Bachillerato. De manera indirecta, se pueden aproximar los profesores de DM". Para N, "El formador debe haber reflexionado sobre los contenidos para poder promover la reflexión en los futuros profesores (una reflexión disciplinar desde el punto de vista de que son objeto de enseñanza y aprendizaje) ... Debe conocer cómo aprenden los alumnos los contenidos y consideraciones sobre su enseñanza ... Lo ideal sería que tuviera experiencia docente en esta etapa junto con experiencia en formación de profesores de esta etapa ... experiencia [que] podría ser diferida en el sentido de experiencias de colaboración con profesores de estas etapas, haber participado en observaciones de aulas de Secundaria, o participado en la formación de profesores de Secundaria.

## Análisis de los resultados y conclusiones

El análisis anterior nos permite ofrecer seis organizadores en torno a los cuales parecen organizarse las creencias de los formadores sobre el contenido de la formación de profesores de secundaria, que detallamos a continuación.

En primer lugar, el *tratamiento del contenido matemático*, donde se identifican diferentes formas de contemplar el papel del contenido matemático, desde la reflexión basada exclusivamente en la construcción del conocimiento matemático formal, hasta el centrado en la construcción de conocimiento matemático escolar (Dreher, Lindmeier, Heinze, Niemand, 2018).

En su *aproximación a la construcción de conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas*, los profesores estudiados muestran formas de plantear la reflexión que van desde la basada en la lectura de documentos teóricos sobre el aprendizaje del contenido, que forman parte los manuales de educación matemática y que están orientados a enriquecer los fundamentos sobre el aprendizaje, a la orientada al análisis y reflexión de la práctica a través de (video)casos. Ello evidencia el *(des)equilibrio entre fuentes teóricas y prácticas para la construcción de conocimiento profesional*; vemos cómo los formadores proponen como fuentes de conocimiento, perspectivas que abarcan desde una visión más centrada en elementos puramente teórico-académicos, hasta otras más centrada en el análisis de la práctica como fuentes de dicho conocimiento.

En cuanto a la *identidad Profesional*, los formadores estudiados valoran este aspecto desde dos perspectivas, no siempre complementarias. Por un lado, entienden que el futuro profesor debe tener vocación de enseñante, debiendo tener ya construida, en el acceso a su formación, elementos de su identidad profesional, mientras que otros formadores entienden que la identidad es un elemento a ser construido durante la formación.

En el ámbito de la *orientación del trabajo sobre metodologías de enseñanza de las matemáticas,* los formadores muestran muy diversas aproximaciones: poner de relieve enfoques de enseñanza, desde la perspectiva de las matemáticas, desde los recursos potentes para su enseñanza, desde la gestión y evaluación de tareas de enseñanza de las matemáticas o desde un planteamiento de aprender matemáticas a través de la Resolución de Problemas.

En relación con la *orientación de las prácticas en los institutos de secundaria y la relación instituto-Universidad*, los formadores asignan diferentes pesos a este elemento de la formación, mostrando diferentes utilidades del mismo, y entienden de forma diferente el papel del tutor del centro de prácticas, así como la relación entre dichos centros y la Universidad. Dicha relación se percibe como articulada en torno a la relación entre los formadores en ambos centros, al aprovechamiento del contenido de las mismas, o a las relaciones institucionales entre ambos.

En el medio y largo plazo, nuestra investigación pretende avanzar hacia un modelo de análisis del conocimiento del formador de profesores que enseñan matemáticas. Para ese objetivo, pensamos que estos seis organizadores de las creencias de los formadores nos ayudarán a identificar algunos aspectos clave que permean dicho conocimiento. Para ello, en futuras investigaciones, pretendemos explorar los vínculos que diferentes creencias tienen con los potenciales perfiles de formadores, para posteriormente relacionarlos con su conocimiento, su formación y su trayectoria profesional.

## Agradecimientos

Esta investigación fue financiada por el centro de investigación COIDESO de la Universidad de Huelva, y por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, del Gobierno de España (Proyecto: RTI2018-096547-B-I00).

## Referencias

Beswick, K., y Chapman, O. (2012). Mathematics teacher educators' knowledge for teaching. *Paper presented at the12th International Congress on Mathematics Education*, Coex, Seoul, Korea.

Beswick, K., y Goos, M. (2018). Mathematics teacher educator knowledge: What do we know and where to from here? *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(5), 417-427.

Charmaz, K. (2014). *Constructing Grounded Theory*. Second Edition. London : Sage

Chauvot, J. (2009). Grounding practice in scholarship, grounding scholarship in practice: Knowledge of a mathematics teacher educator–researcher. *Teaching and Teacher Education, 25*(2), 357-370.

Darling-Hammond, L. (2006). *Powerful teacher education: Lessons from exemplary programs*. San Francisco: Jossey-Bass.

Dreher, A., Lindmeier, A., Heinze, A., y Niemand, C. (2018). What Kind of Content Knowledge do Secondary Mathematics Teachers Need? A Conceptualization Taking into Account Academic and School Mathematics. *Journal für Mathematik-Didaktik 39*(2), 319-341.

Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Morata.

Glaser, B., y Strauss, A.L. (1967). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research*. Chicago: Aldine De Gruyter.

Goldin, G., Rösken, B., y Törner, G. (2009). Beliefs – no longer a hidden variable inmathematical teaching and learning processes. In J. Maass y W. Schlöglmann (Eds.), *Beliefs and attitudes in mathematics education* (pp. 1-18). Rotterdam, The Netherlands:Sense Publishers

Grbich, C. (2003). *New Approaches in Social Research*. London: SAGE.

Jaworski, B., y Huang, R. (2014). Teachers and didacticians: key stakeholders in the processes of developing mathematics teaching. *ZDM Mathematics Education*, 46, 173-188.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* New York: Academic Press.

Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9-15.

Spradley J. (1979). *The Ethnographic Interview.* EEUU: Hardcourt.

Zazkis, R., y Zazkis, D. (2011). The significance of mathematical knowledge in teaching elementary methods courses: Perspectives of mathematics teacher educators. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(3), 247-263.

# MTSK en Educación Infantil

M. Cinta Muñoz-Catalán
Nuria Joglar-Prieto
Mónica Ramírez-García
M. Mar Liñán-García

## Resumen

Con el objetivo de avanzar en la comprensión de la naturaleza del conocimiento especializado del maestro de Educación Infantil para enseñar matemáticas, hemos llevado a cabo una revisión de las investigaciones realizadas y en curso de investigadores de la Red Iberoamericana MTSK. Considerando esta revisión y nuestra experiencia como investigadores y formadores, hemos planteado algunos aspectos del conocimiento que estos profesores ponen en juego específicamente, y de forma diferente a como lo hacen profesionales de otras etapas, al tratarse de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de escolares entre 3 y 6 años. Discutiremos después sobre alguno de estos aspectos a partir del visionado de un episodio de vídeo y finalizaremos este informe incluyendo datos sobre los equipos que están trabajando en la actualidad en esta temática dentro de la Red Iberoamericana MTSK para facilitar la colaboración.

## Palabras clave

MTSK, educación Infantil, formación de maestros, formadores (matemáticos) de maestros

## Abstract

In order to deepen our understanding of the content and nature of the specialised mathematical knowledge possessed by the early childhood teacher, we present a review of the studies carried out so far applying the MTSK model to the analysis of these professionals. In addition, some specific aspects of the knowledge that these teachers mobilize to teach mathematics to school children between 3 and 6 years will be discussed using a video-recorded episode to trigger the discussion. We close this report including data on the teams that are currently working on this topic within the MTSK Ibero-American Network.

## Keywords

MTSK, early childhood mathematics education, service teacher training, mathematics teacher educators

Muñoz-Catalán, M. C., Joglar-Prieto, N., Ramírez-García, M. y Liñán-García M. M. (2019). MTSK en educación infantil. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (24-31). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Introducción

La red Iberoamericana funciona impulsada por un conjunto de temáticas que, interactuando entre ellas, abordan desde la investigación aspectos relevantes sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde la óptica del profesor. La temática 2 se preocupa por el conocimiento especializado del profesor en la etapa de Educación Infantil, planteándose dos grandes objetivos:

- Profundizar en las características/naturaleza del conocimiento matemático especializado del profesor de Educación Infantil.
- Avanzar en la caracterización de este modelo en relación con la etapa.

Uno de los focos de la presentación de esta temática en este congreso era la difusión y descripción de las investigaciones realizadas hasta el momento dentro de la misma por miembros de la red o que estuvieran en curso, pero con la exigencia de que planteáramos un primer avance de la caracterización del modelo MTSK para el caso del maestro de Infantil. Decidimos incluir una parte en formato taller para dar la oportunidad a los asistentes a que se enfrentaran al análisis con el modelo MTSK de un vídeo sobre una tarea de descomposición numérica del 5 con distintos registros de representación. Esto permitiría a investigadores asistentes a la sesión, y no familiarizados con la aplicación del modelo a esta etapa, ponerse en situación y comenzar a comprender las peculiaridades que impone la etapa. Así, la sesión ha sido estructurada de la siguiente manera:

1. Mostrar las investigaciones realizadas y en curso que se están acometiendo en la Red.
2. Reflexionar conjuntamente sobre las características del conocimiento especializado del profesor de Educación Infantil respecto de la enseñanza de las matemáticas partiendo del visionado de un episodio de clase.
3. Generar una primera aproximación a los elementos característicos del modelo MTSK en Educación Infantil a partir del estudio de los resultados de las investigaciones realizadas o en curso.
4. Mostrar una panorámica prospectiva de la investigación en nuestra red iberoamericana sobre esta temática.

## Presentación de investigaciones realizadas

Indicamos, a continuación, los trabajos realizados en torno al conocimiento especializado del maestro de Educación Infantil.

En 2017 Muñoz-Catalán, Liñán-García y Ribeiro (2017) se plantea una propuesta de conocimiento especializado deseable para enseñar la resta desde una perspectiva avanzada, que suponía la primera vez que se usaba el MTSK para organizar y fundamentar la formación inicial de estudiantes para maestros de Educación Infantil desde la investigación.

Partiendo de una visión desde la práctica en el aula, Muñoz-Catalán, Joglar-Prieto, Ramírez-García, Escudero-Domínguez, y Aguilar, (en prensa), realizan una reflexión sobre la naturaleza y contenido del conocimiento especializado del profesor de Infantil de Aritmética y Geometría y sobre las relaciones entre elementos de conocimiento.

Más adelante, y de nuevo tratando de incorporar una visión de la matemática elemental desde un punto de vista superior, Muñoz-Catalán, Ramírez, Joglar, y Carrillo (en prensa) describen el conocimiento especializado del profesor de matemáticas para promover pensamiento algebraico en Educación Infantil a partir de una tarea de descomposición aditiva.

Los autores mencionados en los tres trabajos anteriores han participado en varios capítulos del libro titulado *Didáctica de matemáticas para maestros de Educación Infantil* (Muñoz-Catalán y Carrillo, 2018) manual orientado a la formación inicial y continua de maestros.

## Presentación de investigaciones en curso

En la actualidad se está desarrollando la primera tesis doctoral que utiliza el modelo MTSK para comprender el conocimiento del profesor de Infantil para enseñar geometría. El objetivo de este trabajo es doble: por una parte, la autora se cuestiona la adecuación del modelo MTSK para la etapa de Educación Infantil y, por otra, trata de identificar elementos de conocimiento específicos del maestro de Infantil. Ana Escudero-Domínguez (U. Sevilla) está llevando a cabo esta investigación bajo la dirección de M.ª Cinta Muñoz-Catalán y José Carrillo.

El *Proyecto ARANMATINF* (Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Infantil en Aranjuez) se desarrolla en un contexto colaborativo de formación continua en el que participan maestras en ejercicio de Educación Infantil (Aranjuez, Madrid, España) e investigadores- formadores de maestros de Madrid, Sevilla y Chile todos miembros de la Red Iberoamericana MTSK. Durante las sesiones, se reflexiona especialmente sobre el papel que juega el uso de distintos sistemas de representación y las conversiones entre ellos como modo de promover el aprendizaje matemático en la etapa y el pensamiento flexible. Este proyecto tiene como objetivo principal caracterizar elementos del MTSK para el profesor de Educación Infantil desde la perspectiva conjunta de maestras y formadores-investigadores.

## Taller: Análisis del conocimiento especializado de un maestro de educación infantil

Se plantea el visionado conjunto de un fragmento de vídeo, de 11 minutos de duración, de una clase con un grupo de 24 alumnos de 5 años (tercer curso de segundo ciclo de Educación Infantil en el contexto español), en una escuela pública de la Comunidad de Madrid. La tutora del grupo participa en el proyecto formativo *ARANMATINF* citado anteriormente.

Esta sesión es previa al comienzo de la participación de la maestra en un contexto formativo y posterior a otra sesión, donde la maestra trabajaba descomposiciones aditivas del número 6 con diferentes representaciones de una casita de muñecos y fichas punteadas (cuyo análisis está recogido en Muñoz-Catalán, Ramírez, Joglar, y Carrillo, en prensa). Una formadora-investigadora y una maestra jubilada, ambas miembros de *ARANMATINF*, ejercen de maestras en el episodio. La maestra tutora del aula está presente durante la sesión, aunque apenas interviene. El objetivo de que la formadora-investigadora fuera la responsable de impartir la sesión era doble: en primer lugar, se trataba de ganar la confianza de las maestras al presentarnos como *co-teachers* para así poder hablar desde nuestra práctica en el aula como ellas, y relatar, empatizando con sus problemas y dificultades. En segundo lugar, complementar el uso de sistemas de representación y sus conversiones a partir de la sesión previa que había llevado a cabo la tutora aprovechando las oportunidades detectadas por los investigadores tras revisar la sesión (Liñán-García, 2017). También se consideró como objetivo favorecer la flexibilidad matemática planteando problemas que no habían tratado antes para ver sus respuestas, poniendo el foco en las propiedades de la suma de números naturales.

La consigna que se da a los asistentes a la temática justo antes de comenzar el visionado del episodio es: “Identificad aspectos del conocimiento MTSK que se moviliza en el aula en este episodio”. Los asistentes se agrupan para reflexionar sobre el vídeo, intentando que en cada grupo haya una persona familiarizada con el modelo MTSK. Se facilitó una tabla en blanco con todas las categorías del modelo MTSK para recoger los análisis en cada grupo y se coordinó una discusión posterior al trabajo en grupos para poner en común los análisis realizados. Esa discusión fue también complementada con la proyección de las observaciones y análisis de las autoras de este informe.

Como resultado de la reflexión final conjunta y de manera resumida, hemos observado que es difícil, incluso para personas muy familiarizadas con el modelo MTSK, distinguir si los elementos de conocimiento especializado identificados en el análisis son evidencias o indicios, especialmente dentro de la subdimensión del MK, aunque todos coinciden en que sí las hay a lo largo del episodio. Algunos asistentes cuestionan la existencia de diferencias entre el MK del maestro de Educación Infantil y de una persona cualquiera. Sin embargo, se indica que, si pensamos en contextos de formación inicial, sí que se ven claros aspectos de MK que son relevantes en la formación de estos profesionales (podemos pensar en cómo están organizados los temarios de las asignaturas de Desarrollo del Pensamiento Lógico-Matemático y su didáctica en nuestros planes de estudios de los Grados de Maestro en Educación Infantil). En la tabla 1 presentamos el análisis efectuado por las autoras de este taller, focalizado en las categorías de *definiciones y propiedades* y *procedimientos*. Se puede observar que los elementos de conocimiento especializado son específicos del profesional de esta etapa escolar.

Algunos asistentes apuntan a la necesidad de partir de aspectos de PCK al analizar episodios de esta etapa para comprender e identificar aspectos de MK. Es decir, que parece evidente para varios participantes que aspectos del PCK de la maestra influyen mucho en cómo se desarrolla la sesión y animan a los investigadores a profundizar en el estudio de cómo estos aspectos, y de forma más general aspectos del conocimiento pedagógico general (GPK), influyen en el MTSK que moviliza la maestra. Quizá en etapas posteriores, como podría ser en Bachillerato, esta relación vaya en el otro sentido. Todos coinciden en que hay indicios del conocimiento de la maestra sobre diferentes sistemas de representación de la cantidad (tanto simbólico-numérico, como gráfico y manipulativo con las fichas punteadas). Dentro de las prácticas matemáticas, se plantea un debate interesante durante la sesión, especialmente reflexionando sobre la diferencia entre validación y comprobación del resultado, pues parece que hay más consenso en interpretar indicios de conocimiento de los procesos relacionados con la resolución de problemas (dentro de KPM también) o más claramente indicios de uso de la resolución de problemas como estrategia de enseñanza dentro de KMT, que indicios de conocimiento sobre formas de validación (KPM).

| | |
|---|---|
| **Definiciones y propiedades** | -La profesora sabe la importancia de concebir la colección de 5 ositos ("los ositos estaban juntos").<br>-El problema propuesto por la profesora pone de relieve la importancia que le otorga a hallar el cardinal del conjunto como iteración del 1.<br>-Conoce el papel de los problemas de combinación para trabajar el esquema parte-todo. En la relación parte-todo inicialmente se parte del total para buscar la descomposición en unidades. Refuerza esta relación mediante la palabra "Juntos", conectando la ficha del material manipulativo con la configuración binaria de la representación de los 10 primeros números. Otras expresiones usadas son: "Hay que separarlos" o "¿Cuántos ositos hay en total en la casa, lorito?", repetidas en diversas ocasiones.<br>-Usa el signo igual para mostrar la equivalencia entre el cardinal del conjunto de osos y sus descomposiciones: "Lo vamos a poner igual a como está ahora".<br>-Principios de conteo: cardinalidad, correspondencia 1 a 1 y abstracción.<br>-Conocimiento sobre la aplicación o función biyectiva (correspondencia oso con número y también correspondencia número de oso con agujero de la ficha correspondiente del material manipulativo ya mencionado). |
| **Procedimientos** | -Usa el procedimiento de la enumeración cuando va pasando por cada oso de la colección para ver dónde está cada uno de ellos.<br>-La profesora promueve la relación parte-todo, mediante la composición y descomposición del número.<br>-La profesora respeta la ordenación espacial de los osos en la casa cuando utiliza su representación con el material utilizado en el caso de los 10 primeros números, con el fin de favorecer la conexión entre los dos sistemas de representación. |

Tabla 1: indicadores indentifcados en el video proyectado correspondientes a las categorías de Definiciones y Propiedades y Procedimientos.

## Avance de elementos característicos del modelo en Educación Infantil

Antes de describir algunos elementos concretos que parecen caracterizar el modelo MTSK en Educación Infantil, queremos enumerar ciertas características más generales de esos profesionales que nos parecen importantes para tal fin:

- Los maestros de Educación Infantil muestran preocupación por los alumnos, considerándolos de una manera integral (quizá con más intensidad que los profesionales de otras etapas).
- La formación inicial de estos profesionales está centrada en contenidos psicopedagógicos generales.
- Los maestros de Educación Infantil tienen en general escasa formación en contenidos matemáticos y didáctico-matemáticos.
- Parte de los conocimientos matemáticos de estos profesionales son intuitivos, con limitada capacidad para la formalización.
- Los maestros de Educación Infantil, en general comparten una inquietud por mejorar su enseñanza de las matemáticas. Se preocupan especialmente por el uso del lenguaje en el aula, especialmente por su rigurosidad.
- Los maestros de Educación Infantil en general prestan mucha atención a cuestiones anímicas, al uso de colores o juguetes como captadores de atención, los cuales pueden considerarse distractores en otras etapas.

- Estos profesionales buscan contextos cercanos y con significado para el niño, partiendo de centros de interés o inventando historias.
- Su visión más holística y personal del aprendiz les lleva a tener unas concepciones diferentes a los profesionales de otras etapas. Este podría ser un subdominio especialmente interesante para profundizar en esta etapa.
- Cuando analizamos la parte PCK, existe una relación muy estrecha con el conocimiento pedagógico general (GPK), mucho más fuerte que en los profesionales de otras etapas educativas.

Tras esta caracterización del profesor de Educación Infantil, resumimos a continuación aspectos del conocimiento especializado de este profesional respecto de la enseñanza de la matemática, basándonos en el análisis de los estudios previos desarrollados en la red. Utilizamos como organizador los dos grandes subdominios del modelo MTSK.

## Aspectos sobre el conocimiento matemático (MK)

En contra de lo que en un primer momento se podría pensar, los maestros de Educación Infantil requieren un sólido MK, que además es específico de la etapa. Se resumen a continuación algunas características dentro de cada subdominio.

- KoT: es denso, específico y está en íntima ligazón con su PCK. Incluye la esencia de los conceptos matemáticos, al desproveerlos del aparataje simbólico y formal de etapas posteriores. Por ejemplo, conocer el papel de la designación en la construcción de las bases del conocimiento matemático o el papel de la enumeración en la construcción del conocimiento sobre el número serían conocimientos de este subdominio.
- KPM: aquí aparece la definición de prácticas específicas, base de las formales. Por ejemplo, la comparación (para validar, cantidad de magnitud, base de otros procesos como la clasificación, seriación), la ordenación y sistematización de resultados, las cuales permiten comprobar la obtención de todos los casos posibles (p. ej. descomposición del número 6). Dentro de este subdominio también cobra especial importancia el lenguaje preciso y específico, por ser una etapa creadora del lenguaje. Las maestras manifiestan dudas como, por ejemplo: En el patio hay una alcantarilla con forma circular. Si un niño dice: *Esto es un círculo*, ¿la maestra debe responder: *muy bien?* ¿o debe corregir: *no, es una tapa de alcantarilla con forma circular*? Preocupadas por evitar la confusión entre el objeto matemático y su representación, le dan importancia a ayudarlos a entender qué es un círculo para que comprendan su definición formal en el futuro. Es también importante que las maestras entiendan la diferencia entre demostrar y validar, aprecien que son dos prácticas matemáticas diferentes.
- KSM: A pesar de que los maestros de Educación Infantil intuyen su importancia, en los análisis del conocimiento que movilizan, este subdominio está casi ausente. Se da una paradoja pues desde la perspectiva de los formadores, el KSM debería ser un subdominio caracterizador de este profesional, pero todavía no lo hemos podido constatar. Lo que sí parece claro tras los primeros estudios es que la intuición desarrollada a través de la práctica profesional y formación posterior de las maestras les ayuda a identificar las propiedades que parecen esenciales para una construcción futura. El trabajo conjunto entre maestros y formadores puede ayudar a caracterizar y definir este subdominio en esta etapa.

## Aspectos sobre el conocimiento didáctico del contenido (PCK)

- KMT: Este subdominio está presente con una gran riqueza, variedad y concreción, además de especificidad. Está conectado simultáneamente con elementos de MK y con elementos del conocimiento pedagógico general (GPK). Se observan, en muchos episodios de vídeos de maestras de Infantil, acciones de las maestras sustentadas en aspectos de su conocimiento que caerían dentro de este subdominio. Por ejemplo, las maestras hacen un especial esfuerzo por hacer accesible el contenido a los alumnos. Se observa también una gran riqueza, variedad y concreción en las estrategias de enseñanza y recursos utilizados: en el análisis de los recursos, aun considerando sus características matemáticas, priorizan en ocasiones aspectos generales como el color o material, como mediador/facilitador del aprendizaje matemático. Por ejemplo, las fichas punteadas, o las regletas de Cuisenaire: cada figura tiene como característica un color, y siempre el mismo, lo que facilita inicialmente al estudiante la asociación con el conocimiento buscado. Poco a poco, esta asociación se debe ir perdiendo para evitar obstáculos futuros. La especificidad de los aspectos de conocimiento dentro de este subdominio podría ilustrarse con el conocimiento de las maestras sobre la importancia del uso de distintos sistemas de representación y de la conversión/comparación en paralelo como estrategia de enseñanza. Su conocimiento sobre teorías de enseñanza de contenidos matemáticos suele tener un origen personal, intuitivo, desde la práctica, no formal, y también ligado al GPK.
- KFLM: también aparece como específico de la etapa y entrelazado a GPK. Puede diferenciar a los maestros expertos y noveles. Los maestros expertos, frente a los noveles, poseen expectativas más elevadas sobre los alumnos incluso antes de conocerlos. Su conocimiento sobre teorías de aprendizaje específicas sobre conocimientos matemáticos suele tener un origen personal. Tienen en cuenta las características de cada uno de sus alumnos en la propuesta de cada actividad y para evaluar el aprendizaje (GPK). Por ejemplo, vigilan las reacciones anímicas.
- KMLS: al igual que los subdominios anteriores, parece ser específico de la etapa y estar entrelazado a CPK. Los maestros de Educación Infantil, en general, poseen una visión práctica del currículum: saben perfectamente qué conocen sus alumnos y qué son capaces de aprender. Además, saben cómo secuenciar dichos conocimientos y cómo conectarlos entre sí y con otros posteriores. Le conceden poca importancia al conocimiento del currículum oficial.

## Presentación de la investigación planificada como trabajo en red

Tenemos constancia de que las siguientes personas están trabajando sobre esta temática: Noemí Pizarro (Universidad Pedagógica de Chile), Soledad Estrella y Pedro Vidal (Pontificia Universidad Católica de Valparaíso), y un grupo en Brasil liderado por Miguel Ribeiro. En España, en la Universidad de Huelva, Myriam Codes; en la Universidad de Oviedo, Álvaro Aguilar; en la Universidad Complutense de Madrid, Nuria Joglar, Mónica Ramírez, Juan Miguel Belmonte, Blanca Arteaga, Esperanza Hernández; y en la Universidad de Sevilla, M.ª Cinta Muñoz-Catalán (actual coordinadora de la temática), Ana Escudero-Domínguez, Víctor Javier Barrera-Castarnado, M.ª Mar Liñán-García y Rocío Barragán.

Desde la Universidad de Huelva, Myriam Codes lidera un proyecto con el objetivo de *comprender el conocimiento especializado que movilizan los Estudiantes para Profesor de Educación Infantil cuando analizan material didáctico (cuentos infantiles, dibujos animados) y lo trabajan para llevarlo al aula*. Así, los informantes son los estudiantes para profesor de Educación Infantil. Este proyecto cuenta con la colaboración de M.ª Cinta Muñoz-Catalán de la Universidad de Sevilla.

En la Universidad Complutense se trabaja en un proyecto con el objetivo de *comprender el conocimiento especializado de profesores de Educación Infantil para la enseñanza de Aritmética, Geometría, Medida y Álgebra en un contexto colaborativo de desarrollo profesional*. En este caso, los informantes son profesores en activo, formadores-investigadores, y ocasionalmente, estudiantes para profesor. Colaboran desde la Universidad Pedagógica de Chile, Noemí Pizarro, y desde la Universidad de Sevilla, M.ª Cinta Muñoz-Catalán y M.ª Mar Liñán-García.

Desde la Universidad de Sevilla, M.ª Cinta Muñoz-Catalán, M.ª Mar Liñán-García y Víctor J. Barrera-Castarnado trabajan en un proyecto que tiene como objetivo *el uso de MTSK en el diseño de tareas de aprendizaje para los estudiantes para profesor de Infantil*. En este caso, los informantes son estudiantes para profesor y formadores.

También desde la Universidad de Sevilla, M.ª Cinta Muñoz-Catalán y M.ª Mar Liñán-García han comenzado a abordar su preocupación por *identificar y caracterizar las concepciones sobre la matemática y sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática en Educación Infantil*. Los informantes son profesores de Educación Infantil y estudiantes para Profesor de esta etapa. Colaborarán en este proyecto Álvaro Aguilar de la Universidad de Oviedo y, desde la Universidad Complutense de Madrid, Nuria Joglar, Mónica Ramírez y Esperanza Hernández.

## Referencias


Liñán García, M.M. (2017). *Conocimiento Especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria* (Tesis Doctoral). Universidad de Huelva, Huelva, España http://hdl.handle.net/10272/14230

Muñoz-Catalán, M.C. y Carrillo, J. (Eds.) (2018). *Didáctica de matemáticas para maestros de Educación Infantil.* Madrid: Editorial Paraninfo.

Muñoz-Catalán, M. C., Joglar, N., Ramírez, M., Escudero-Domínguez, A.M., Aguilar, Á. (En prensa). El conocimiento especializado del profesor de infantil desde el aula de matemáticas. Ediciones Universidad Salamanca.

Muñoz-Catalán, M.C., Liñán-García, M.M. y Ribeiro, M. (2017). El conocimiento especializado para enseñar la operación de resta en Educación Infantil. *Cadernos de Pesquisa*, 24, 4-19. Número especial. DOI: http://dx.doi.org/10.18764/2178-2229.v24nespecialp4-19.

Muñoz-Catalán, M.C., Ramírez, M., Joglar, N. y Carrillo, J. (en prensa). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas para promover pensamiento algebraico en Educación Infantil a partir de una tarea de descomposición aditiva.

# El dominio afectivo y MTSK

Mª. Isabel Pascual
Joaquín Fernández-Gago
María García
José Mª. Marbán
Ana Maroto

## Resumen

El presente documento refleja el contenido de la ponencia homónima que tuvo lugar en el IV Congreso Iberoamericano MTSK, que tuvo como objetivo discutir y justificar las influencias entre los planos, afectivo y cognitivo, en el conocimiento especializado del profesor. Desde la revisión teórica de los constructos que articulan el dominio afectivo, pretendemos recoger el testigo de uno de los retos planteados en las III Jornadas del Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Huelva, sentando las bases para la inclusión del Dominio Afectivo en el modelo MTSK. De la misma forma que se hizo con el Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), presentamos una propuesta de relaciones con el subdominio de Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM).

## Palabras clave

Dominio Afectivo, MTSK, profesor, matemáticas.

## Abstract

This paper reflects the content of the homonymous presentation that took place at the IV MTSK Ibero-American Congress, which aimed was to discuss and justify the influences between the affective and cognitive dimensions, in teacher's specialized knowledge. From the theoretical revision of the constructs that articulate the affective domain, we intend to collect the witness of one of the challenges posed in the III Conference of the Research Seminar in Didactics of Mathematics at the University of Huelva, laying the foundations for the inclusion of the Domain Affective in the MTSK model. In the same way that it was done with the Knowledge of Mathematics Teaching (KMT), we present a proposal of relations with the subdomain of Knowledge of features of learning mathematics (KFLM).

## Keywords

Affective domain, MTSK, teacher, mathematics.

Pascual, Mª.I., Fernández-Gago, J., García, Mª, Marbán, J.Mª y Maroto, A. (2020). El dominio afectivo y MTSK. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (32-40). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Introducción

En el contexto de los trabajos sobre conocimiento profesional desde la perspectiva del modelo MTSK (Carrillo *et al.*, 2018), se considera la influencia de las creencias del profesor en su conocimiento especializado como un elemento que ayuda a comprender la filosofía que subyace a las actuaciones del profesor y que modula el conocimiento especializado en cada uno de los subdominios del modelo. No obstante, existe la necesidad manifiesta de retomar la investigación en relación al Dominio Afectivo y el MTSK con el objetivo de integrar otros constructos del dominio afectivo y definir un enfoque teórico sobre los mismos (Sosa, Contreras, Gómez-Chacón, Flores-Medrano y Montes, 2017). Nuestro objetivo es avanzar en estos dos sentidos, de un lado esclareciendo los constructos a considerar desde el punto de vista de los trabajos seminales de McLeod (1992) y sus siguientes revisiones, y de otro lado, buscando la convergencia entre el Dominio Afectivo y el modelo MTSK. Un ejemplo de esta aproximación, puede verse en Pascual, Marbán, Maroto, Fernández-Gago y García (2020) para el caso del subdominio de *Conocimiento para la enseñanza de las matemáticas (KMT)*, en estas mismas actas. Con todo ello, la aproximación que se presenta no es única y el trabajo que actualmente se desarrolla en el grupo MTSK-Afectos, dentro de la Red Iberoamericana MTSK, se encamina a considerar las relaciones en tres líneas diferenciadas: (1) la consideración de los afectos como una red que articula las creencias del profesor de matemáticas, que a su vez permean su conocimiento especializado; (2) el estudio del Dominio Afectivo del profesor de matemáticas como complemento a las investigaciones sobre su conocimiento especializado; y (3) el estudio del conocimiento del profesor en relación a los factores afectivos que intervienen en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Desarrollaremos estas tres perspectivas en relación al estudio del subdominio de *Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)* tras la revisión de las componentes del Dominio Afectivo.

## Componentes del dominio afectivo

Siguiendo la estructura propuesta por McLeod (1992), consideramos el dominio afectivo como una amplia gama de actitudes, creencias, emociones y valores, interrelacionados entre sí y que trascienden el dominio de la cognición. Los trabajos en relación al dominio afectivo han puesto de manifiesto la complejidad en el abordaje de constructos que deben ser inferidos y cuya conceptualización y delimitación puede ser confusa (Grootenboer y Marshman, 2016). La caracterización de los elementos que constituyen el dominio afectivo, se construye atendiendo a los continuos cognición-afectividad, estabilidad-inestabilidad e intensidad-moderación (Grootenboer, 2003; Leder y Grootenboer, 2005). De esta forma, se presentan en un extremo las creencias como el elemento de mayor estabilidad y mayor influencia de aspectos cognitivos; y en el otro extremo, las emociones, como respuestas con menor perdurabilidad en el tiempo, pero más intensas y dependientes de los afectos (Ver Figura 1. Componentes del dominio afectivo y sus relaciones; extraída de Grootenboer, 2003; Leder y Grootenboer 2005)

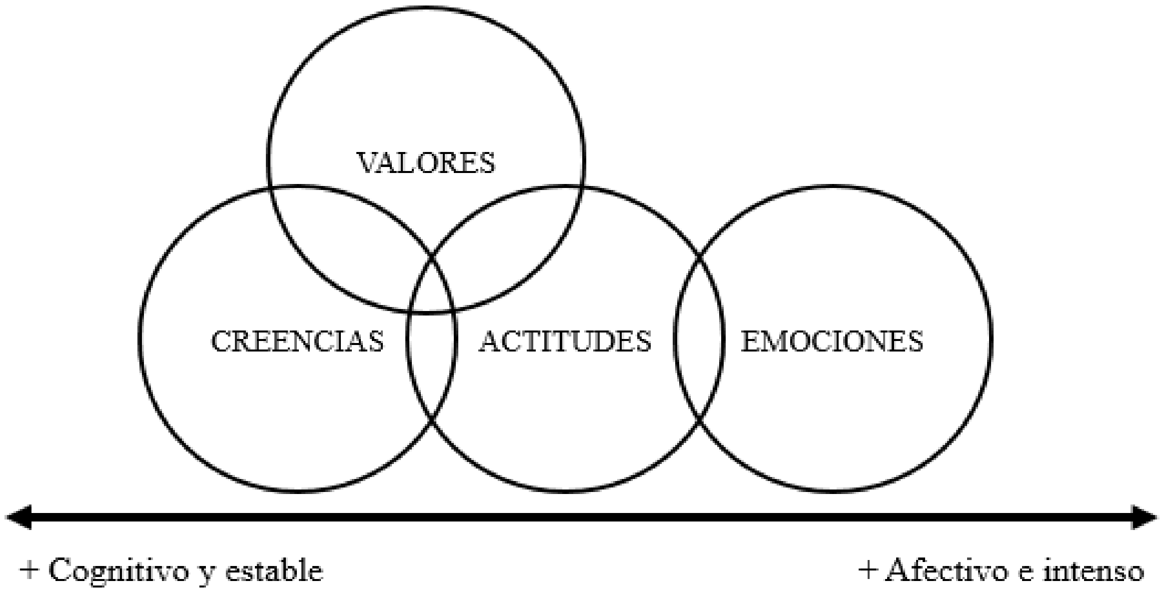



Figura 1. Componentes del dominio afectivo y sus relaciones.

En adelante, profundizaremos en la caracterización de las creencias, las actitudes y las emociones, como dimensiones que según McLeod (1992) se articulan de forma que las creencias son elementos que influyen para que surjan emociones, y a su vez, las actitudes se originan por repetidas reacciones emocionales. Poniendo de manifiesto una vez más que el estudio de cada una de ellas, está íntimamente relacionado con la exploración de las demás. Existen además otros constructos derivados de los estudios posteriores en Dominio Afectivo, como la motivación y el compromiso, que serán profundizados en trabajos posteriores.

## Creencias

Las creencias del profesor son el constructo del Dominio Afectivo más desarrollado en los trabajos de conocimiento especializado del profesor de matemáticas, en línea con el interés que ha suscitado en el campo de la Educación Matemática. Este interés se debe principalmente a que éstas influyen significativamente en la toma de decisiones respecto de las intenciones curriculares. El origen de la inclusión de las creencias en el modelo MTSK se sitúa en los trabajos iniciales de Carrillo *et al.* (2014), quienes justifican la presencia central de las creencias en el modelo como una variable que ayuda a comprender la filosofía que hay tras las actuaciones de los profesores. Otros autores se manifiestan también en este sentido, argumentando que las creencias de profesores son consideradas como un principio explicativo de su práctica (Gómez-Chacón, 2008; Skott 2015).

Según Hannula (2011), las creencias tienen su base en experiencias personales o en el contexto social, y no provocan consecuencias de manera aislada. En este sentido, Schoenfeld (2015) manifiesta que son los sistemas de creencias los que modelan el comportamiento, y que su activación o la diferencia entre los niveles de activación de las creencias, dependen de los diferentes contextos en los que se encuentre el profesor.

Algunas características y atributos de las creencias que usaremos y que hemos tomado de Skott (2015b) y Fernández-Gago (2012), son:

- las creencias tienen cierto grado de convicción por parte del sujeto,

- tienen componente afectivo por estar cargada de valores,
- tienen cierto grado de estabilidad,
- los sujetos pueden tener cierto grado de compromiso con ellas, y a veces tienen que decidir entre varios compromisos que pueden ser contradictorios, y
- las creencias tienen cierto grado de consciencia (pueden llegar a ser inconscientes).

En la inclusión de las creencias en el modelo MTSK, Carrillo *et al.* (2014) diferencian las creencias respecto a las matemáticas y las creencias en relación a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, siendo estas últimas las más estudiadas (Grootenboer 2008; McLeod 1992; Mosvold and Fauskanger 2014; Pajares 1992). En los trabajos con el modelo MTSK, se han estudiado las creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a través de las categorías del instrumento CEAM (Carrillo, 1996): *metodología, concepción de la matemática escolar, concepción del aprendizaje, papel del alumno* y *papel del profesor.* En relación con las creencias sobre las matemáticas, siguiendo a Ernest (1989), se diferencian las visiones: *instrumentalista, platónica* y *de resolución de problemas.*

Los estudios que hasta ahora se han llevado a cabo, ponen el foco en la relación entre el conocimiento especializado del profesor y sus creencias, en los dos sentidos mencionados anteriormente. Ejemplos de ello son los trabajos de Aguilar-González, Muñoz-Catalán y Carrillo (2019), Flores y Carrillo (2014) o Vasco y Climent (2018). En estos trabajos, y en coherencia con lo expuesto sobre las creencias y su contexto, no se incide en las posibles inconsistencias de los profesores entre sus creencias y su práctica, sino que se intenta dar sentido a sus creencias y conocimiento como un sistema integrado sensible, siguiendo la línea de Leatham (2006).

Más allá de la influencia de las creencias en el conocimiento especializado del profesor, nos cuestionamos qué relaciones con los demás constructos del dominio afectivo pueden configurar los diferentes sistemas de creencias.

## Actitudes

Un denominador común en la caracterización estructural del Dominio Afectivo por parte de diferentes autores, además de McLeod (1992), ha sido la inclusión de las actitudes como ingrediente básico. No en vano, el estudio de las actitudes, en particular en contextos de investigación educativa, tiene ya un recorrido cuyos orígenes se remontan más de un siglo atrás en el tiempo.

Una de las cuestiones que, probablemente, más han influido en el interés por comprender las actitudes en el caso particular de los contextos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se encuentra en la incapacidad de los planteamientos más clásicos, de corte positivista y puramente cognitivos, para explicar los problemas presentes en la realidad educativa y ofrecer respuestas adecuadas para solucionar los mismos. Aceptar que el planteamiento desde el cual se pensaban las matemáticas y que la actuación docente no permitía la adecuación de la respuesta a los problemas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, supuso una redefinición de los objetivos educativos y una mayor atención a aspectos endógenos de los propios aprendices (véase, por ejemplo, Gómez-Chacón, 2000).

Dentro de los objetivos de carácter afectivo y de los elementos endógenos a los que se acaba de hacer referencia aparecieron ya desde un principio las actitudes. Esto no significa, sin embargo, que haya ya hoy en día un acuerdo o consenso claro a la hora de conceptualizar este constructo, mostrándose habitualmente discrepancias entre autores, tomaremos como referencia la definición de Phillip (2007, p. 259) que considera las actitudes como *formas de actuar, sentir o pensar que muestran la disposición u opinión de cada uno.* A pesar de la falta de consenso, resulta fácil descubrir aspectos comunes en la mayoría de las caracterizaciones, como son su resistencia al cambio y su carácter, por tanto, muy estable, además de su identificación como algo no innato al sujeto sino adquirido y su interpretación únicamente plausible en términos del objeto de la actitud, esto es, la necesidad de hablar siempre de *actitud hacia*.

El interés ya destacado por el estudio de las actitudes ha sido especialmente desarrollado en el campo de la investigación educativa desde enfoques o paradigmas cuantitativos, lo que ha requerido el diseño y validación de instrumentos de medición válidos y fiables, atendiendo a la consideración de objeto (actitudes hacia), intensidad y dirección (positiva o negativa) como componentes de las actitudes de las cuales puede encontrase una excelente descripción en Anderson y Bourke (2013), que ayuda a comprender mejor el constructo.

Los trabajos seminales de Aiken y Dreger (1961) y del propio Aiken (1970), en su intento de medir las actitudes hacia la matemática, arrojan luz sobre las distintas facetas del constructo, así como la escala de Fennema and Sherman (1976) para el estudio de las diferencias entre hombres y mujeres en sus actitudes hacia las matemáticas y de las posibles influencias de las actitudes en el rendimiento académico en matemáticas. Asimismo, es necesario destacar entre los trabajos en lengua española el de Gairín (1990), pionero en este contexto en la medición de actitudes hacia las matemáticas.

Con todo ello, un factor clave en el desarrollo de actitudes hacia las matemáticas, se encuentra en las respuestas emocionales similares y repetidas que experimentan tanto los alumnos como los profesores (Phillip, 2007), con lo que se hace necesario reflexionar sobre esta otra componente del Dominio Afectivo.

## Emociones

La emoción hace referencia a un constructo de naturaleza multifacética, pues se refiere a estados complejos del organismo, y a respuestas globales en las que intervienen componentes fisiológicos, cognitivos y conductuales (Solomon, 2008). Es por ello que dependiendo del componente, se puede dar una definición de ésta y definir un instrumento para su medida. Nosotros nos adherimos a las teorías de la valoración para estudiar las emociones del profesor de matemáticas.

Si hablamos del componente cognitivo, podemos remitirnos a las *teorías de la valoración* que parten del supuesto que las personas experimentan emociones de acuerdo a las valoraciones que hacen de una situación específica. En otras palabras, las diferencias individuales en las experiencias emocionales sugieren diferentes interpretaciones de la situación. La valoración de estas experiencias emocionales se conceptualiza como la satisfacción u obstrucción de las preocupaciones, y dicha valoración incluye las necesidades, los apegos, los valores, los objetivos y las creencias actuales del individuo (Frijda, 2007; Lazarus, 1991; Moors, Ellsworth, Scherer, y Frijda, 2013). Las teorías de la valoración pueden explicar las diferencias en las respuestas emocionales de los individuos a la misma situación. Si dos personas difieren en su valoración de la novedad del evento, la congruencia de objetivos, la capacidad de control o cualquiera de las otras variables de evaluación, sus emociones diferirán correspondientemente.

Dentro de este conjunto de teorías, la teoría de la estructura cognitiva de las emociones, teoría OCC, ha sido un referente para estudios de emoción en la clase de matemáticas (ver por ejemplo, Di Martino & Zan, 2011; Martínez-Sierra y García-González, 2016), desde esta perspectiva, las emociones son entendidas como "reacciones con valencia ante acontecimientos, agentes u objetos, la naturaleza particular de las cuales viene determinada por la manera como es interpretada la situación desencadenante" (Ortony, Clore y Collins, 1996, p.16), siendo su fuente de evidencia el lenguaje, desde donde es posible conocer los orígenes y las emociones experimentadas por las personas.

Otras investigaciones (ver por ejemplo, De Simone, 2019) se han centrado en la investigación de Damasio (1994), bajo la hipótesis de considerar los marcadores somáticos como una base para las orientaciones emocionales, con base en ello, se puede estudiar la emoción a través de las expresiones faciales, que a su vez se consideran como posibles indicadores emocionales.

En síntesis, hemos extraído y adaptado la siguiente tabla de McLeod (1992), para aclarar con algunos ejemplos, cada uno de los constructos del Dominio Afectivo que se han desarrollado:

Tabla 1. Ejemplos de los componentes del dominio afectivo

| Constructo | Ejemplo |
|---|---|
| Creencias<br>Sobre la matemática<br>Sobre la enseñanza de la matemática | Las matemáticas están basadas en reglas<br>Enseñar es transmitir el conocimiento |
| Actitudes | Disgusto por las comprobaciones geométricas<br>Disfrute con la resolución de problemas |
| Emociones | Alegría (o frustración) en la resolución de problemas no rutinarios |

## Relaciones entre dominio afectivo y MTSK

Una vez esclarecidas las distintas dimensiones del Dominio Afectivo que hemos considerado en nuestros trabajos como grupo, podemos acercar todo ese sustento teórico a la investigación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Para ello, vamos a tomar como referencia el subdominio de *Conocimiento sobre las características de aprendizaje de las matemáticas* (KFLM), concretando cada una de las aproximaciones que se han señalado entre los afectos y la cognición.

Considerar los afectos como una red que articula las creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, implicaría situar las distintas dimensiones del dominio afectivo en el núcleo del modelo para comprender las creencias del profesor como resultado de las interrelaciones con las demás componentes. De esta forma, si las creencias sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas permean el conocimiento que construye y desarrolla el profesor en el subdominio KFLM, dicha construcción y desarrollo estarían condicionados indirectamente por las actitudes y las experiencias emocionales.

De otro lado, considerar el estudio del Dominio Afectivo del profesor de matemáticas como complemento a las investigaciones sobre su conocimiento especializado, situaría el foco en la selección y explicación de episodios de aula, que ayuden a comprender la práctica educativa, más allá de los aspectos cognitivos. Las herramientas de medición de los distintos constructos del Dominio Afectivo que hemos señalado a lo largo del trabajo, ayudarían a generar un perfil afectivo complementario al análisis del conocimiento especializado, que permitiese comprender al profesor de manera holística.

Tabla 2. Componentes del dominio afectivo relacionadas con el subdominio KFLM

| | | |
|---|---|---|
| Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM) | Creencias (CEAM) | Cómo el profesor entiende que se produce y se manifiesta el aprendizaje |
| | | Cómo se realiza la transmisión del conocimiento desde el punto de vista del profesor |
| | | Cómo se concibe la interacción P-A en la construcción de conocimiento matemático |
| | Actitudes | *Disposición* al tratamiento del error como vehículo de construcción de una matemática dinámica |
| | | *Inclinación* a construir el conocimiento desde las relaciones que el alumno estable |
| | Emociones | Respuesta emocional ante la presencia de eventos de contingencia |
| | | (Alegría/miedo/inseguridad) |

Por último, el estudio del conocimiento del profesor en relación a los factores afectivos que intervienen en los procesos de aprendizaje de las matemáticas, supondría la inclusión de una nueva categoría de conocimiento, perteneciente al KFLM. Dicha categoría, está incluida en la descripción del modelo de Carrillo *et al.* (2018) como *Aspectos emocionales en el aprendizaje de las matemáticas*, y supone la explicitación de las emociones para ser convertidas en objeto por parte del profesor que puede gestionar con su conocimiento sobre ellas, situaciones en las que el aprendizaje se realice en condiciones afectivas favorables, y que igualmente puede tener su reflejo en otros subdominios de conocimiento.

## Referencias


Aguilar-González, A., Muñoz-Catalán, M.C. y Carrillo, J. (2019). An example of connections between the mathematics teacher's conceptions and specialized knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(2), DOI: org/10.29333/ejmste/101598

Aiken Jr, L. R., y Dreger, R. M. (1961). The effect of attitudes on performance in mathematics. *Journal of Educational psychology*, *52*(1), 19.

Aiken Jr, L. R. (1970). Attitudes toward mathematics. *Review of educational research*, *40*(4), 551-596.

Anderson, L. W., y Bourke, S. F. (2013). *Assessing affective characteristics in the schools*. Routledge.

Carrillo, J. (1996). Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones. Tesis doctoral, Universidad de Sevilla.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D.,Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, P., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, C. (2018) The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model, *Research in Mathematics Education*, 20 (3), 236-253.

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N.; Escudero-Ávila, D. I.; Flores-Medrano, E. y Montes, M. A. (2014). *Un Marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas.* Huelva: CGSE.

De Simone, M. (2019). Intertwinement of Rationality and Emotions in Mathematics Teaching: A Case Study. In M. S. Hannula et al. (eds.), *Affect and Mathematics Education*, ICME-13 Monographs (pp. 233-253), https://doi.org/10.1007/978-3-030-13761-8_11

Di Martino, P. y Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: a bridge between beliefs and emotions. *ZDM- The International Journal on Mathematics Education*, 43(4), 471–482.

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. En Keitel, C. et al. (Eds) *Mathematics, Education and Society*. Science and Technology Education. Document Series 35. Paris: UNESCO, 99-101.

Fennema, E., y Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitudes scales: Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by females and males. *Journal for research in Mathematics Education*, *7*(5), 324-326.

Fernández-Gago, J. (2012). *Relaciones entre actuaciones de alumnos y profesores y creencias y concepciones respecto a dimensiones relacionadas con el esfuerzo respecto a la Teoría de la Inteligencia Creadora*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Frijda, N. H. (2007). *The laws of emotion*. New York, NY: Erlbaum

Gairín, J. (1990). *Las actitudes en educación. Un estudio sobre educación matemática.* Barcelona: Boixareu Universitaria

Gómez-Chacón, I. Mª. (2000). *Matemática emocional: los afectos en el aprendizaje matemático* (Vol. 83). Madrid: Narcea Ediciones.

Grootenboer, P. (2003). Preservice primary teachers' affective development in mathematics. Tesis doctoral, Universidad de Waikato, Nueva Zelanda.

Grootenboer, P., y Marshman, M. (2016). The affective domain, mathematics, and mathematics education. In *Mathematics, affect and learning* **(pp. 13-33).** Singapur: Springer.

Hannula, M. S. (2011). The structure and dynamics of affect in Mathematical thinking and learning. En M. Pytlak, E. Swoboda, y T. Rowland (Eds.), *Proceedings of the seventh congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 34-60). University of Rzesow.

Lazarus, R. (1991). *Emotion and adaptation*. New York, NY: Oxford University Press.

Leatham, K. R. (2006). Viewing mathematics teachers' beliefs as sensible systems. *Journal of Mathematics Teaching Education*, 9, 91-102.

Leder, G. y Grootenboer, P. (2005). Affect and mathematics education. *Mathematics Education Research Journal*, 17(2), 1–8.

McLeod, D. (1992) Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.97-101) New York: Macmillan.

Moors, A., Ellsworth, P. C., Scherer, K. R. y Frijda, N. H. (2013). Appraisal theories of emotion: State of the art and future development. *Emotion Review*, 5(2), 119–124. DOI:10.1177/1754073912468165.

Pascual, Mª. I., Marbán. J. Mª, Maroto, A., Fernández-Gago, J. y García, Mª. (2019). Apuntando influencias del Dominio Afectivo en el MTSK. Una ejemplificación con KMT. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (PÁGINAS DONDE SE ENCUENTRE). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones. Huelva: CGSE.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1). USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A.H (2015). What Counts, When? Reflections on Beliefs, Affect, Attitude, Orientations, Habits of Mind, Grain Size, Time Scale, Context, Theory, and Method. In B. Pepin y B. Roesken-Winter (Eds.). *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics Education. Exploring a mosaic of relationsships and interactions* (pp.395-405). New York: Springer.

Skott, J. (2015). Towards a Participatory Approach to "Beliefs" in Mathematics Education. In B. Pepin y B. Roesken-Winter (Eds.). *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics Education. Exploring a mosaic of relationships and interactions*, (pp.3-25). New York: Springer.

Solomon, R. (2008). The philosophy of emotions, En M. Lewis, J. Haviland-Jones, y L. Feldman (Eds), *Handbook of emotions*, 3rd ed, (pp. 3-16). Nueva York, Estados Unidos: The Guilforf Press.

Sosa, L., Contreras, L.C., Gómez-Chacón, I. Mª, Flores-Medrano, E. y Montes, M.A. (2017). Síntesis, problemas abiertos, preguntas para la reflexión. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (pp. 71-79). Huelva: CGSE.

Vasco, D. y Climent N. (2018). El estudio del conocimiento especializado de dos profesores Álgebra Lineal. *PNA, 12*(3), 129-146.

# Síntesis y problemas abiertos en el IV Congreso iberoamericano de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)

Myriam Codes
Jeferson G. Moriel-Junior
Christian R. Alfaro
Yosenith A. González

## Resumen

Presentamos una síntesis de las principales aportaciones realizadas en el IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) concentradas en cinco ejes: el conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas, el desarrollo del subdominio del conocimiento de la práctica matemática, el diseño de tareas para la formación de profesores de matemáticas, la inclusión del dominio afectivo en el modelo MTSK y la extensión del modelo al conocimiento especializado del profesor de otras disciplinas. Además, recogemos algunas cuestiones que dejan paso a una reflexión profunda sobre diferentes elementos del modelo MTSK y formulamos algunas preguntas que quedan sin responder por su complejidad y mantienen vivo el avance en el desarrollo del modelo.

## Palabras clave

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), Síntesis, Preguntas abiertas, CIMTSK.

## Abstract

We present a synthesis of the main contributions made at the IV Ibero-American Conference on Mathematics Teacher' Specialized Knowledge (MTSK) focused on five main themes: the mathematics teachers educator's specialized knowledge, the development of the subdomain of knowledge of practices in mathematics, the design of tasks for training mathematics teachers, the inclusion of the affective domain in MTSK model and the extension of the model to other disciplines teacher's specialized knowledge. In addition, we collect some issues that give way to a deep reflection on different elements of the MTSK model, and we formulate some questions that remain unanswered due to their complexity and limitations that keep alive the progress of the model development.

## Keywords

Mathematics Teacher' Specialized Knowledge (MTSK), summary, open issues, CIMTSK.

Codes M., Moriel-Junior J. G., Alfaro C. R. y González Y. A. (2019). Síntesis y problemas abiertos en el iv congreso iberoamericano de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK). En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (41-47). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Introducción

El IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) celebrado en Huelva entre el 10 y el 12 de septiembre de 2019 ha puesto en alza el fin último de las investigaciones desarrolladas bajo este modelo teórico consistente en la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. El modo de alcanzar este objetivo pasa por profundizar en el conocimiento del formador de profesores de matemáticas, emplear el modelo MTSK en el diseño de tareas para la formación inicial y avanzar en el diseño de cursos de capacitación que homogeneicen la construcción del conocimiento especializado para enseñar matemáticas.

Algunos de los retos que se han planteado en diferentes momentos del congreso quedan plasmados en forma de interrogantes: ¿En qué medida se contemplan los aspectos tecnológicos inherentes a las demandas contemporáneas? ¿Qué resultados de la frontera del conocimiento científico se incluyen y articulan en estudios con MTSK (como de la neurociencia)? ¿Cómo y qué dominios, subdominios y categorías de conocimiento se necesitan o activan en la planificación docente? ¿Cómo se puede extender el modelo ante nuevos desafíos como el conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas o el conocimiento especializado del profesor de otras disciplinas, como la biología o la lengua portuguesa?

El programa del congreso y los temas tratados en las comunicaciones han trascurrido en torno a cinco ejes principales que dan cuenta del nivel de desarrollo del modelo, de su potencial como motor para indagar en el conocimiento especializado del profesor y de su solidez para trascender a la investigación.

## Síntesis de cinco ejes vertebradores del congreso

En este capítulo articulamos una síntesis de las principales ideas que se han movilizado en esta reunión científica a partir de cinco ejes: la caracterización del conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas, el diseño de tareas para la formación de profesores de matemáticas, la inclusión del dominio afectivo en el modelo MTSK, la necesidad de precisar el subdominio de la práctica matemática (KPM) y la extensión del modelo al conocimiento especializado del profesor de otras disciplinas como la biología o la lengua portuguesa.

### *Caracterización del conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas*

Existe un interés creciente por caracterizar el conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas. Se ha detectado que no existe uniformidad ni consenso sobre los programas de estudio para la formación de profesores de matemáticas en el mundo. En algunos casos, dichos programas ofrecen una formación exclusivamente en matemáticas y, posteriormente, se hacen cursos de pedagogía y didáctica de la matemática. En otros programas, se ofrece una formación en paralelo, es decir, durante los diferentes ciclos lectivos el futuro profesor hace cursos de matemáticas y de pedagogía simultáneamente. Esta variedad de opciones formativas, hace complejo caracterizar el conocimiento especializado de los formadores de los futuros profesores de matemáticas. Montes y Contreras (2019) hacen eco de que una de las claves para responder a cuál debe ser el contenido de la formación inicial del profesor de matemáticas y cómo debe estructurarse, está en el sistema de creencias del formador.

A pesar de los interrogantes acerca de cómo caracterizar el MTSK del formador de profesores de matemáticas, de momento parecen claras algunas diferencias entre este y el MTSK del profesor de matemáticas: (a) el objeto de enseñanza, que en el caso del profesor es *la matemática* mientras que para el formador es, dependiendo de los planes de estudios, solo *la enseñanza de la matemática* o una *combinación de contenido matemático y pedagógico*, (b) las características de la formación básica del sujeto del que se plantea su MTSK que, como se ha señalado anteriormente, en el caso de los formadores varía desde una formación exclusivamente matemática hasta una formación meramente pedagógica, pasando por una posición intermedia didáctico-matemática.

Para generar avances en esta caracterización, se considera pertinente hacer revisiones de planes de estudio de las carreras que forman a los profesores de matemáticas en diferentes países para plantear estándares curriculares que sean comunes en todos los casos y, de esta manera, iniciar la construcción de un modelo de conocimiento para el formador de profesores de matemáticas. Una cuestión importante en tal construcción es determinar *qué elementos del MTSK podrían emplearse en la construcción de un modelo de conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas.*

## *Diseño de tareas para la formación de profesores de matemáticas a partir de MTSK*

Uno de los aspectos que refleja la madurez alcanzada en el desarrollo del modelo MTSK es su solidez para formar parte imprescindible en planes de transferencia de los conocimientos generados en las investigaciones. Así es como se materializa el sentir general de la comunidad de investigadores en MTSK de *ir más allá* de la descripción del conocimiento especializado del profesor, que incluye el mapeo y elaboración de esquemas descriptivos de las conexiones entre los distintos subdominios del conocimiento, y cómo interactúan y se correlacionan en las diferentes acciones docentes.

Esta perspectiva suscita algunas cuestiones como ¿qué dominios, subdominios y categorías de conocimiento se necesitan en la planificación docente y cómo se activan? ¿Y en la tarea de responder a los estudiantes, al crear y presentar buenas explicaciones instructivas? No cabe duda de la importancia que tiene en la formación de los futuros profesores de matemáticas el diseño de tareas para la construcción del conocimiento matemático del discente. Climent y Montes (2019) nos han mostrado el potencial del modelo MTSK como organizador en el diseño de tareas para la formación inicial de maestros, en las que se emplea la visualización de fragmentos de grabaciones en vídeo de clases reales como detonante para la construcción del MTSK del estudiante para maestro. Además, en la experiencia de Climent y Montes (Ibíd.) el MTSK del profesor protagonista del vídeo se emplea como herramienta para sistematizar la observación analítica de vídeos, facilitando entrar en detalle sobre el foco que guíe la observación: *el conocimiento matemático especializado* o *el conocimiento didáctico del contenido*.

Cuando tiene lugar el análisis del MTSK de un profesor en su práctica de aula, es especialmente útil discernir cuál es el conocimiento especializado que evidencia el profesor de matemáticas y cuándo no se evidencia conocimiento especializado pero el investigador, en una determinada situación, aprecia una oportunidad para generarlo. Por ejemplo, en un episodio de clase puede surgir la noción de infinito, ya sea potencial o actual y que el profesor de matemáticas del vídeo analizado no evidencie conocimiento sobre este concepto. Sin embargo, puede darse el caso de que el investigador, en una situación concreta ofrecida en el vídeo, observe una oportunidad para hacer hincapié en esta idea. Ese escenario se puede aprovechar en la formación del futuro profesor de matemáticas para construir conocimiento sobre algunos subdominios de su MTSK o relaciones entre ellos.

El conocimiento que emerge en una situación de aula está subordinado a la sensibilidad teórica del investigador y puede provenir de cualquier agente que conforme la situación: el maestro, el alumno, el libro de texto, el uso de materiales,… (Liñan-García, 2017). Para abarcar esta línea del conocimiento especializado que evocan en los investigadores oportunidades emergentes en el aula, nuestro colega Jeferson G. Moriel sugirió responder a las seis W para aclarar este constructo What (qué), Who (quién), When (cuándo), Where (dónde), Why (por qué) y How (cómo).

## La inclusión del dominio afectivo en el MTSK

Desde la creación del modelo MTSK las creencias se han considerado un elemento transversal valioso para explicar el conocimiento de los diferentes subdominios. En palabras del profesor Pablo Flores, "las emociones añaden un elemento de dinamismo al modelo". Pascual, Fernández-Gago, García, Marbán y Maroto (2019) han argumentado la posibilidad de incluir un nuevo dominio en el MTSK: el dominio afectivo, que incluiría adicionalmente otros elementos como las emociones y los sentimientos.

Es cierto que la afectividad está inmersa en los procesos educativos, pero todavía no hay consenso sobre cuál es la forma de integrar tal dimensión en el MTSK. Por ejemplo, no se tiene claro de qué forma los elementos considerados en dicho dominio forman parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, o cómo contribuyen a explicar dicho conocimiento.

Una perspectiva interesante presentada en uno de los debates del congreso fue que parece que no toda la dimensión afectiva, sino parte de ella, se puede integrar en el modelo tal como está actualmente. Los estudios continuarán abordando este desafío para avanzar en las posibles relaciones afecto-cognición.

## Concreción del subdominio de la práctica matemática (KPM)

El subdominio de la práctica matemática (KPM) es el menos desarrollado del modelo MTSK. Los resultados de algunas investigaciones han precisado categorías de este subdominio e indicadores de conocimiento, pero aún no se ha resuelto uno de los elementos que hacen compleja su caracterización y que se considera necesaria para determinar categorías en el modelo: la dificultad de observar a los matemáticos *haciendo matemática*.

Con la extensión del modelo a la caracterización del conocimiento de los maestros de educación infantil, el subdominio del conocimiento de la práctica matemática ha sido protagonista en varios foros de discusión por el cuestionamiento sobre la presencia de KPM en los maestros de educación infantil. Algunos investigadores no dudan de la presencia de los indicadores de práctica matemática en el aula de educación infantil, pero hacen falta resultados de las investigaciones en curso que testifiquen de esos indicadores.

Para facilitar el avance en la tarea de caracterización del KPM, es necesario que los investigadores que desarrollan su labor en este ámbito realicen una puesta en común de sus ideas y generen un trabajo en conjunto que permita tener una versión uniforme y que sea simple, explicativa y útil para estudiar este tipo de conocimiento matemático.

## *Extensión del modelo al conocimiento especializado del profesor de otras disciplinas*

Existe un creciente interés en realizar adaptaciones del *Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)* para estudiar el conocimiento especializado de los profesores de otras disciplinas científicas tales como Biología, Química, Física o Lengua Portuguesa, entre otras.

Ante esta nueva demanda, se plantea la extensión del modelo MTSK al modelo *XTSK*, donde la letra *X* hace alusión a diferentes disciplinas científicas, sociales o lingüísticas, representando esas siglas al conocimiento especializado del profesor de biología (X=B), Física (X=Ph) o Química (X=Q), por ejemplo.

Esta propuesta genera nuevos interrogantes que deben responder a tres cuestiones fundamentales:

- ¿Cómo construir los modelos de conocimiento XTSK con base en el modelo MTSK?
- ¿Qué dominios y subdominios del MTSK trascienden a la especificidad del conocimiento matemático y se mantienen en el XTSK?
- ¿Qué dominios, subdominios y categorías emergen en el XTSK?

En el trascurso del congreso algunas comunicaciones han dado cuenta de los avances en la caracterización de estos conocimientos (Luís, Carrillo y Monteiro, 2019; Soares, Carbo, Lima y Mello, 2019; Marques y Moriel-Junior, 2019).

## Consideraciones finales

En la inauguración del congreso, el profesor José Carrillo contestaba a la pregunta *qué hacemos aquí* con cuatro argumentos: (a) acercarnos al modelo MTSK, (b) compartir experiencias e investigaciones, (c) comprometernos con la participación de estudios conjuntos dentro de la Red Iberoamericana MTSK y el Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (SIDM) y (d) iniciarnos en la Red. Las comunicaciones presentadas y los seminarios y talleres desarrollados han cumplido con el propósito de acercarnos al modelo compartiendo experiencias y han introducido a los investigadores noveles en el para qué y el cómo del modelo MTSK. El compromiso también se refleja en esos trabajos y queda pendiente de extenderse con la colaboración de los participantes en las diferentes temáticas que conforman la Red.

Al igual que se ha matizado la idiosincrasia del conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas frente a la del profesor de matemáticas, hay indicios para considerar que el conocimiento especializado de matemáticas del maestro de educación infantil pueda requerir alguna concreción derivada de la naturaleza de la etapa educativa.

El uso del vídeo como recurso docente ha sido protagonista en algunas investigaciones presentadas en el congreso (Climent y Montes, 2019, Codes y Muñoz-Catalán, 2019; Liñán-García, Muñoz-Catalán, Joglar-Prieto y Ramírez-García, 2019) y ha puesto de manifiesto la falta de consenso sobre el conocimiento que los investigadores manifiestan tras su visualización. Esto nos lleva a destacar la necesidad de contar con indicadores de conocimiento más precisos para las diferentes categorías consideradas en los subdominios del MTSK para que las evidencias de conocimientos sugeridas en los vídeos, por ejemplo los que contienen episodios de clases reales, sean más claras y convincentes.

Trascendiendo las actividades del grupo, se destaca la necesidad de fortalecer intencionalmente la difusión del trabajo de la Red Iberoamericana MTSK haciendo uso de la tecnología como facilitadora del trabajo a distancia para reforzar lazos entre los miembros de la Red. Al mismo tiempo, propone crear mecanismos que faciliten la entrada de nuevos investigadores, como un sitio de divulgación del marco teórico, accesible a todo el público con rigor y fundamento; algo así como un *MTSK en tres pasos* con contenido diseñado específicamente para este propósito y con acceso a algunos artículos esenciales para profundizar en el conocimiento del modelo, como por ejemplo Carrillo, Montes, Contreras y Climent (2017) y Carrillo-Yáñez et al. (2018).

## Referencias


Carrillo, J., Montes, M. A., Contreras, L. C., y Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 22*, 185 - 205.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N, Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018) The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model, *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253, DOI: 10.1080/14794802.2018.1479981

Climent, N., y Montes, M. A. (2019). Taller *Diseño de tareas para la formación de profesores de matemáticas a partir de MTSK*. En Editor1, Editor2 y Editor3 (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. inicial-final). Huelva: XXX.

Codes, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2019). El uso de un vídeo de animación para promover conocimiento especializado sobre medida en estudiantes para maestro de educación infantil. En Editor1, Editor2 y Editor3 (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. inicial-final). Huelva: XXX.

Liñán, M. M. (2017). *Conocimiento Especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria*. Tesis doctoral. Huelva, España: Universidad de Huelva. Disponible en http://hdl.handle.net/ 10272/14230

Liñán-García, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Joglar-Prieto, N., y Ramírez-García, M. (2019). Taller 1: Generación de propuesta de MTSK basada en situaciones de aula. En Editor1, Editor2 y Editor3 (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. inicial-final). Huelva: XXX.

Luís, M., Carrillo, J., y Monteiro, R. (2019). Ensinar a reprodução das plantas com as lentes MTSK. En Editor1, Editor2 y Editor3 (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. inicial-final). Huelva: XXX.

Marques, M., y Moriel-Junior, J. G. (2019). Conhecimento Especializado de Professores de Biologia: Uma Análise de PaP-eR sobre Embriologia Humana. En Editor1, Editor2 y Editor3 (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. inicial-final). Huelva: XXX.

Montes, M., y Contreras, L. C. (2019). Las creencias de los formadores de profesores que enseñarán matemáticas sobre el contenido y la estructura de la formación inicial de los profesores de secundaria. En Editor1, Editor2 y Editor3 (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. inicial-final). Huelva: XXX.

Pascual, M. I., Fernández-Gago, J., García, M., Marbán, J., y Maroto, A. (2019). El dominio afectivo y MTSK. En Editor1, Editor2 y Editor3 (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. inicial-final). Huelva: XXX.

Soares, S. T. C., Lima, S. S., Carbo, L., y Mello, G. J. (2019). Aplicação da metodologia PaP-eR para transposição do MTSK para diferentes áreas das Ciências da Natureza. En

Editor1, Editor2 y Editor3 (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.1-8). Huelva: XXX.

# Talleres

# Taller 1: Generación de propuesta de conocimiento especializado basada en situaciones de aula

M. Mar Liñán-García
M. Cinta Muñoz-Catalán
Nuria Joglar-Prieto
Mónica Ramírez-García

## Resumen

Este taller tiene el objetivo de reflexionar sobre el sentido y la utilidad de un constructo que surge en la tesis de Liñán-García (2017) para comprender el conocimiento especializado para enseñar un determinado contenido matemático a partir del análisis de un vídeo de aula. El análisis del conocimiento movilizado por la maestra se complementa con una mirada adicional al vídeo, que trata de identificar oportunidades que surgen en la interacción entre distintos agentes y objetos del aula, con el fin de identificar el conocimiento especializado que permitiría una gestión alternativa de esas situaciones. Este conocimiento, denominado "conocimiento especializado evocado", posee un gran potencial para la identificación de elementos de conocimiento para la formación de profesores y para el diseño de tareas formativas.

## Palabras clave

MTSK, educación matemática en Primaria, formación de maestros, conocimiento especializado evocado al investigador por las oportunidades.

## Abstract

This workshop aims to reflect on the meaning and usefulness of a construct that arises in Liñán-García (2017) to understand specialised knowledge to teach a certain mathematical content from the analysis of a classroom video. The analysis of the knowledge mobilized by the teacher is complemented by an additional look at the video, which tries to identify, from a methodological point of view, opportunities that arise in the interaction between different agents and classroom objects, in order to identify knowledge specialised that would allow an alternative management of these situations. This knowledge, called "specialised knowledge evoked", has a great potential for the identification of knowledge elements for teacher training and for the design of training tasks.

## Keywords

MTSK, prospective teachers training, evoked knowledge.

Liñán-García, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Joglar, N. y Ramírez, M. (2019). Taller 1: generación de propuesta de conocimiento especializado basada en situaciones de aula. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (49-59). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Propuesta de MTSK basada en situaciones de aula

Los dos grandes objetivos de este taller son:

- Reflexionar sobre el sentido y la finalidad del conocimiento especializado movilizado y evocado en un aula de 5º de Educación Primaria cuando se trabaja la Geometría Euclídea.
- Partiendo de esta reflexión, comprender la utilidad del conocimiento especializado evocado para la generación de propuestas para la formación inicial y continua de profesores basadas en situaciones de aula.

Estos objetivos se verán complementados con la presentación de los trabajos ya realizados o en curso al respecto.

## *Estructura de la sesión*

1. Visionado de un episodio de una clase de 5º de Educación Primaria (en el contexto español, corresponde al quinto curso de la enseñanza obligatoria y los estudiantes asistentes están entre los 11 y los 12 años de edad) al tratar la recta, semirrecta y segmento por primera vez en el curso.
2. Reflexión conjunta sobre las características del conocimiento especializado que se moviliza en el episodio observado y del conocimiento especializado evocado a los observadores por la clase videograbada. Esta reflexión se llevará a cabo de la siguiente forma:

   1.1 Análisis en grupos.

   1.2 Puesta en común y discusión en gran grupo.
3. Conclusiones sobre los elementos del conocimiento especializado que emergen en este caso y utilidad de estos en la formación general.
4. Investigaciones en curso que tienen en cuenta este conocimiento.

## *La recta, la semirrecta y el segmento en un aula de 5º de Educación Primaria*

En el contexto de una investigación doctoral, hemos videograbado las sesiones correspondientes a la enseñanza de la Geometría en un aula de 5º de Educación Primaria en un colegio público del área metropolitana de la ciudad de Sevilla. Hemos dividido esta observación teniendo en cuenta la definición de episodio de Schoenfeld (2000), matizada por Muñoz-Catalán (2009): fragmento de una sesión teniendo en cuenta los cambios de actividad o de objetivo; si es muy extenso o en su seno se desarrollan discusiones específicas con entidad propia, se descompone en otros más pequeños.

Hemos elegido un episodio de nueve minutos aproximadamente, en el que la maestra introduce la recta, la semirrecta y el segmento desde la perspectiva de la geometría Euclídea. Este episodio constituye la primera parte de la segunda clase de Geometría que realiza la profesora en el corriente curso; el hecho de que este sea el contenido de la misma responde a la secuenciación que propone el libro de texto.

Se realiza el visionado conjunto del episodio por parte de todos los asistentes al taller, planteándoles la siguiente consigna:

> *Partiendo de la observación en vídeo del episodio seleccionado, vamos a identificar aspectos del conocimiento especializado que se movilizan en el aula.*
>
> *Pretendemos mirar más allá de las evidencias e indicios que la maestra muestre, intentando observar el conocimiento especializado que nos evocan las interacciones entre todos los actores y objetos de la escena, como por ejemplo los estudiantes y las interacciones entre ellos y con la profesora, los recursos, los libros de texto, etc.*

Se les informa, a su vez, de que, siguiendo a Fernández-Balboa (tesis en curso dirigida por Star y Joglar-Prieto), que a su vez se basa en Karsenty y Arcavi (2017), asumimos las siguientes pautas para el análisis con MTSK:

1. No es una observación evaluativa (no se trata de juzgar lo que hace la profesora);
2. Asumimos que la profesora observada actúa a favor del máximo beneficio para sus estudiantes;
3. No se persigue la demostración de la mejor práctica, sino la generación de debates significativos sobre diferentes aspectos de la práctica observada usando nuestra sensibilidad teórica (Strauss y Corbin, 1994);
4. Pondremos el foco en el conocimiento del contenido matemático y en el conocimiento didáctico del contenido. Evitaremos debates genéricos sobre enseñanza (aspectos como el manejo de la clase o lenguaje general no se tendrán en cuenta).

Para conseguir los objetivos propuestos partiendo de la consigna dada, nos apoyaremos en las lentes teóricas que describimos en el apartado siguiente.

## *Lentes teóricas*

En el episodio elegido podríamos identificar evidencias e indicios de conocimiento especializado de la profesora en los subdominios del modelo MTSK. Entendiendo como oportunidad cualquier situación generada en el aula como resultado de las acciones de la profesora -en situación expositiva o de interacción con los alumnos -, de las acciones de los alumnos per se, y del uso de los artefactos disponibles, incluyendo los diferentes registros de representación y su tratamiento, el libro de texto u otras lecturas llevadas al aula, también tendremos en cuenta el conocimiento especializado evocado al investigador por las oportunidades, es decir, aquel conocimiento especializado del profesor que el investigador, desde su sensibilidad teórica (Strauss y Corbin, 1994) y validado por la triangulación de expertos (Flick, 2007), considera que sustentaría una gestión alternativa de la situación.

Esta identificación será realizada teniendo en cuenta la competencia teacher noticing o mirar con sentido, constructo teórico que abarca los procesos mediante los cuales los profesores han de gestionar la información que se les presenta a lo largo de una clase. Trabajos como los de Star, Lynch y Perova (2011) indican que esta competencia ha ayudado a mejorar la reflexión y la calidad de la enseñanza de los docentes de primaria y secundaria (tanto en formación inicial como en formación continua).

La investigación ha conceptualizado el término de distintas formas. Nosotros nos centraremos en la propuesta de Sherin y Van Es (2009), que además de poner el foco tanto en aquello en lo que se fija el profesor como aquello en lo que decide no fijarse, se preocupan de las interpretaciones que dan a lo que observan, entendiendo el mirar con sentido como una visión profesional en la que los profesores se fijan selectivamente en eventos que luego, a partir de su experiencia y de su sensibilidad teórica (Strauss y Corbin, 1994), tratan de interpretar. Nos posicionamos en la propuesta de Sherin, Russ y Colestock (2011) que proveen a los profesores de muestras de otros profesores enseñando y les piden que describan lo que ellos notan.

## *Análisis desde MTSK teniendo en cuenta la competencia mirar con sentido*

Tras el visionado, los asistentes se agruparon para reflexionar sobre el vídeo, intentando que en cada grupo hubiera una persona familiarizada con el modelo MTSK. Se facilitaron tanto la transcripción del episodio como una tabla en blanco con todas las categorías del modelo MTSK (ambos documentos fueron proporcionados tanto en formato electrónico como en papel), para que cada grupo pudiera recoger su análisis de forma ordenada, y se coordinó una discusión posterior para poner en común los análisis realizados. Esa discusión fue también complementada con la proyección de las observaciones y análisis de las autoras de este informe. En la tabla de la página siguiente presentamos un resumen del análisis realizado por las autoras y completado con las aportaciones realizadas en la discusión tras el trabajo por grupos (no distinguimos entre estas aportaciones, pero sí entre lo que consideramos el conocimiento observado desde las evidencias e indicios y el conocimiento especializado evocado a los investigadores que permitiría una gestión alternativa de la situación).

## Conclusiones

Hasta ahora, para comprender el conocimiento especializado para enseñar un determinado contenido matemático, se ha analizado el conocimiento movilizado por el profesor informante del caso. En la tesis de Liñán-García (2017) emergió el constructo de conocimiento especializado evocado para referirse a aquel conocimiento que el investigador identifica en la interacción entre los agentes y objetos de la clase, el cual sustentaría una gestión alternativa de la misma. El conocimiento movilizado, junto al conocimiento especializado evocado, proporcionan indicadores de conocimiento que podrían formar parte del currículum de la formación de los profesores. Tratamos de discernir el conocimiento que lo soporta, proponiendo el conocimiento especializado que sustentaría una gestión alternativa que podremos utilizar en formación de maestros.

Dada la consigna, los asistentes han podido realizar un análisis reinterpretando MTSK como instrumento para observar conocimiento especializado, aunque este no se intuya en el profesional analizado, sino que se derive de la situación en el aula unida a la sensibilidad teórica del observante.

Se genera un debate acerca del análisis realizado. La primera cuestión que surge es ¿de quién es el conocimiento especializado evocado? Del profesor, pues emerge de una situación de aula, no de un estudio teórico, lo cual le aporta un realismo que torna en necesario el análisis de conocimiento que, a priori, no sería esperado. Por ejemplo, en el episodio tratado, aparece el concepto de infinitud de la recta, lo que genera conocimiento especializado evocado relacionado y ubicado en diferentes subdominios: infinito actual y potencial, infinito como cardinal, diferencia entre la infinitud de la recta y la semirrecta, conexión con la recta real y, consecuentemente, del segmento con un intervalo en esta

| Subd. | Categorías | Conocimiento especializado que se moviliza |
|---|---|---|
| KoT | Registros de representación | • Registro de representación (Macías, 2016): lenguaje natural e icónico figural, en el que estaría tanto el dibujo como los gestos que indican que la recta no tiene ni inicio ni fin.<br>• Conversión entre ambos. |
| | Definiciones y propiedades | • Propiedades de la recta, (No se detiene a valorar si sobra o no alguna condición, relación con KPM).<br>• Relaciones entre la recta (como la madre de todo) y la semirrecta y los segmentos (conexiones intraconceptuales).<br>• Denominación de recta, semirrecta y segmento desde sus características y elementos analíticos. Se mencionan punto, línea, curva y ángulo.<br>• El estudio de las propiedades también incluye representaciones de objetos que no las cumplen.<br>• El punto que da origen a la semirrecta o los que originan el segmento pueden estar en cualquier posición.<br>• Propiedades: infinito (se usa para definir recta y semirrecta, ¿en el sentido de ilimitado?), pegados (refiriéndose a puntos).<br>• ¿Qué significa el prefijo semi en semirrecta? RAE: semi = medio o casi. ¿Medio=mitad?<br>• Segmento como línea recta acotada.<br>• Densidad la recta geométrica “pero los dos puntos no están juntitos, tiene que ser punto, punto...” Cardinal infinito en un conjunto acotado.<br>• Distintos infinitos. Infinitud de la recta, segmento y semirrecta (intervención de la estudiante sobre si una semirrecta es más larga que otra). Infinito actual y potencial.<br>• Concepto de magnitud longitud y medida de esta.<br>• Definición del libro “un punto de una recta divide a esta en dos partes iguales llamadas semirrectas” ¿Iguales en qué? Implica el concepto de infinito en un conjunto acotado. |
| | Procedimientos | • Unir los puntos para construir la recta como un procedimiento.<br>• Expresión del segmento con los puntos que “no están juntitos”. Parece tener relación con la representación del punto mediante un círculo (dos puntos juntitos serían dos circunferencias tangentes), o con un déficit en la comprensión de la continuidad de la recta.<br>• Procedimiento de obtención de la semirrecta y del segmento a partir de la recta. Están construidos paso a paso a partir de ella. Así, las propiedades (de no curvatura ni ángulos) se heredan y no se vuelven a hacer explícitas. |
| | Fenomenología | • Problemática relacionada con los diferentes infinitos numerables y no numerables (como fenómeno que aparecen en la propia génesis del concepto infinito)<br>• Cables, carreteras, rotondas (macroespacio) para recta y curva, pero no para segmento ni semirrecta<br>• La recta es la madre, es una metáfora relacionada con el procedimiento de construcción utilizado. |

<table>
<tr><td rowspan="4">KSM</td><td>Conexión de comple-jización</td><td>• Recta e infinito: infinitud recta, semirrecta y segmento. Distintos infinitos. (intervención de la estudiante sobre si una es más larga que otra).<br>• Densidad de la recta real y de la recta geométrica “pero los dos puntos no están juntitos, tiene que ser punto, punto…”<br>• Conexión entre geometría y medida y procesos infinitos que permitan comprender el concepto “infinito” (Gardiner, 1985)<br>• Infinitud de la recta e Infinito como cardinal.</td></tr>
<tr><td>Conexión simpl.</td><td>• Mención a la existencia de puntos alineados en la definición de la recta (simplifica la idea de continuidad).</td></tr>
<tr><td>Conexión aux.</td><td>• La mención a la extensión de la recta fuera de la pizarra, para conectar con la idea de infinito.</td></tr>
<tr><td>Conexión transversal</td><td>• Denominación de recta, semirrecta y segmento con magnitud y medida.<br>• Números reales, la densidad de estos, la no existencia de siguiente…<br>• Entre los elementos geométricos que aparecen (procedimiento de construcción, relaciones, etc.) y con otros (ángulo, curva).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">KPM</td><td>Condiciones n. y s. para generar de-finiciones</td><td>• Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones (Escudero, Gavilán, y Sánchez-Matamoros, 2014), que surge de la “definición” recursiva que hace el libro entre punto, recta y semirrecta.<br>• Características de la definición de recta. Atributos relevantes o irrelevantes. El papel del contraejemplo para construir la definición.</td></tr>
<tr><td>Formas valid.</td><td>• Usa contraejemplos para descartar argumentos.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">KMT</td><td>Teorías sobre ense-ñanza</td><td>• Muestra su propia experiencia con “infinito”<br>• Provocar la reflexión en los estudiantes sobre lo que puede significar un concepto (en este caso, los extremos de un segmento)<br>• Los estudiantes aprenden con ejemplos y contraejemplos, preguntas de devolución</td></tr>
<tr><td>Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos</td><td>• Contraejemplos para mostrar la falsedad de una afirmación (línea curva; segmento en lugar de recta)<br>• Ejemplo cables de la luz y carreteras. Aunque ella sobre la marcha parece que se da cuenta de que no son buenos ejemplos.<br>• Ejemplificación de la semirrecta con puntos diferentes en la recta. Utiliza ejemplos prototípicos cuando usa registro gráfico o geométrico.<br>• Usa puntos “gordos” para marcar los extremos del segmento. Limitaciones del registro gráfico.<br>• Incorpora en ocasiones los ejemplos que plantean los alumnos, pero guiada siempre por el libro de texto.<br>• Estrategia de enseñanza basada en KPM (contraejemplos).<br>• Estrategia: no da directamente la definición, quiere que los alumnos la construyan.</td></tr>
<tr><td>Recursos mat. y vir-tuales</td><td>• Pizarra y libro de texto.<br>• Usa los límites de la pizarra y el gesto que añade como recurso para representar “infinito”.</td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| KFLM | **Teorías aprend.** | • Parece que considera que los alumnos no necesitan ir de lo concreto a lo abstracto, empieza directamente por lo abstracto el tema. |
| | **Formas de interac. con un contenido mat.** | • Conexiones entre el infinito matemático (actual o potencial) y el infinito psicológico (Gardiner. 1985) que, sin ser un contenido matemático, está muy presente en la interacción con este conocimiento.<br>• La profesora parece saber que los estudiantes comprenden mejor una definición con varias restricciones, que una definición más formal. |
| | **Fortalezas y dificultades** | • Dificultades epistemológicas con el concepto de recta y semirrecta (usa diferentes puntos para ejemplificar las semirrectas que se generan)<br>• Dificultad que podría crear un ejemplo (cables de la luz: indica rápidamente “los que están más tensos”<br>• Hace reflexionar a los estudiantes para evitar la dificultad que puede provocar tener extremos en la recta (la pizarra) y extremos en el segmento.<br>• Podría estar dibujando “gordos” los puntos extremos para que los alumnos distingan mejor segmento de recta.<br>• Dificultades de los estudiantes para distinguir una línea de una recta.<br>• Obstáculo en el aprendizaje de recta... al representarlos siempre de forma prototípica.<br>• Dificultad en la comprensión de la definición del libro “un punto de una recta divide a esta en dos partes iguales llamadas semirrectas” ¿Iguales en qué?<br>• Dificultad “puede ser en el mismo centro o no”, búsqueda de centro en un constructo en el que no existe tal concepto.<br>• Dificultad en la conceptualización de la densidad de la recta “pero los dos puntos no están juntitos, tiene que ser punto, punto...” |
| KMLS | **Expectativas de aprendizaje** | • Conceptos relacionados con infinito y acotación (capacidades que se promueven en determinados momentos educativos, por tanto, contenidos matemáticos que se requieren enseñar, expectativas de aprendizaje, aunque no estén incluidos en el currículum).<br>• A pesar de ser alumnos de quinto, ella espera que sean capaces de entender el uso del infinito que ella hace durante la sesión. No le condiciona el currículo. Ella piensa que los estudiantes tienen conocimiento que les permite entenderlo en ese momento. |

y la pregunta asociada ¿es el segmento también infinito?, etc. Por ejemplo, el hecho de que la profesora haga hincapié en que para tener un segmento debo elegir dos puntos no consecutivos de la recta nos indica la necesidad de tratar la conexión del constructo geométrico recta con el constructo numérico recta real relacionando la densidad de los números reales con la densidad de la recta geométrica.

La observación de la propia práctica compromete al profesional en su autoevaluación y análisis, pudiendo considerar cambios en su enseñanza partiendo de dicha observación (Boston y Candela, 2018).

Podemos observar el potencial de las tareas propuestas por la maestra observada, más allá de si tales potenciales se han conseguido implementar o no (Kotsopoulos, Lee y Heide, 2011), y ese potencial puede ser analizado desde MTSK.

Consideramos la aportación metodológica al análisis con MTSK conocimiento especializado evocado como una herramienta que podría influir positivamente tanto en la formación inicial y continua del profesorado de matemáticas, como en el fomento de la reflexión sobre la práctica docente:

- La observación de la propia práctica para considerar su potencial en sesiones posteriores;
- La observación de la práctica de otros en la formación de profesores (inicial y continua), generando la reflexión de los mismos sobre tales potencialidades;
- Puede ser un elemento potenciador de nuestra reflexión en la mejora de la práctica en cada etapa en un contexto formativo tanto si partimos de la observación de docentes en una clase real de Educación Infantil, Primaria o Secundaria, como si observamos nuestra propia práctica como formadores de EPP o la de un colega;
- Puede surgir, como en el caso presentado (aparece en el episodio la idea de infinitud de la recta), la necesidad de tener en cuenta conocimientos que no están incluidos en el currículum, cuestión sobre la que tanto los formadores de profesores como los propios profesores deben reflexionar.
- El conocimiento especializado evocado va más allá de la noción de contingencia propuesta por el modelo del Knowledge Quartet (Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep, 2009), pues no miramos la capacidad del docente para responder a una situación no esperada, ni evaluamos el modo en el que la aprovecha saliéndose, incluso, de la previsión para la sesión, sino que nos planteamos la potencialidad de dicho conocimiento.

Para finalizar, se plantea una posible nueva concreción del conocimiento especializado evocado: conocimiento especializado del profesor que el investigador, partiendo de dichas oportunidades, desde su sensibilidad teórica (Strauss y Corbin, 1994) y validado por la triangulación de expertos (Flick, 2007), considera que sustentaría una gestión alternativa de la situación. Asimismo, se evalúa el potencial de determinados elementos de conocimiento especializado para una situación de aula, por lo que no se evalúa a la profesora, sino la situación de aula observada globalmente.

## Presentación de investigaciones realizadas teniendo en cuenta el nuevo elemento metodológico conocimiento especializado evocado

Indicamos, a continuación, los trabajos realizados en torno al nuevo elemento metodológico conocimiento especializado evocado.

La génesis del concepto se presenta en la tesis doctoral Conocimiento especializado en Geometría en un aula de 5º de Educación Primaria (Liñán-García, 2017) que, dirigida por Muñoz-Catalán y Contreras en 2017, presenta por primera vez la necesidad de trabajar con MTSK desde este punto de vista con objeto de observar, desde la sensibilidad teórica del investigador validada por una triangulación de expertos (Strauss y Corbin, 1994; Flick, 2007), el conocimiento potencial en el sentido de Boston y Candela (2018) y Kotsopoulos Lee y Heide (2011).

Desde esta nueva visión de la utilidad del análisis con MTSK, se genera la idea del trabajo que se mostrará en El uso de MTSK en el diseño de situaciones de aprendizaje de los estudiantes para profesor, tesis doctoral de Barrera-Castarnado, en elaboración (dirigida por M.C. Muñoz-Catalán y L.C. Contreras). Desde la perspectiva de un experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011), se plantea el diseño de tareas formativas (Montes, Carrillo, Contreras, Liñán-García y Barrera-Castarnado, en prensa) para profesores: partiendo de una situación real de clase analizada desde MTSK y con el fin de promover conocimiento especializado en los EPP, se genera un caso añadiéndole a la transcripción del episodio considerado el conocimiento especializado evocado, que será la base de las actividades que promoverán dicho conocimiento en los EPP.

El trabajo ya citado de Montes et al. (opus cit.) utiliza MTSK como una herramienta útil para organizar la formación inicial de los maestros, en lo relativo al contenido matemático, desde una doble perspectiva: la estructuración de las asignaturas y el diseño de tareas formativas, constituidas por un caso construido desde el análisis con MTSK de un episodio de clase -teniendo en cuenta el conocimiento especializado evocado- más actividades ad-hoc, para la formación de profesores.

Teniendo en cuenta una visión de la matemática elemental propia de Educación Infantil desde un punto de vista superior, Muñoz-Catalán, Ramírez, Joglar, y Carrillo (aceptado para su publicación en Infancia y Aprendizaje (Journal for the Study of Education and Development) describen el conocimiento especializado del profesor de matemáticas de Educación Infantil para promover pensamiento algebraico en dicha etapa a partir de una tarea de descomposición aditiva (ver Temática 1 en estas mismas actas).

Partiendo de una situación real de aula previamente analizada desde el MTSK (evidencias, indicios, conocimiento especializado evocado), y teniendo presente la necesidad de promover la competencia "mirar con sentido" (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls, y Callejo, 2018), en el trabajo La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo: el conocimiento especializado pretendido vs movilizado (Barrera-Castarnado, Liñán-García, Muñoz-Catalán y Contreras, en prensa, a) elaboramos un caso que ejemplifica la práctica educativa. Sobre el mismo planteamos actividades diseñadas considerando el conocimiento especializado que se pretende movilizar, completando de esta forma una tarea formativa (Montes, Carrillo, Contreras, Liñán-García y Barrera-Castarnado, en prensa). Utilizando MTSK como modelo analítico tanto para el análisis de episodios (evidencias, indicios) como para enriquecer los mismos (conocimiento especializado evocado), y teniendo presente la necesidad de promover la competencia "mirar con sentido" (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls, y Callejo, 2018) en los estudiantes para profesor, presentamos El uso de MTSK en el diseño de tareas formativas para estudiantes para profesor de educación primaria. (Barrera-Castarnado, Liñán-García, Muñoz-Catalán y Contreras, en prensa b). Mostramos en este trabajo un avance de un experimento de enseñanza (Molina et al., 2011), cimentado en la observación de una situación real de aula, exponiendo cómo, a partir de esa observación, podemos generar tareas formativas que movilicen conocimiento especializado en la formación inicial de profesores

En el trabajo Conocimiento especializado, movilizado y emergente, en una clase de primaria sobre las posiciones relativas de las rectas (Barrera-Castarnado, Liñán-García, Muñoz-Catalán y Contreras, 2016) reflexionamos sobre el MTSK que la profesora de Educación Primaria estudiada moviliza, teniendo en cuenta el sustento epistemológico del conocimiento sobre las posiciones relativas de las rectas y otros conocimientos conectados, con el conocimiento especializado que podría apoyar una gestión alternativa para promover el desarrollo del conocimiento en sus estudiantes.

Finalmente, la primera publicación que mostró las ideas iniciales sobre el conocimiento especializado evocado fue Conocimiento sobre la recta de una maestra de tercer ciclo de educación primaria (Liñán-García, Montes, Contreras, 2015). En este trabajo reflexionamos sobre el MTSK que la profesora de Educación Primaria estudiada moviliza, teniendo en cuenta el sustento epistemológico del conocimiento sobre las denominaciones (Puig-Adam, 1986) de recta, semirrecta y segmento y otros conocimientos conectados, con el conocimiento especializado que podría apoyar una gestión alternativa para promover el desarrollo del conocimiento en sus estudiantes.

## Referencias

Barrera-Castarnado, V.J., Liñán-García, M.M., Muñoz-Catalán, M.C., Contreras, L.C., (en prensa a). La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo: MTSK como eje vertebrador en el diseño de tareas formativas. En Investigación en Educación Matemática XXIII. Valladolid: SEIEM.

Barrera-Castarnado, V.J., Liñán-García, M.M., Muñoz-Catalán, M.C. y Contreras, L.C. (en prensa b). El uso de MTSK en el diseño de tareas formativas para estudiantes para profesor de Educación Primaria. En IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. Huelva: CGSE

Barrera, V. J., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, C. y Contreras, L. C. (2016). Conocimiento especializado, movilizado y emergente, en una clase de primaria sobre las posiciones relativas de las rectas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (pp. 167-176). Málaga: SEIEM.

Boston, M.D. y Candela, A.G. (2018). The Instructional Quality Assessment as a tool for reflecting on instructional practice. ZDM Mathematics Education, 50 (3), 427-444. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0916-6.

Escudero, I.M., Gavilán, J.M. y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. Relime, 17 (1), 7-32.

Flick, U. (2007). An introduction to qualitative research (3rd edition). Thousand Oaks: Sage Publications.

Gardner (1985). Infinite processes in elementary mathematics, How much should we tell the children? The Mathematical gazette, 69 (448), 77-87.

Karsenty, R. y Arcavi, A. (2017). Mathematics, lenses and videotapes: A framework and a language for developing reflective practices of teaching. Journal of Mathematics Teacher Education, 20, 433-455.

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 29 (1), 75-88.

Kotsopoulos, D., Lee, J. y, Heide, D. (2011). A pair-wise analysis of the cognitive demand levels of mathematical tasks used during classroom instruction and those assigned for homework. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 11(4), 348–364.

Liñán-García, M.M. (2017). Conocimiento Especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria. Tesis doctoral no publicada. Huelva: Universidad de Huelva.

Liñán-García, M. M., Montes, M. A. y Contreras, L. C. (2015). Conocimiento sobre la recta de una maestra de tercer ciclo de educación primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 335-342). Alicante: SEIEM.

Macías, J. (2016). Diseño y estudio de situaciones didácticas que favorecen el trabajo con registros semióticos. Tesis doctoral no publicada. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Montes, M.A., Carrillo, J., Contreras, L.C., Liñán-García, M.M., and Barrera-Castarnado, V.J. (En prensa). Estructurando la formación inicial de Profesores de Matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. González (Eds.), Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Muñoz-Catalán, M.C. (2009). El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel. Huelva: Repositorio Arias Montano: http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/2949.

Muñoz-Catalán, M.C., Ramírez, M., Joglar, N. y Carrillo, J. (Enviado a publicación). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas para promover pensamiento algebraico en Educación Infantil a partir de una tarea de descomposición aditiva.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). Developing primary mathematics teaching. Reflecting on practice with the Knowledge Quartet. Londres: SAGE.

Schoenfeld, A. H. (2010). How we think. Nueva York: Routledge

Sherin, M. G., Russ, R. S., y Colestock, A. A. (2011). Accessing mathematics teachers' in-the-moment noticing: Seeing through teachers' eyes. En Miriam G. Sherin, Victoria R. Jacobs, y Randolph A. Philipp (Eds.), Mathematics teachers' noticing: Seeing through teachers' eyes (pp. 117-133). New York: Routledge.

Sherin, M. G., y Van Es, E. A. (2009). Effects of Video Club Participation on Teachers' Professional Vision. Journal of Teacher Education, 60(1), 20–37.

Star, J. R., Lynch, K., and Perova, N. (2011). Using video to improve mathematics' teachers' abilities to attend to classroom features: A replication study. En Miriam G. Sherin, Victoria R. Jacobs, y Randolph A. Philipp (Eds.), Mathematics teachers' noticing: Seeing through teachers' eyes (pp. 117-133). New York: Routledge.

Strauss, A., y Corbin, J. (1994). Grounded Theory Methodology. En N.K. Denzin y Y.S. Lincoln (Eds.) Handbook of Qualitative Research (pp. 217-285). Thousand Oaks: Sage Publications.

# Taller 2: Diseño de tareas para la formación de profesores de matemáticas a partir de MTSK

Nuria Climent
Miguel Ángel Montes

## Resumen

En este taller reproducimos la problemática del diseño de tareas para la formación inicial de profesores de matemáticas que parten del análisis de vídeo y pretenden incidir en la construcción de MTSK. Presentamos un fragmento de vídeo de una clase real de matemáticas de Primaria como punto de partida y analizamos una tarea diseñada para profundizar en lo que pudiera movilizarse con este fragmento en el aula de formación. Reflexionamos sobre la implementación de esta tarea en la formación inicial de maestros en la Universidad de Huelva y el diseño de tareas.

## Palabras clave

Formación inicial, tareas, análisis de vídeo, construcción de MTSK, ejemplificación.

## Abstract

In this workshop we approach the design of video-based tasks for primary teachers initial training, that aim to foster the development of their own MTSK. We present an excerpt of a primary school classroom situation as starting point and then we analyze a task designed to deepen in the knowledge that could be mobilized reflecting on it. We also share some reflections about the implementation of the task in the initial training of primary teachers in the university of Huelva, as well as some reflections about the design of tasks based on MTSK and video.

## Keywords

Teacher education, tasks, video analysis, construction of MTSK, exemplification.

Climent, N. y Montes, M. A. (2019). Taller 2: diseño de tareas para la formación de profesores de matemáticas a partir de MTSK. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (60-68). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.


60

En este taller se pretende compartir con los asistentes una experiencia desarrollada en la Universidad de Huelva en relación con el diseño de tareas para la formación inicial de maestros que pretenden contribuir a que estos construyan MTSK sobre determinados contenidos (Montes, Climent, Carrillo y Contreras, 2019). Para ello, hemos usado el modelo MTSK como organizador en el diseño. La experiencia que nos sirve de base en el taller se enmarca en el desarrollo de dos proyectos de innovación e investigación educativa realizados en los cursos 2017-18 y 2018-19 y financiados por la Universidad de Huelva. En el primero de los proyectos hicimos un primer diseño de las actividades y las implementamos en un experimento de enseñanza uno a uno con tres estudiantes para maestro (Oliveros, Pascual, Codes y Martín, 2018; Codes, Climent y Oliveros, 2019). En el segundo proyecto, rediseñamos las actividades a la luz de los resultados del proyecto anterior y las implementamos en grupos-clase.

El taller se estructura en tres partes. En la primera, ponemos en situación a los asistentes haciendo explícito cuáles son las bases de nuestra aproximación al diseño de tareas para la formación inicial de profesores, qué problemática nos planteamos en este diseño y cuáles son sus antecedentes. A continuación, presentamos el desarrollo del taller, que comienza con el visionado de un fragmento de una clase real de Ed. Primaria y el análisis de su potencial como detonante para la construcción de MTSK. Planteamos el diseño de tareas para la formación inicial que profundicen en este potencial, y analizamos una de las tareas que hemos implementado en los proyectos mencionados. Finalmente, como cierre del taller, reflexionamos sobre el funcionamiento de las tareas implementadas en la formación inicial de maestros y el diseño de tareas de este tipo.

## Nuestra aproximación al diseño de tareas para la formación inicial de profesores de matemáticas

En el diseño de tareas para la formación de profesores, buscamos coherencia con nuestra perspectiva de dicha formación, que puede resumirse en los puntos que siguen:

- Consideramos la formación de profesores como un continuo desde la formación inicial a la permanente.
- Queremos promover en la formación inicial MTSK, una actitud de problematización de la práctica y capacidad reflexiva.
- Es aconsejable que en la medida de lo posible las tareas estén insertas en situaciones de enseñanza-aprendizaje de la matemática.
- Conviene que estén orientadas hacia elementos del MTSK que se espera construya el estudiante para profesor.
- La práctica real es para nosotros uno de los principales detonantes de las tareas; es un modo de que los estudiantes para profesor otorguen legitimidad al conocimiento especializado a construir.

La problemática que aquí planteamos en relación con el diseño de tareas tiene sus antecedentes en experiencias anteriores usando el análisis de vídeos en la formación inicial de profesores (e.g. Carrillo y Climent, 2008; Climent, Romero-Cortés, Carrillo, Muñoz-Catalán y Contreras, 2013; Climent et al., 2016). En estas experiencias presentamos a los estudiantes para profesor sesiones completas o fragmentos de clases reales de matemáticas y pretendemos que el análisis del vídeo sea el detonante para que los estudiantes para profesor (en adelante EPP) construyan conocimiento especializado. Para orientar el análisis, aportamos a los EPP algunas categorías en las que fijarse, inspiradas en el MTSK. Estas categorías son:

- Estrategias de pensamiento y dificultades de los alumnos. Ideas intuitivas.
- Contenidos que se trabajan y en qué se pone énfasis.
- Recursos usados: Ventajas e inconvenientes.
- Ejemplos que se usan. Ventajas y posibles dificultades.
- ¿Qué conocimiento matemático le está permitiendo al profesor desarrollar esta actividad?
- ¿Qué conocimiento sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas le está permitiendo al profesor desarrollar esta actividad?
- Justificación de que esta actividad se trabaje en este curso, considerando el currículo.

Se pide a los EPP que diferencien en distintas columnas, en relación con estas categorías, qué sucede y qué interpretan.

En los proyectos de innovación e investigación educativa antes referidos nos planteamos el diseño de tareas para la formación inicial de maestros con el análisis de sesiones reales de matemáticas como partida. Para ello, la secuencia que hemos seguido ha sido:

1. Selección de un video y fragmentos de una clase real de Ed. Primaria con potencial para construir MTSK a partir de él.
2. Análisis de elementos de MTSK que pueden abordarse a partir del análisis del video.
3. Diseño de tareas para abordar los elementos de MTSK que parecen más potentes.
4. Análisis previo de la tarea desde la perspectiva del MTSK que se espera construyan los EPP.
5. Implementación de la tarea y análisis de los resultados en relación con los esperados. Rediseño.

En este taller pretendemos reproducir en parte el proceso descrito. Consideramos el paso 1 dado (mostraremos el fragmento de vídeo una vez ha sido seleccionado).

## Desarrollo del taller

### *MTSK que pueden construir los EPP a partir de un fragmento de vídeo*

Una vez presentadas las bases del taller, realizamos el visionado de un fragmento de clase real de Ed. Primaria con potencial para construir MTSK a partir de él. La tarea que se pide a los asistentes al taller es anotar elementos de MTSK que podrían abordarse a partir del video (la idea es que el video sea el detonante para el diseño de la tarea).

En el vídeo observamos a un maestro de 5º curso de Ed. Primaria gestionando una actividad en gran grupo en la que se pretende, a partir de unas figuras dadas y su clasificación en dos grupos, construir la definición de *polígono* (Oliveros, Pascual, Codes y Martín, 2018).

Los asistentes al taller trabajan en pequeños grupos discutiendo qué elementos de MTSK podrían abordarse en la formación inicial de maestros a partir del vídeo. Ponemos en común esos elementos y se pide a cada grupo de asistentes que seleccionando algunos de estos elementos, hagan un esbozo de una tarea para la formación inicial de Maestros de Ed. Primaria explicitando lo máximo posible qué elementos de MTSK quieren que construyan los estudiantes para maestro. Se les aporta el sistema de dominios, subdominios y categorías del MTSK.

Tras un tiempo de trabajo de los grupos, ponemos en común el MTSK que se espera se construya por parte de los EPP y una idea de las tareas.

## *Ejemplo de una tarea usando el fragmento anterior como detonante*

Mostramos entonces una tarea (Anexo 1) diseñada en el marco de los proyectos citados e implementada en la formación inicial de maestros de Ed. Primaria en la Universidad de Huelva.

Se pide a los asistentes, en pequeños grupos, analizar la tarea desde el punto de vista del MTSK que creen permitiría que construyeran los EPP, y desde la perspectiva de su adecuación y posibles dificultades.

Tras poner en común las ideas de los grupos, comentamos qué cuestiones surgen en el aula de formación cuando se implementó la tarea. Así, surgieron como dimensiones de variación del conjunto de figuras dado:

- Tiene ángulos/no tiene ángulos.
- Tiene ángulos rectos/no tiene ángulos rectos.
- Tiene todos sus ángulos iguales/tiene parejas de ángulos iguales/ no tiene sus ángulos iguales.
- Tiene vértices/no tiene vértices.
- Tiene lados paralelos/no tiene lados paralelos.
- Tiene todos sus lados iguales/tiene parejas de lados iguales/no tiene todos sus lados iguales.
- Sus lados son segmentos rectilíneos/contiene segmentos no rectilíneos.
- Número de lados/número de ángulos.
- Posibilidad de apoyarse sobre cualquier lado/no puede apoyarse sobre algún lado/no puede apoyarse sobre ningún lado. Estas dimensiones se identifican equivalentes a: Algún segmento con extremos en el perímetro tiene puntos fuera de la figura/cualquier segmento con extremos en el perímetro está totalmente contenido en la figura.
- El segmento determinado por cualesquiera dos puntos de la figura pertenece a la figura/algún segmento no lo cumple.
- Todas las diagonales son interiores/alguna diagonal no está contenida totalmente en el interior de la figura.
- Forma de cortarse las diagonales.
- Ejes de simetría.

El MTSK que esperábamos construyeran los EPP con esta tarea está en relación con los objetivos que siguen:

O1. Diferenciar características de las figuras planas para generar diferentes clasificaciones (relacionado con KoT).

O2. Identificar criterios de organización de figuras planas (relacionado con KoT)

O3. Generar diferentes organizaciones de figuras planas en relación a los criterios identificados (relacionado con KoT).

O4. Analizar la actividad de clasificar. Diferenciar entre clasificaciones inclusivas y disjuntas (relacionado con KoT).

O5. Identificar las dimensiones de variación que contiene un determinado ejemplo (relacionado con KoT).

O6. Analizar la potencialidad formativa que tiene un determinado ejemplo (relacionado con KMT).

O7. Analizar cómo aprenden los alumnos este contenido (imagen conceptual y posibles restricciones) (relacionado con KFLM).

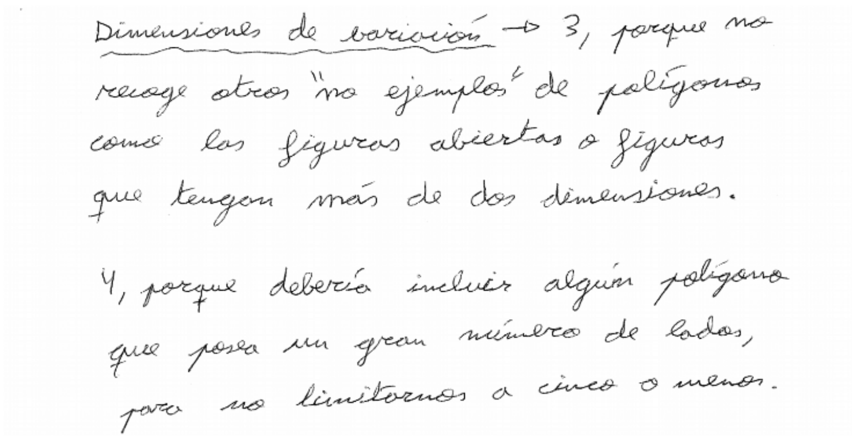
O9. Generar nuevos ejemplos o modificar un espacio de ejemplos, a partir de una revisión fundamentada de las características de los polígonos (relacionado con KoT), con una finalidad determinada (relacionado con KMT).

Presentamos algunos de los resultados de la implementación de la tarea a partir de algunas producciones de los alumnos.

Así, observamos una dificultad que no habíamos previsto: enunciar una propiedad no convencional común de un conjunto de figuras. Por otra parte, se observa la fuerte influencia del fragmento de vídeo, que previamente a esta tarea habían visualizado y analizado los EPP. De este modo, muchos de los EPP consideran los grupos polígonos/no polígonos y tiene/no tiene ángulos. También se observa esta influencia en algunas de las características que los EPP echan en falta en las figuras dadas (figura 1), que surgieron en el visionado del vídeo.

**Figura 1**

**Respuesta de un grupo de EPP al apartado 3 de la actividad de ejemplificación**


Dimensiones de variación → 3, porque no recoge otros "no ejemplos" de polígonos como las figuras abiertas o figuras que tengan más de dos dimensiones.

4, porque debería incluir algún polígono que posea un gran número de lados, para no limitarnos a cinco o menos.

A partir de estos resultados discutimos sobre la marcha de la actividad en el aula de formación inicial teniendo en cuenta también las reflexiones que siguen, efectuadas por los formadores que implementaron la tarea:

*Observé en los grupos de trabajo que era fácil identificar la idea de que el criterio que se seguía en la organización que proponíamos, era el de concavidad/convexidad,* *no obstante, encontré que tenían una dificultad especial en definir qué era una figura cóncava y una figura convexa porque eran capaces de relacionar esa propiedad con los polígonos, así que dependían de ángulos de más de 180º.*

*Cuando los alumnos estuvieron evaluando el espacio de ejemplos del maestro, tuvieron las mismas dificultades que vimos en los alumnos del proyecto de innovación del curso anterior, en relación a que no entendían qué significaba cada ítem de evaluación (indicadores de la pregunta 3).*

## Reflexión final

El análisis inicial del fragmento de vídeo por parte de los EPP permitió que se movilizaran algunos elementos de KoT, KSM, KMT, KFLM y KMLS. La implementación de tareas como la que hemos discutido en este taller permitió la profundización en algunos de estos elementos.

Algunas de las verbalizaciones de los EPP sobre lo que han aprendido no coinciden con el foco pretendido de la tarea. Así, en relación con la tarea mostrada de ejemplificación, algunos EPP destacaban que habían aprendido a clasificar con distintos criterios, situando aquí el énfasis de la tarea. Nos preguntamos si esta diferencia entre el MTSK pretendido y construido (al menos declarado por los EPP) se debe a cuestiones relativas al diseño de la tarea.

Por otra parte, observamos que el vídeo aporta potencial a la construcción de MTSK por parte de los EPP (le otorga legitimidad al MTSK a construir, por ejemplo) y a su vez restringe el MTSK que algunos EPP construyen a partir de las tareas. Esto lo observamos en el hecho de que algunos EPP difícilmente se separan de lo que han observado en el vídeo. En este mismo sentido, observamos como en la secuencia de tareas en las que el análisis del vídeo es la primera de una secuencia a la que siguieron otras tres tareas (entre ellas la discutida en el taller), para los alumnos el vídeo es la tarea preponderante frente a las otras.

En la implementación de las tareas en distintos grupos de EPP, con distintos formadores, se ha puesto de manifiesto la importancia del conocimiento del formador. El estudio de la relación entre dicho conocimiento y la gestión de una tarea, así como el diseño de tareas que trabajen la integración e interrelación de distintos elementos de MTSK son temas en los que seguir avanzando en relación con el diseño de tareas para la formación inicial de profesores con el MTSK como organizador.

## Agradecimientos

Este taller se ha nutrido del trabajo realizado en el proyecto de innovación *Elaboración de material didáctico electrónico basado en el análisis de buenas prácticas en el aula de matemáticas de Primaria* (2017-18) y el proyecto de investigación educativa *Un experimento de enseñanza sobre el uso de material didáctico multimedia en la formación de maestros de Primaria* (2018-19), ambos financiados por la Universidad de Huelva.

## Referencias

Carrillo, J., y Climent, N. (2008). From professional tasks in collaborative environments to educational tasks in mathematics teacher education. En R. Millman, B. Grevholm y B. Clarke (Eds.), *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education. Purpose, Use and Exemplars* (pp. 215-234). New York: Springer.

Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Carrillo, J., Liñán, M., Muñoz-Catalán, M .C, Barrera, V., y León, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las Matemáticas a través del análisis de vídeos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 9, 85-103.

Climent, N., Romero-Cortés, J. M., Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M. C. y Contreras, L. C. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula? *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *16*(1), 13-36.

Codes, M., Climent, N., y Oliveros, I. (2019). Prospective Primary Teachers' Knowledge about the mathematical practice of defining. En U.T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, y M. Veldhuis (Eds.). Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 3971-3978). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group and Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Montes, M.A., Climent, N., Carrillo, J., y Contreras, L.C. (2019). Constructing tasks for primary teacher education from the perspective of Mathematics Teachers' Specialised Knowledge. En U.T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, y M. Veldhuis (Eds.). Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 3955-3962). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group and Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

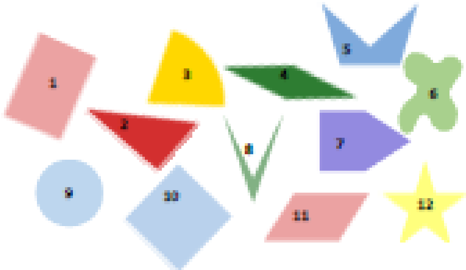
Oliveros, I., Pascual, M. I., Codes, M., y Martín, J. P. (2018). El conocimiento de la práctica matemática compartido por estudiantes para maestro a través del análisis de vídeos. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García-García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 407-416). Gijón: SEIEM.

Pascual, M. I., Codes, M., Martín, J. P., y Carrillo, J. (2019). Cómo definen los estudiantes para maestro: análisis de sus definiciones de polígono. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXIII (pp. 451-459). Valladolid: SEIEM.

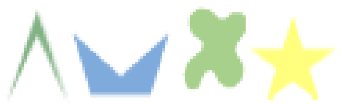
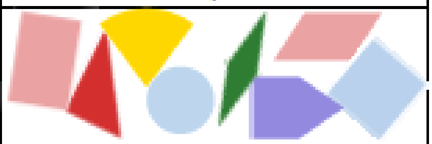
# ANEXO 1
## TAREA DE EJEMPLIFICACIÓN

**Guion de actividades sobre ejemplificación.**

1.- Señala similitudes y diferencias (diferentes de ser polígonos o no polígonos) entre las figuras mostradas por Enrique durante el desarrollo de su clase, organizando las figuras en grupos según las semejanzas que encuentres.




a) Lo que sigue es un ejemplo de lo que requiere la tarea. Indica qué cualidad se deriva de la siguiente organización:

| Grupo 1 | Grupo 2 |
|---|---|
|  |  |

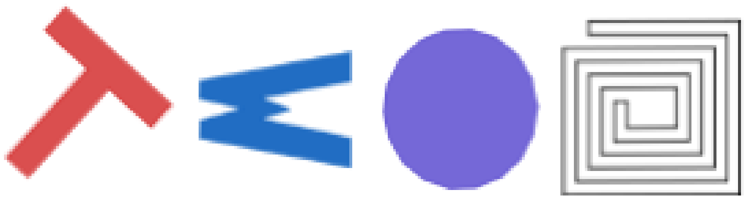
b) Propón, al menos, otras tres organizaciones de las figuras anteriores indicando el criterio que has usado y qué figuras componen cada grupo. Las nuevas organizaciones propuestas no tienen por qué diferenciarse solo en dos grupos (dicotómicas).

2.- Lee el capítulo de Figueiredo y Contreras (2015) y describe con tus propias palabras qué es una dimensión de variación. Señala distintas dimensiones de variación en base a las cuales organizar las figuras anteriores.

3.- Utiliza la siguiente tabla para examinar el conjunto de los ejemplos seleccionados por el maestro del vídeo para configurar la enseñanza del concepto de polígono. Justifica las valoraciones de cada ítem, reflexionando después sobre el porqué de tu evaluación (explica tanto como puedas dicha valoración).

| INDICADOR | VALORACIÓN (de 1 a 5) |
|---|---|
| **Variabilidad en las posiciones**: cómo el conjunto de ejemplos contempla o no los distintos apoyos de las figuras, evitando las posiciones prototípicas. | |
| **Dimensiones de variación**: capacidad del conjunto de ejemplos para poner de relieve los elementos que pueden distinguir unas figuras de otras. | |
| **Potencialidad para generar grupos que describan propiedades comunes**: grado en el que las figuras propuestas permiten clasificaciones en distintos subgrupos. | |
| **Variabilidad en los elementos de los mismos grupos**: capacidad del conjunto de ejemplos para evidenciar agrupaciones en las que se observen la confluencia de distintas propiedades. | |
| **Capacidad para abarcar ejemplos extremos**: grado en el que el conjunto de ejemplos permite la construcción de figuras cuyas características no son evidentes a primera vista. | |

4.- Discute cómo se vería afectado tu análisis con la inclusión de las siguientes figuras en el espacio de ejemplos del aula:



# Comunicaciones

# Construyendo categorías del Conocimiento de la Práctica Matemática

Rosa Delgado-Rebolledo
Diana Zakaryan

## Resumen

En este trabajo se presenta un proceso metodológico para la construcción de categorías del conocimiento de la práctica matemática, el único subdominio del modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas que aún no cuenta con categorías analíticas. Este proceso considera las estrategias de muestreo teórico y método de comparación constante como elementos distintivos de la Teoría Fundamentada. A partir de ejemplos concretos, se muestran los distintos niveles de abstracción en la construcción de categorías para asegurar que estas sean mutuamente excluyentes y respondan a los elementos más relevantes del conocimiento de la práctica matemática del profesor.

## Palabras clave

Conocimiento del profesor, conocimiento de la práctica matemática, construcción de categorías, teoría fundamentada.

## Abstract

In this work we present a methodological process to build categories of knowledge of practices in mathematics, the only subdomain of the Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge model without analytical categories. The methodological process considers the strategies of theoretical sampling and constant comparative method as distinctive elements of Grounded Theory. Using concrete examples, we show different levels of abstraction in the building of mutually exclusive categories that respond to the more relevant elements of teacher´s knowledge of practices in mathematics.

## Keyword

Teacher knowledge, knowledge of practices in mathematics, building categories, grounded theory.

Delgado-Rebolledo, R. y Zakaryan, D. (2019). Construyendo categorías del Conocimiento de la práctica matemática. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (70-78). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Introducción

La idea de considerar el conocimiento de prácticas matemáticas como parte del conocimiento del profesor proviene de las investigaciones sobre el conocimiento sintáctico (e.g. Schwab, 1978) y, en particular, del conocimiento sobre las matemáticas (e.g., Ball, 1990), las cuales señalan que el profesor no solo debe conocer los conceptos, procedimientos, propiedades y relaciones entre contenidos, sino que debe tener un conocimiento acerca de las matemáticas como disciplina. En consonancia con lo anterior, en la literatura se puede encontrar un número significativo de estudios sobre el conocimiento del profesor de prácticas matemáticas. Por ejemplo, Ball y Bass (2009) consideran una dimensión del conocimiento en el horizonte matemático que tiene en cuenta prácticas matemáticas claves como usar definiciones y probar. Por su parte, Chapman (2015) se enfoca en el conocimiento del profesor de la resolución de problemas, mientras que Stylianides, Bieda, y Morselli (2016) reportan varios trabajos acerca de la naturaleza del conocimiento de los profesores sobre la argumentación y la prueba. De acuerdo con lo anterior, aunque diferentes prácticas matemáticas están presentes en las investigaciones sobre el conocimiento de profesor, dichas prácticas no se habían tratado de manera conjunta como se propone en el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés) (Carrillo et al., 2018) al incluir el subdominio de conocimiento de la práctica matemática, KPM (Knowledge of Practices in Mathematics).

## El conocimiento de la práctica matemática

En el subdominio KPM, una práctica matemática es cualquier actividad matemática llevada a cabo sistemáticamente que representa un pilar de la creación matemática y que conforma una base lógica de la cual se pueden extraer reglas (Carrillo et al., 2018). En este sentido, el KPM agrupa el conocimiento del profesor sobre cómo se construyen las matemáticas y cuáles son los distintos tipos de razonamientos y estrategias de las que se sirve la disciplina para generar nuevos saberes (Oliveros, Pascual, Codes y Martín, 2018). Son ejemplos de KPM, el conocimiento del profesor sobre demostrar, definir y usar heurísticos para resolver problemas.

Al ser un conocimiento sobre el funcionamiento de las matemáticas, el KPM da soporte a otros subdominios del conocimiento especializado del profesor (e.g. Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2020) y, a su vez, permite que este pueda gestionar los razonamientos matemáticos puestos en juego por sus estudiantes, aceptándolos, refutándolos o refinándolos si fuese necesario (Carrillo et al., 2018). Por ejemplo, los profesores que tienen dificultades para reconocer patrones y relaciones o para proveer justificaciones matemáticas convincentes pueden carecer de los recursos necesarios para ayudar a los estudiantes a construir argumentos y pruebas (Goulding, Rowland y Barber, 2002).

A pesar de la importancia del KPM en el conocimiento del profesor de matemáticas, en el estudio realizado por Escudero-Domínguez, Joglar, Corrêa y Reyes (2016) se concluye que este subdominio es el menos abordado en las investigaciones con el MTSK desarrolladas con profesores de distintos niveles educativos. De manera similar, la recopilación realizada por Zakaryan y Sosa (2019) muestra que son escasas las evidencias de KPM en las clases de matemáticas, no obstante, las autoras documentan prácticas matemáticas como la resolución de problemas, la construcción de una definición, la generalización, la demostración y la justificación. De este modo, aunque se han obtenido resultados empíricos sobre el conocimiento del profesor de prácticas matemáticas, la categorización del KPM es un tema de investigación abierto dentro del modelo MTSK.

De acuerdo con Flores-Medrano y Aguilar-González (2017), la caracterización del KPM plantea un reto metodológico respecto a las formas de acceso a la información relativa a este subdominio, lo cual incluye explorar los escenarios más propicios para obtener evidencias naturales de este tipo de conocimiento. En consonancia con lo anterior, Oliveros et al. (2018) se apoyan del análisis de vídeo y la discusión en un entorno colaborativo para estudiar el conocimiento del profesor de las prácticas de definir y clasificar, considerando que los elementos sintácticos que conforman el KPM de los profesores de primaria no suelen abordarse de forma explícita en la enseñanza en este nivel. Siguiendo esta idea, en comparación con las matemáticas enseñadas en primaria y secundaria, en la universidad los conceptos se especifican por definiciones y propiedades reconstruidas a través de deducciones lógicas, así como se enfatizan en el pensamiento matemático avanzado, la prueba, la abstracción y el uso del lenguaje matemático preciso (e.g., Clark y Lovric, 2009). En este sentido, las características de la enseñanza de las matemáticas en la educación superior sugieren que este es un contexto favorable para identificar el KPM debido a que este conocimiento estaría presente con mayor énfasis en las prácticas de enseñanza de los profesores de matemáticas universitarios. De acuerdo a lo expuesto, en este documento presentamos nuestra aproximación a la construcción de categorías del KPM a través del estudio del conocimiento de profesores de matemática universitarios. En particular, profundizamos en la metodología utilizada para la obtención de dichas categorías.

## Aspectos metodológicos

En esta investigación buscamos construir categorías para el KPM a partir del estudio del conocimiento de profesores de matemáticas universitarios. La perspectiva metodológica escogida para abordar esta investigación es la Teoría Fundamentada (Charmaz, 2014), la cual permite el desarrollo de teoría basada en la recogida y el análisis sistemático de datos. Aunque en sus inicios las investigaciones con la Teoría Fundamentada intentaban partir de cero en el conocimiento del fenómeno, las reformulaciones de la metodología no niegan la posibilidad de que el investigador decida adoptar una teoría ya existente. Sin embargo, esta teoría debe estar fundamentada en lo empírico y tiene que ser mejorada y elaborada en un diálogo e interpelación constante con los datos que se van obteniendo (Strauss y Corbin, 1994). Así, debido a que el modelo MTSK fue construido a partir de la reflexión teórica y la investigación empírica con profesores de matemáticas en diferentes niveles educativos, es pertinente utilizar la Teoría Fundamentada para abordar la construcción de categorías del KPM.

Los elementos que diferencian la Teoría Fundamentada de otros métodos de análisis cualitativo de datos son el muestreo teórico y el método de comparación constante, los cuales están estrechamente relacionados. El propósito principal del muestreo teórico es orientar la recolección de los datos, mientras que el método de comparación constante apoya la generación de teoría a través de la identificación y proposición de la mayor cantidad de categorías y propiedades de un concepto. Considerando el propósito de esta investigación, a continuación, exponemos cómo se llevó a cabo el muestreo teórico, incluyendo la recogida y el análisis de los datos. Además, detallamos cómo utilizamos el método de comparación constante para la construcción de las categorías del KPM.

## Muestreo teórico, recolección y análisis de datos

Los informantes de esta investigación fueron escogidos a partir de la estrategia de muestreo teórico donde la recogida y el análisis simultáneo de los datos fue configurando las características y el número de informantes. Iniciamos el muestreo con la observación a un profesor de matemáticas universitario llamado Diego. La elección inicial de Diego se realizó teniendo en cuenta las características secundarias de profesor experto descritas por Rojas, Carrillo, y Flores (2012). Por ejemplo, el profesor cuenta con más de 20 años de experiencia docente, ha enseñado el contenido más de una vez y ha obtenido el grado de doctor en matemáticas. A partir de estas consideraciones, se decidió analizar una clase de Diego en un curso de Análisis Real. En dicha clase el profesor mostró dominio de los contenidos matemáticos que abordaba, interés por analizar su práctica de enseñanza y por comprender las dificultades de los estudiantes, así como conocimiento de diferentes estrategias para resolver problemas. Rojas et al. (2012) incluyen estos elementos dentro de las características primarias de un profesor experto, por lo cual Diego fue finalmente seleccionado y observado durante un semestre en el desarrollo de un curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Los descriptores y subcategorías obtenidos en el análisis del KPM de Diego orientaron la selección como informantes de otros dos profesores, llamados Juan y Andrés, quienes cuentan con 8 y 12 años de experiencia docente en la educación superior, respectivamente. Juan fue escogido debido a que desarrollaba un curso de Espacios Métricos con contenidos similares a los analizados en la clase de Análisis Real y esto podría fortalecer los descriptores y subcategorías de KPM antes identificados en el conocimiento de Diego. Por su parte, Andrés fue seleccionado considerando que podría proveer nuevos descriptores y subcategorías del KPM ya que desarrollaba un curso de Cálculo Vectorial, un contenido distinto a los ya abordados por los otros profesores. Los cursos antes mencionados pertenecen a las carreras de Licenciatura en Matemáticas y Pedagogía en Matemáticas de una universidad chilena.

Para optimizar la organización y el análisis de las sesiones de clase observadas y videograbadas nos apoyamos en el software ATLAS.ti. Puesto que el software permite el trabajo con archivos de vídeo, cada una de las sesiones de clase fue reproducida y dividida en episodios, según las acciones y los objetivos matemáticos del profesor, por ejemplo, desde que el profesor inicia hasta que termina de exponer una definición, se considera como un episodio. En cada episodio de clase, se seleccionaron como unidades de análisis (incidentes en términos de la Teoría Fundamentada), las intervenciones orales o escritas del profesor que daban cuenta de un conocimiento relacionado con el KPM, las mismas fueron clasificadas como evidencias e indicios de conocimiento (Moriel-Junior y Carrillo, 2014), distinción que se realizó con el fin de refinar nuestras interpretaciones y profundizar en la comprensión del KPM de los profesores. Sin embargo, para la construcción de categorías solo se tuvieron en cuenta las evidencias de conocimiento, tanto las inicialmente identificadas como aquellas confirmadas tras de indagar en mayor detalle en los indicios.

En cuanto a las entrevistas, estas fueron grabadas en audio y posteriormente transcritas reproduciendo con la mayor fidelidad posible el discurso de los profesores. Algunas preguntas de las entrevistas provenían de las notas de campo, otras se formularon para profundizar en las evidencias de conocimiento identificadas en el análisis de las clases y otras se enfocaron en los indicios de conocimiento. En cualquier caso, las preguntas de la entrevista se desarrollaron con el fin de que los profesores reflexionaran y justificaran los motivos de algunas de sus expresiones o actuaciones en clase y de este modo, profundizar en su KPM.

Después de analizar un total de 32 horas de audio y video grabaciones correspondientes a 20 sesiones de clases de 90 minutos aproximadamente y 5 horas de entrevista, se determinó la finalización del muestro teórico al alcanzar la saturación de datos relativos a los descriptores y subcategorías emergidos.

## Construcción de categorías

Las transcripciones de las sesiones y entrevistas audio y videograbadas fueron codificadas de forma abierta haciendo uso del software ATLAS.ti. Tanto los episodios de clases como las preguntas de las entrevistas fueron numerados y a cada unidad de análisis se le asignó un código que señalaba la práctica matemática identificada o un atributo de dicha práctica. Por ejemplo, en el quinto episodio de la cuarta sesión de clases del curso de Espacios Métricos (nombrado como EM4.5) se identificó la práctica matemática de definir. En particular, el profesor hace énfasis en la equivalencia entre dos definiciones, de este modo, la unidad de análisis se codifica como *equivalencia-definición*. Adicionalmente, a esta unidad se le asocia un descriptor que resume el conocimiento del profesor. En el ejemplo anterior se establece como descriptor el *conocimiento de la equivalencia entre definiciones de la clausura de un conjunto*. Según se observa, el conocimiento se expone en términos del contenido matemático presente en la unidad de análisis debido a que en esta primera etapa de categorización el propósito es describir.

Posteriormente, en la etapa de síntesis los códigos fueron analizados considerando la repetición de descriptores y la agrupación de descriptores similares, llevando a cabo un primer nivel de abstracción. En el ejemplo anterior, el código *equivalencia-definición* se encontraba asociado a una unidad de análisis en la entrevista (EEM4) y dos unidades de análisis en los episodios EM4.5 y EM7.2 con descriptores sobre definiciones de la clausura de un conjunto y sucesiones de Cauchy. Iniciando la etapa de síntesis extraemos un solo descriptor desligado del contenido matemático: *Conocimiento de la equivalencia entre definiciones de un concepto*.

Después de esta revisión de códigos y descriptores, se realizó una agrupación que considera relaciones de asociación e inclusión entre códigos, en este sentido, la agrupación se apoya de la codificación axial. Lo anterior, con el objetivo de construir descriptores más generales y códigos más amplios que los obtenidos en la etapa de descripción. En el ATLAS.ti se van configurando grupos de códigos. Para la agrupación tenemos en cuenta similitudes y diferencias entre los códigos de modo que las subcategorías y categorías que se generen a partir de las relaciones que se establezcan al final del análisis sean mutuamente excluyentes. Continuando con el ejemplo anterior, observamos otros códigos que hacen referencia a la práctica de definir. En particular, nos fijamos en el código *elegancia-definición* cuyo descriptor es *conocimiento de las características de una definición elegante*, no obstante, el criterio de elegancia está vinculado con el criterio de equivalencia pues generalmente se escoge una definición elegante entre las definiciones equivalentes. Así, el código *elegancia-definición* está asociado con el código *equivalencia-definición* y se conservan los dos descriptores.

En la siguiente etapa denominada subcategorización se desarrolló un segundo nivel de abstracción en el cual los códigos y descriptores antes agrupados y expresados de manera general son nuevamente relacionados con el fin de construir subcategorías de conocimiento. El mayor reto en esta etapa es asegurar que las subcategorías propuestas respondan a los elementos más importantes del conocimiento del profesor de las prácticas matemáticas identificadas. Con tal fin, se compararon los episodios vinculados a una misma práctica para garantizar la generalidad de las agrupaciones realizadas. En este caso, se compararon los episodios asociados al código *equivalencia-definición* con aquellos asociados al código *construcción-definici*ón, concluyendo que los códigos son disjuntos pues hacen referencia a distintos aspectos de la práctica de definir. Adicionalmente, se desarrolló una revisión bibliográfica de la cual algunos descriptores antes identificados quedaron sustentados por la literatura de investigación. De este modo, las subcategorías se basan en los resultados teóricos y empíricos ya establecidos sobre prácticas matemáticas y sobre el conocimiento del profesor de dichas prácticas. En el ejemplo que hemos venido presentando, el código *equivalencia-definición y elegancia-definición* pasan a ser parte de la subcategoría *características de la definición* la cual está sustentada en investigaciones sobre la práctica de definir (e.g., Escudero, Gavilán y Sánchez-Matamoros, 2014).

En la Tabla 1 se resume el ejemplo antes expuesto, en el cual las tres primeras etapas de categorización permiten la construcción de una subcategoría de KPM relacionada con la práctica de definir, identificada en el conocimiento de Juan, el profesor que desarrolló el curso de Espacios Métricos.

**TABLA 1**
**CONSTRUCCIÓN DE UNA SUBCATEGORÍA DE CONOCIMIENTO DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA**

| Etapa | Código (definición) | Episodios | Descriptores |
|---|---|---|---|
| **Descripción** | Equivalencia | EM4.5 | Conocimiento de la equivalencia entre definiciones de la clausura de un conjunto. |
| | Equivalencia | EM7.2 | Conocimiento de la equivalencia entre definiciones de una sucesión de Cauchy. |
| **Síntesis** | Equivalencia | EM4.5, EM7.2, EEM4 | Conocimiento de la equivalencia entre definiciones de un concepto. |
| | Elegancia | EM4.4, EM4.5 | Conocimiento de la elegancia de una definición entre las definiciones de un concepto. |
| **Subcategorización** | Características de la definición | EM4.4, EM4.5, EM7.2,EEM4 | Conocimiento de la equivalencia entre definiciones de un concepto y la elegancia entre definiciones equivalentes. |

Las etapas de *descripción*, *síntesis y subcategorización* se desarrollan de manera similar en cada informante del estudio de modo que se obtienen grupos de subcategorías de conocimiento. Por ejemplo, en esta investigación, se obtuvieron tres grupos de subcategorías los cuales fueron comparados identificando e integrando las subcategorías en común. Las subcategorías restantes (aquellas identificadas en el conocimiento de un solo profesor o dos de ellos) fueron analizadas buscando establecer diferencias o formas de combinarlas con las subcategorías en común.

En la Tabla 2 se expone la comparación entre dos grupos de subcategorías, las resultantes del análisis del conocimiento de Diego y las provenientes del análisis del conocimiento de Juan.

NO SE EXACTAMENTE QUE ES LO QUE HAY QUE CORREGIR AQUÍ!!!

**Tabla 2**

**Comparación de dos grupos de subcategorías**

| Subcategorías de conocimiento en común (Diego y Juan) | Subcategorías solo en el conocimiento de Juan |
|---|---|
| Métodos y tipos de demostración<br>Desarrollo de pruebas | Papel de los símbolos |
| Papel de los cuantificadores | |
| Uso del lenguaje matemático<br>Características de la definición | |
| Roles de la demostración | |

En esta comparación, se observa que Diego y Juan comparten varias subcategorías de conocimiento, de modo que no encontramos subcategorías propias solo al conocimiento de Diego. Así, para integrar estos grupos de subcategorías hay que profundizar en la subcategoría restante del conocimiento de Juan. Una comparación similar a la anterior se hizo con las subcategorías de conocimiento de Andrés. De este modo, se obtiene una subcategorización que tiene en cuenta el conocimiento de los tres profesores, sobre la cual se realizan agrupaciones considerando las características que comparten las subcategorías y las prácticas matemáticas a las que hacen referencia. De este modo se desarrolla la etapa de *categorización* donde las comparaciones y combinaciones que se realizan entre subcategorías tienen el objetivo de garantizar que las categorías propuestas no se solapen. Además, se recurre nuevamente a la literatura de investigación para que la propuesta de categorización que se obtenga se adecue a los elementos del KPM identificados en otros estudios y a su vez permita la emergencia de nuevos resultados.

## Consideraciones finales

En este documento presentamos un ejemplo de construcción de categorías para el subdominio KPM considerando las etapas de *descripción*, *síntesis*, *subcategorización* y *categorización*. El proceso de construcción de categorías está basado en el método de comparación constante, haciendo el énfasis en que las categorías construidas sean mutuamente excluyentes. La codificación abierta con un propósito descriptivo es la principal diferencia entre el método de comparación constante y nuestro proceso de construcción de categorías debido a que la comprensión inicial del KPM del profesor está ligada a contenidos matemáticos específicos. En consonancia con lo anterior, nos referimos a unidades de análisis y descriptores, en el sentido de los términos utilizados en la Teoría Fundamentada: incidente e indicador. Además, la codificación axial se desarrolla como un estado avanzado de la codificación abierta (Strauss, 1987) para apoyar las agrupaciones y relaciones entre códigos y se utiliza tanto en la etapa de síntesis como en la de subcategorización.

Por otra parte, coincidimos con Flores-Medrano y Aguilar-González (2017) en que, si bien el fin último de las investigaciones realizadas con el MTSK no es clasificar conocimientos, tener un sistema de categorías de KPM bien definido tiene la potencialidad para permitir el análisis de distintas prácticas y sus relaciones con el conocimiento que las sustentan. En este sentido, construir categorías del KPM y analizar este subdominio de conocimiento viene acompañado de la posibilidad de avanzar en la comprensión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. De acuerdo con lo anterior, es necesario profundizar en el KPM y sus componentes a partir de la reflexión sobre la adecuación de las categorías obtenidas en el conocimiento de profesores de matemáticas universitarios al conocimiento de profesores de otros niveles educativos, así como, desarrollar más investigaciones que den cuenta del KPM de profesores de matemáticas.

## Agradecimientos

Trabajo financiado por CONICYT, Beca de Doctorado Nacional Folio No. 21170442.

## Referencias

Ball, D. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal, 90*(4), 449-466.

Ball, D., y Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing Mathematics for teaching to learners' mathematical futures. En *The 2009 Curtis Center Mathematics and Teaching Conference*. University of California, LA.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D.,..., Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *International journal on math, science and technology education (LUMAT), 3*(1), 19-36.

Charmaz, K. (2014). *Constructing grounded theory* (2nd ed.). London: Sage.

Clark, M. y Lovric, M. (2009). Understanding secondary-tertiary transition in mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40* (6), 755-776.

Delgado-Rebolledo, R., y Zakaryan, D. (2020). Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 18(3), 567-587.

Escudero, I. M., Gavilán, J. M. y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(1), 7-32.

Escudero-Domínguez, A., Joglar, N., Corrêa, D., y Reyes, A. (2016). Retrospectiva de las investigaciones sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. *Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 69-86). Huelva: CGSE.

Flores-Medrano, E. y Aguilar-González, A. (2017). Profundizando en el Conocimiento de la Práctica Matemática. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 38-47). Huelva: CGSE.

Goulding, M., T. Rowland y P. Barber (2002). Does it matter? Primary teacher trainees' subject knowledge in mathematics. *British Educational Research Journal, 28*(5), 689-704.

Moriel-Junior, J. G., y Carrillo, J. (2014). Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar matemática com o modelo MTSK. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 465-474). Salamanca: SEIEM.

Oliveros, I., Pascual, M. I., Codes, M., y Martín, J. P. (2018). El conocimiento de la práctica matemática compartido por estudiantes para maestro a través del análisis de videos. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 407- 416). Gijón: SEIEM.

Rojas, N., Carrillo, J., y Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 479 - 485). Jaén: SEIEM.

Schwab, J. (1978). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury y N. J. Wilkof (Eds.), *Science, curriculum, and liberal education* (pp. 229-272). Chicago: University of Chicago Press.

Strauss, A. (1987). *Qualitative analysis for social scientists*. Cambridge: Cambridge University Press.

Strauss, A., y Corbin, J. (1994). Grounded Theory Methodology: An overview. En N. Denzin, e Y. Lincoln, (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 273- 285). Thousand Oaks: Sage.

Stylianides, A.J., Bieda, K. N., y Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education. En A. Gutiérrez, G.C. Leder y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 315-351). Rotterdam: Sense Publishers.

Zakaryan, D., y Sosa, L. (2019).¿Cómo los profesores hacen prácticas matemáticas en sus aulas? En R. Olfos, E. Ramos., y D. Zakaryan (Eds.), *Formación docente: Aportes a la práctica docente desde la didáctica de la matemática* (pp. 281-300). Barcelona: Graó.

# Ensinar a reprodução das plantas com as lentes BTSK

Mónica Luís
José Carrillo
Rute Monteiro

## Resumen

Nesta comunicação é apresentado o modelo do conhecimento especializado do professor quando ensina um tópico da biología (reprodução das plantas) que constitui a primeira adaptação do MTSK a esta disciplina. São apresentados e caracterizados os domínios do conhecimento, os subdominios e as categorias que o integram, sem esquecer o modelo inspirador e a literatura existente no âmbito do conhecimento profissional ou específico do professor de biologia ou de ciências. Não foi considerada nesta comunicação o dominio das crenças.

## Palabras clave

Didáctica, biologia, mtsk, práctica educativa, reprodução das plantas.

## Abstract

In this paper we present the model of especialised knowledge of the teacher when teaching a topic of biology (plant reproduction) which is the first adaptation of MTSK in this subject. The domains of knowledge, the subdomains and the categories that integrate it are presented and characterized, not forgetting the inspiring model and existing literature about professional or specific knowledge of the biology teacher or science teacher. The domain of beliefs was not considered in this work.

## Keywords

Didactics, biology, mtsk, educational practice, plants reproduction.

Luís, M., Carrillo, J. y Monteiro, R. (2019). Ensinar a reprodução das plantas com as lentes BTSK. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (79-86). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Introdução

O conhecimento prático, profissional ou especializado do professor tem vindo a ser estudado intensamente desde a década de 80 após as publicações de Shulman (1986, 1987). Este autor apresenta um conjunto de categorias que integram o conhecimento que permite ao professor (qualquer que seja a sua área ou disciplina) desempenhar o seu trabalho.

Nos anos que se seguiram foram vários os autores que apresentaram os seus modelos de conhecimento do professor. Na área das ciências destacam-se os modelos de Park y Oliver (2008) e de Gess-Newsome (2015). O modelo pentagonal de Park e Oliver foi durante algum tempo o modelo mais representativo do conhecimento do professor de ciências. Está centrado no Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) e inclui outros aspetos como o conhecimento das necessidades dos estudantes ou o conhecimento da sua motivação ou interesse.

O modelo consensual de Gess-Newsome (2015) foi encontrado após uma cimeira realizada para discutir e encontrar o modelo que melhor pudesse representar o conhecimento do professor. O trabalho final resultou no modelo que representa a grande idea (Big Idea) do conhecimento do professor, feito a partir dos aspetos identificados por Shulman (1986, 1987). O modelo revela principamente o processo dinâmico de como esse conhecimento é gerado a partir das influências que sofre ao longo da atividade do professor. É um modelo generalista para o ensino dos diferentes ramos das ciências e encontra-se ainda pouco detalhado na literatura a que tivemos acesso.

Nitz *et al.* (2010) inspira-se nas contribuições de Abell (2007) e de Park y Oliver (2008) e apresenta o conhecimento profissional do professor de biología num modelo que evidencia uma distinção clara entre o Conhecimento do Conteúdo (CK) e PCK. Este modelo é o mais semelhante ao modelo que Carrillo *et al.* (2018) apresentam no âmbito da disciplina da matemática (MTSK). Este último apresenta ainda um terceiro domínio do conhecimento: o Domínio das Crenças. Além disso, no âmbito do CK encontra-se o conhecimento dos temas (não identificado no modelo de Park y Oliver (2008) mas referido no modelo de Nitz *et al.* (2010)), o conhecimento da forma como os tópicos se inter-relacionam e conhecimento de como se produz e valida o conhecimento científico.

A complexidade do modelo MTSK e o facto de reconhecermos que é, entre os estudados, aquele que se encontra mais detalhado, faz-nos escolher este modelo para caracterizar o conhecimento do professor quando ensina o tópico da reprodução das plantas. Sendo este tópico um tema da biología, designaremos o modelo como BTSK, apesar de termos estudado apenas um tópico do vasto leque que integram a disciplina.

## Metodologia

Este trabalho tem como objetivos identificar o conhecimento mobilizado por dois professores de 3º e 6º anos de escolaridade (8 e 12 anos de idade) quando ensinam e reprodução das plantas e caracterizar esse conhecimento. Trata-se de uma investigação de caráter qualitativo (Denzin e Lincoln, 1994), inserido num paradigma interpretativo de acordo com Bassey (1999). Seguindo este paradigma, pretendemos conhecer, compreender e interpretar a realidade, neste caso em particular, o conhecimento de dois professores no decorrer do ensino do tema da reprodução das plantas para construir um modelo do conhecimento especializado no âmbito deste tema da biologia. Trata-se, assim, de um estudo de caso instrumental, de acordo com Stake (2005).

Para conhecermos em profundidade o conhecimento destes professores, procedemos à observação e gravação em vídeo de 14 aulas e à realização com gravação audio de quatro entrevistas. As aulas, depois de transcritas, foram divididas em episódios e analisadas com recurso à análise de conteúdo (Krippendorf, 2013; Bardin, 1994) na qual as informações foram agrupadas de acordo com o seu significado. No entanto, o encontro e definição das categorias do conhecimento só foi possível analisando a informação sob duas perspetivas distintas e complementares seguindo a perspetiva metodológica Top Down - Bottom Up (Grbich, 2013). A aproximação Top-Down permitiu reconhecer, na literatura existente, que conhecimento foi já identificado como específico do professor de ciências ou de biologia e caracterizar os diferentes aspetos desse conhecimento. Em Bottom-Up foram analisadas as aulas e registado o conhecimento mobilizado pelos professores no decorrer do ensino do tema "Reprodução das Plantas". Estas abordagens, simultâneas, permitiram o refinar constante das categorias.

## O modelo especializado do professor quando ensina tópicos da biologia - BTSK

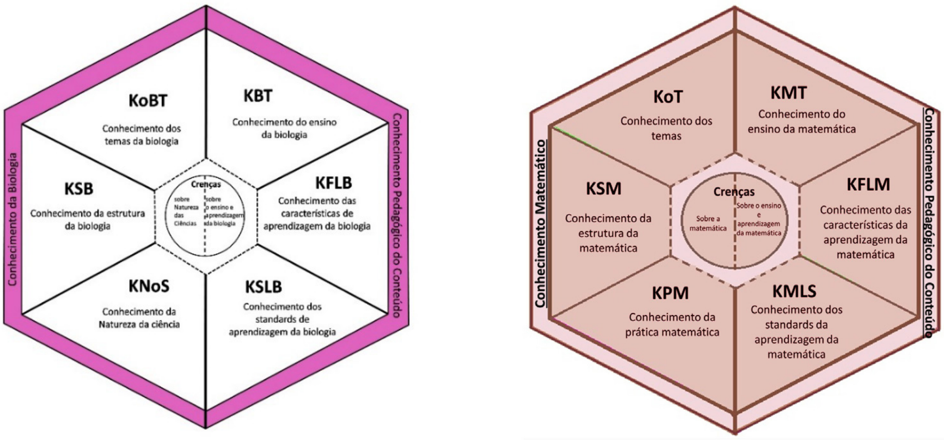
Os subdomínios que caraterizam o BTSK são equivalentes aos que caraterizam o MTSK pois incluem conhecimento com as mesmas características, figura 1. As diferenças tornam-se bastante mais acentuadas quando se trata de definir e caracterizar as categorias que integram os subdominios.

## *Domínio: Conhecimento da Biologia*

O domínio do Conhecimento da Biologia integra três subdomínios: o Conhecimento dos temas da biologia, o Conhecimento da estrutura da biologia e o Conhecimento da Natureza da Ciência.

O subdomínio do Conhecimento dos temas da Biologia integra o conhecimento sobre o tema, tal como o nome indica; neste caso o conhecimento sobre a reprodução das plantas. Neste subdomínio foram identificadas e caracterizadas cinco categorias que se passam a caracterizar.

**FIGURA 1**
**OS MODELOS BTSK E MTSK.**



A categoria Conhecimento de conceitos da biologia e de exemplos associados é caracterizada pelo conhecimento das definições ou propriedades específicas que caracterizam os elementos ou conceitos biológicos e dos exemplos que ajudam a defini-lo. Park e Chen (2012) e Van Dijk e Kattmann (2007) referem a importância deste tipo de conhecimento mas a especificação desta categoria vem diretamente do modelo MTSK (Escudero-Avila, 2015). Integra-se aqui o conhecimento sobre os conceitos de polinização, de reprodução sexuada e assexuada, de semente e embrião, entre muitos outros frequentemente evidenciados ao longo das aulas observadas.

A categoria Conhecimento de leis, princípios e teorias da biologia integra precisamente o conhecimento de leis, princípios e teorias associadas ao tema da reprodução das plantas e foi criada pela importância que lhes são dadas pela comunidade científica (NRC, 2008). Constituem formas de organizar a informação e de a tornar clara para os outros.

O conhecimento evidenciado por uma das professoras relativamente à Lei do Mínimo serve para ilustrar o conhecimento que se inclui nestas categorias. A professora revela que a agua é o fator limitador da germinação. É necessária uma quantidade mínima para que ocorra o fenómeno. Esta declaração mostra-nos que conhece a Lei do Mínimo que em traços gerais diz que o desenvolvimento está limitado pelo componente que existe em menor quantidade.

Estas duas categorias, juntas, têm correspondência na categoria “Conhecimento das propriedades e fundamentos atribuíveis a um conteúdo matemático” do MTSK. Esta categoria do MTSK inclui ainda o conhecimento sobre as demonstrações. As demonstrações no âmbito da biologia têm um caráter bastante prático e são realizadas principalmente com recurso à manipulação. Devido a esta caraterística, as demonstrações foram incluídas na categoría que se apresenta seguidamente.

A categoria Conhecimento de procedimentos e técnicas de observação em biologia está definida como sendo o conhecimento sobre os meios e técnicas apropriadas para realizar determinada observação mas também sobre “como” e “quando” fazer (Leite, 2001; Hodson, 1998; Magnusson *et al.*, 1999; Escudero-Avila, 2015). É importante e necessário a um profesor conhecer a potencialidade deste intrumento na aprendizagem, como funciona (objetivas, iluminação, etc) e que limitações tem.

A categoria Conhecimento de modelos relacionados com o conteúdo da biologia é a quarta categoria e é caracterizada pelo conhecimento sobre estruturas, esquemas, modelos ou outros registos que permitem diferentes representações de um determinado conteúdo. Os modelos são representações de ideias, conceções, fenómenos (Chen *et al.*, 2016) e assumem um papel especial quando o objeto em estudo não é facilmente observável. O modelo de planta completa é um dos modelos mais recorrentes no estudo da flor por mostrar de forma clara os órgãos que a constituem.

Esta categoria encontra alguma similaridade com a categoria Conhecimento dos registos de representação associados a um conteúdo matemático do MTSK que, de acordo com Escudero-Ávila (2015), integra o conhecimento sobre a existência de diferentes registos com os quais se pode representar determinado conteúdo.

A última categoria deste subdomínio é designada por Conhecimento de factos e fenómenos biológicos. Esta categoría é caracterizada pelo conhecimento sobre os factos em biologia e dos fenómenos biológicos enquanto processos e sequências de acontecimentos biológicos (Novak y Gowin, 1999; Valadares y Moreira, 2009). É específica da disciplina da biologia e envolve, por exemplo, o conhecimento dos seguintes factos: a semente contém o embrião que dará origen à nova planta, o musgo e o feto são plantas sem flor, as sementes aumentam de tamanho porque absorvem agua; e do fenómeno de geotropismo, de germinação, de fecundação, frutificação entre outros.

O subdomínio do Conhecimento da Estrutura da Biologia tem apenas uma categoria designada por Conhecimento das Big Ideas. Esta categoria é próxima da categoría "Conhecimento das conexões transversais entre os conteúdos matemáticos" do MTSK na medida em que ambas se referem ao conhecimento das relações entre dois conteúdos diferentes, pela qualidade que têm em comum ou pela proximidade de pensamento (Escudero-Avila, 2015). Distinguimos esta categoría pelo facto de incluir o conhecimento de como os conteúdos se inter-relacionam mesmo pertencendo a dois temas distintos. O conhecimento de que a reprodução do caracol (animal) pode ter alguma proximidade com a reprodução das plantas é uma evidência do conhecimento incluido nesta categoria. Apesar da reprodução do caracol e das plantas ser significativamente diferente, o caracol e as plantas estão ligados pela qualidade de serem ambos hermafroditas.

O subdomínio do Conhecimento da Natureza da Ciência integra o conhecimento sobre como se produz e valida o conhecimento científico e não específicamente na biologia. Apesar das diferenças bastante vincadas entre os diferentes ramos da ciência não foram ainda identificados componentes da natureza da biologia, se é que os há (Lederman, 2007). Este subdomínio coincide com o subdomínio Conhecimento da Prática Matemática pois ambos os subdmínios comportam o conhecimento sobre a prática: como se faz matemática e como se faz ciência.

No âmbito deste subdomínio observa-se uma categoria que está relacionada com o conhecimento dos vários métodos disponíveis ao alcance dos cientistas que lhe permitem fazer novas descobertas ou consolidar conhecimento, designada por Conhecimento de métodos de investigação científica. Integra também o conhecimento de que existem várias formas de se realizarem descobertas sem que se siga um método científico pré-estabelecido. A criatividade e a tentativa contribuem para os avanços no conhecimento assim os progressos tecnológicos (Wong e Hodson, 2008; Lederman, 1992). Incluimos aqui o conhecimento revelado relativamente à necessidade de controlar as variáveis durante a realização de uma atividade de cariz experimental (Leite, 2001). O controlo das variáveis faz parte do teste da hipótese formulada e constitui uma fase do método científico, apesar da variedade de métodos.

## *Domínio: Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK).*

O dominio do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo do BTSK é, como o PCK do MTSK, composto por três subdomínios que são designados de forma muito semelhante: Conhecimento do ensino da biologia, Conhecimento das características de aprendizagem da biologia e Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem da Biologia.

O subdominio Conhecimento do ensino da biologia envolve o conhecimento especializado do professor sobre o ensino de um conteúdo da biologia. Neste âmbito Magnusson *et al*. (1999) integra o conhecimento das estratégias instrucionais e Blanco *et al*. (1995), no âmbito do estudo do conhecimento profissional do professor de matemática e ciencias, refere o conhecimento dos recursos. Carrillo *et al.* (2018) caracteriza este subdomínio, no modelo MTSK, como o conhecimento das teorias de ensino, o conhecimento de estratégias, atividades, recursos e materiais específicos para o ensino da disciplina. Na investigação que desenvolvemos foi possível caracterizar duas categorias que apresentamos seguidamente.

A categoria Conhecimento de estratégias, ciclos e sequências de aprendizagem, técnicas e atividades para o ensino de um conteúdo da biologia é caracterizada como o conhecimento de estratégias, atividades, técnicas específicas para o ensino de um tópico da biologia e da sua potencialidade enquanto promotora de aprendizagem. Os aspetos do conhecimento que integramos aqui coincidem com os descritos por Berry (2017) e Magnusson (1999) mas também com os contemplados no MTSK (Carrillo *et al*. (2018). O desenvolvimento de atividades experimentais, a observação ao microscópio e a olho nu, foram algumas das atividades desenvolvidas pelas professores deste estudo, potenciadoras da aprendizagem.

Na categoría Conhecimento de recursos materiais, de linguagem ou virtuais de ensino associados a um conteúdo da biologia consideramos o conhecimento dos recursos disponíveis para o ensino de um tópico da biologia, das suas potencialidades e das suas limitações (Magnusson *et al*., 1999; Blanco *et al*., 1995, Carrillo *et al*., 2018). A nossa investigação permitiu apurar alguns desses recursos e entendemos considerar que os grãos de pólen, o microscópio, a lupa, os vídeos e as analogías como recursos interessantes para o ensino do tema da reprodução das plantas.

O sudomínio Conhecimento das características de aprendizagem da biologia inclui o conhecimento sobre o que os estudantes sabem sobre determinado tópico e áreas nas quais normalmente surgem mais dificuldades. Estão aqui contempladas as conceções dos alunos sobre um determinado tópico, as dificuldades de aprendizagem, motivação, diferenças nas habilidades dos alunos, estilos de aprendizagem, interesse, nível de desenvolvimento e necessidade (Park y Oliver, 2008).

A categoría Conhecimento das conceções prévias dos alunos associadas e um conteúdo da biologia integra o conhecimento das ideas anteriores ao ensino do conteúdo sejam elas muito ou pouco afastadas com conhecimento escolar (Driver, 1985; Luís, 2010). Esta categoría integra também o conhecimento sobre os conteúdos que são, à partida, mais ou menos fáceis aprender (Escudero-Ávila, 2015), Incluimos o conhecimento de que os alunos não reconhecem a semente como algo vivo, reconhecem com facilidade que a água faz germinar as sementes e identificam as pétalas da flor e que entendem que as flores existem para enfeitar as suas casas. Ao estabelecemos uma relação entre o BTSK e MTSK, percebemos que esta categoria inclui o conhecimento das categorias: Conhecimento das fortalezas e dificuldades associadas à aprendizagem de um conteúdo e Conhecimento dos principais interesses e expectativas dos estudantes ao abordar um conteúdo, da matemática.

A categoria Conhecimento de teorias de aprendizagem associadas a um conteúdo da biologia inclui, como na categoría homóloga do MTSK, o conhecimento sobre as teorias de aprendizagem relativas a um tópico particular ou relativo à disciplina em geral (Escudero-Ávila, 2015). Incluimos nesta categoria o conhecimento de que a ultrapassagem dos obstáculos que constituem estas ideias prévias e alternativas constitui uma forma de aprendizagem (Luís, 2010).

O subdomínio Conhecimento dos padrões de aprendizagem da biologia reúne o conhecimento do professor de biologia sobre o curriculo e outros documentos que o complementam e lhe permitem saber o que tem que ensinar e coincide com o tipo de conhecimento definido para o MTSK (Aguilar, 2015).

Neste subdomínio foram identificadas duas categorías com correspondência nas categorias homólogas do MTSK. A categoría Conhecimento das expectativas de aprendizagem de um conteúdo da biologia num nível específico inclui o conhecimento dos conteúdos que devem ser apresentados aos alunos num nível de escolaridade específico e os procedimentos e capacidades que devem ser trabalhadas; não só sob indicação do ministério da educação, mas também de associações ou entidades relevantes no âmbito educacional. Incluimos aqui o conhecimento do professor sobre quais os conteúdos relativos à reprodução das plantas que ainda fazem parte do programa.

A categoria Conhecimento da sequenciação com os temas anteriores e posteriores a um determinado momento escolar integra o conhecimento sobre os conteúdos que constituem os pré-requisitos para a aprendizagem de determinado tema. Inclui também que conteúdos serão trabalhados posteriormente. Incluímos aquí o conhecimento de que os alunos precisam de conhecer a constituição da flor antes de aprenderem como se processa a reprodução sexuada das plantas.

## Conclusões

O estudo empírico desenvolvido permitiu identificar conhecimento e caracterizar os dois domínios do modelo do conhecimento do professor quando ensina um tema da biología com identificação de subdominios e categorias, comparando-o com o modelo MTSK. Apesar de se ter conseguido algum pormenor na caracterização do conhecimento do professor quando ensina o tema da reprodução das plantas, reconhecemos que é necessário desenvolver novas investigações, noutros temas da biologia de forma a consolidar ou refinar estes resultados e dando maior solidez ao BTSK.

## Referências


Aguilar, Á. (2015). *El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas. Un estudio de caso* (tesis doctoral). Universidad de Huelva, Huelva, España.

Bardin, L. (1994). *Análise de Conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham: Open university press.

Berry, A, Nilsson, P., Van Driel, J., Carlson, J. (2017). Analysing Science Teachers' Pedagogical Content Knowledge: A Report on the Second PCK Summit. Esera 2017 Conference. Dublin, Ireland

Blanco, L., Mellado, V. y Ruiz, C. (1995). Conocimiento Didáctico del Contenido en Ciencias Experimentales y Matemáticas y Formación de Profesores. *Revista de Educación*, 307. 427-446.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. In *Research in Mathematics Education*. V.20 (3). 236-253. 10.1080/14794802.2018.1479981.

Chen, Y., Hand, B., Park, S. (2016). Examining Elementary Students' Development of Oral and Written Argumentation Practices Through Argument-Based Inquiry. *Science & Education*. 25 (3), 277-320.

Denzin, N., y Lincoln, Y. (1994). Introduction: Entering the Field of Qualitative Research. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 1-17). California, CA: Sage Publication, Inc

Driver, R. (1985). *Children´s ideas in science*. England: Open university Press.

Escudero-Ávila, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de Secundaria*. (tesis doctoral). Universidad de Huelva, Huelva, España.

Gess-Newsome, J. (2015). A model of teacher professional knowledge and skill including PCK: Results of the thinking from the PCK Summit. In A. Berry, P. Friedrichsen y J. Loughran (Eds.), *Re-examining Pedagogical Content Knowledge in Science Education* (pp. 28–42). London: Routledge.

Grbich, C. (2013). *Qualitative data analysis: An introduction*. California: Sague Publications.

Hodson (1998) Is this really what scientists do?. In Wellington, J. (Ed.) *Practical work in school science: Which way now?.* Londres: Routledge, 93-108

Krippendorf, K. (2013). *Content Analysis: An introduction to its methodology*. Beverly Hills, CA: Sage Publications.

Lederman, N.G. (1992). Students' and teachers' conceptions of the nature of science: A review of the research. *Journal of Research in Science Teaching*, n.º 29, 331–359.

Lederman, N.G. (2007). Nature of science: Past, present, and future. In S.K. Abell & N.G. Lederman (Eds.), *Handbook of research on science education* (pp. 831–880). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Leite, L. (2001). Contributos para uma utilização mais fundamentada do trabalho laboratorial no ensino das ciências. In H. Caetano, y M. Santos (Org.). *Cadernos Didáticos de Ciências* (pp. 77-96). Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário (DES).

Luís, M. A (2010). *Hipótese de progressão na aprendizagem, do conteúdo "Reprodução" nas Plantas.* Universidade do Algarve, Faro, Portugal.

Magnusson S, Krajcik J and Borko H, Nature, sources, and development of pedagogical content knowledge for science teaching. In Gess-Newsome J and Lederman NG (eds.). *Examining Pedagogical Content Knowledge: The Construct and Its Implications for Science Education*, pp. 95-132, 1999. Boston: Kluwer Academic Publishers.

National Research Council [NRC]. (2008). Taking science to school: Learning and teaching science in grades K-8. Washington, DC: The National Academies Press.

Novak, J.; Gowin D. (1999). *Aprender a Aprender*, 2ª ed. Lisboa: Plátano Edições Técnicas.

Park, S., y Chen, Y. (2012). Mapping out the integration of the components of pedagogical content knowledge (PCK): Examples from high school biology classrooms. *Journal of Research in Science Teaching, 49*(7), 922–941

Park, S., y Oliver, J. S. (2008). Nacional Board Certification (NBC) as a Catalyst for Teachers' Learning about Teaching: The effects of the NBC Process on Candidate Teachers' PCK Development. *Journal of Research in Science Teaching*, 45(7), 812-834

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Stake, R. (2005). Qualitative Case Studies. In N. Denzin and Y. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research*. Third edition (443-466). Thousand Oaks: Sage publications.

Valadares, J., Moreira, M. (2009). *A Teoria da Aprendizagem Significativa- Sua fundamentação e implementação*. Coimbra: Edições Almedina.

Van Dijk, E. M., Kattmann, U., (2007). A Research Model for the Study of Science Teachers PCK and Improving Teacher Education. *Teaching and Teacher Educations*, 23, 885-897.

Wong, S. L., y Hodson, D. (2008). From the horse's mouth: What scientists say about scientific investigation and scientific knowledge. *Science Education*, 93(1), 109– 130.

# Prácticas matemáticas: un avance en su caracterización

Modemar Campos-Cano
Eric Flores-Medrano

## Resumen

El subdominio del Conocimiento de la Práctica Matemática carece de una propuesta sólida de categorías. Entre las propuestas para lograr dicha categorización, hemos tomado la que sugiere que cada práctica matemática detectada conforme una categoría. En este trabajo presentamos la caracterización teórica de las prácticas de Demostrar y Definir.

## Palabras clave

Conocimiento de la práctica matemática, Conocimiento especializado del profesor de matemáticas, práctica de demostrar, práctica de definir, sistema de categorías.

## Abstract

The Knowledge of Practices in Mathematics' subdomain lacks a solid proposal of categories. Among the proposals to achieve this categorization, we have taken the one that suggests that each detected mathematical practice be considered as a category. In this paper, we present the theoretical characterization of Demonstrate and Define practices.

## Keywords

Knowledge of practices in mathematics, Mathematics teacher's specialized knowledge model, demonstrate practice, define practice, categories system.

Campos-Cano, M. y Flores-Medrano, E. (2019). Prácticas matemáticas:un avance en su caracterización. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (87-94). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Introducción

En la búsqueda de caracterizar de la forma más útil posible a los subdominios del MTSK, y dada la necesidad de un conocimiento profundo acerca de los elementos que conforman los subdominios del MTSK (Carrillo, et al., 2018), diversos estudios acerca del Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) se han realizado con el fin de refinar las categorías en este subdominio (e.g. Flores-Medrano, 2016), sin embargo, el KPM no ha alcanzado un nivel de categorización similar al resto de subdominios.

Flores-Medrano y Aguilar (2017) proponen dos formas de organizar este subdominio, la primera, mediante indicadores específicos sin presentar categorías, por ejemplo, la jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticas, y, formas de validación y demostración (e.g. Carrillo, Climent, Contreras, Montes, Escudero-Avila y Flores-Medrano, 2014). La segunda categorización se basa en tomar a cada práctica matemática identificada como una categoría y robustecer dicha categorización con subcategorías formadas a partir de las propiedades intrínsecas de cada práctica (e.g. Flores-Medrano, 2015).

En este documento presentamos, basados en un análisis documental (Bardin, 1986), un avance en la categorización del KPM atendiendo a la propuesta de que cada práctica se convierta en una categoría. El avance consiste en la presentación de las prácticas de demostrar y de definir con sus respectivas subcategorías. Cabe señalar que hemos elegido este camino de categorización porque nos resulta más sencilla la incorporación de nuevas categorías de forma aditiva y consideramos que en la otra propuesta de categorización los añadidos requerirían de una posible reestructuración de los sistemas existentes.

## Antecedentes

El modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) está constituido por seis subdominios y dentro de cada subdominio de conocimientos encontramos categorías que permiten establecer posibles relaciones y repercusiones entre los distintos tipos de conocimiento (Carrillo, et al., 2018). El MTSK tiene interés en comprender la naturaleza del conocimiento del profesor de matemáticas. El dominio del Conocimiento Matemático considera, entre otros, el subdominio Conocimiento de la Práctica Matemática que alude al conocimiento de las formas de proceder y producir en matemáticas, conocimiento de la lógica que sustenta a estas prácticas, saber definir y usar definiciones, aspectos de la comunicación matemática. Flores-Medrano (2015) destaca prácticas matemáticas más comunes en los profesores de matemáticas como son, demostrar, definir, ejemplificar y usar heurísticos.

Así, podemos considerar que en el KPM se incluyen los aspectos que conoce el profesor de matemáticas acerca de cualidades de las distintas prácticas. Nos enfocaremos en los aspectos de la lógica matemática que se encuentran ocultos en la construcción de la demostración y la definición.

Según Kitcher (1984), para comprender el desarrollo del conocimiento matemático, uno debe enfocarse en el desarrollo de la práctica matemática que consta de cinco componentes: un lenguaje, un conjunto de afirmaciones aceptadas, un conjunto de razonamientos aceptados, un conjunto de preguntas aceptadas y un conjunto de puntos de vista metamatemáticos. En este último se incluyen estándares de demostración y definición, afirmaciones acerca del alcance y estructura de la matemática.

A continuación, presentaremos una propuesta de subcategorización de las prácticas matemáticas de demostrar y definir.

## La práctica de demostrar

La demostración muchas veces se centra en los niveles superiores de enseñanza matemática, es importante que aparezcan elementos de esta en niveles tempranos de formación (Ross, 1998) y, que los profesores conozcan su naturaleza, funciones y constitución (Vicario y Carrillo, 2005). Entenderemos por demostración matemática al conjunto de cadenas explícitas de inferencia que siguen reglas de deducción acordadas y, a menudo, se caracteriza por el uso de la notación formal, la sintaxis y las reglas de manipulación (Hanna y Villiers, 2008).

En esta comunicación pretendemos separarnos del carácter didáctico de la demostración para centrarnos en su caracterización. Se presenta una pequeña revisión de algunos trabajos que nos permiten indagar y sistematizar los elementos de la demostración. Referente a la demostración, la caracterización estuvo basada en las publicaciones de Ibañes y Ortega (1997, 2005), añadimos trabajos que tratan acerca de las funciones de la demostración (Villiers, 1990, Bell, 1976), esquemas de prueba (Flores, 2007, Carrillo, et al., 2016).

Flores (2007) para diferenciar las formas en las que un individuo utiliza sus razonamientos durante una práctica argumentativa (conjunto de acciones y razonamientos que un individuo pone en juego para justificar o explicar un resultado o para validar una conjetura nacida durante el proceso de resolución de un problema), presenta una construcción de esquemas argumentativos (la forma en la que un individuo utiliza sus razonamientos durante una práctica argumentativa). Estos esquemas pueden ser de *convicción externa*, *empíricos y analíticos.* Los de convicción externa pueden ser *autoritarios* (se apoyan en afirmaciones hechas por alguna autoridad, el profesor, un libro de texto), *simbólicos* (se utiliza un sistema de símbolos y lenguaje matemático de manera superflua y poco consistente) y *fácticos* (se argumenta con base en hechos evidentes o anteriores a manera de explicación o justificación, a menudo expuestos como si fueran un algoritmo). Los esquemas empíricos, pueden ser *inductivos* (son apoyados en hechos físicos o en dibujos), *perceptivos (*apoyados a experiencias de manipulación física, real o virtual para llevar a cabo la argumentación). Los analíticos se dividen en *esquema de transformación* (durante una validación se usa la transformación de los objetos mediante un proceso deductivo y una anticipación de los resultados de tal transformación) y *esquema axiomático* (el individuo es consciente de que existen términos indefinidos y axiomas). El uso de los esquemas no necesariamente implica llegar a una conclusión válida, no deben confundirse con los tipos de demostración (contradicción, inducción, etcétera) que también forman parte del conocimiento que consideramos en esta categoría, así como sus posibles usos y fundamentos.

Por otro lado, Carrillo, et al. (2016) proponen los esquemas de prueba que pueden ser empleados por los profesores para justificar y/o validad algunos resultados matemáticos. Estos pueden ser, *esquema de prueba experimental* (establece validez de un enunciado mediante experimentación); *esquema de prueba inductivo de un caso* (establece la validez de un enunciado mediante el estudio de un caso particular); *esquema de prueba inductivo de varios casos* (establece la validez de un enunciado mediante más de un caso particular);

*esquema de prueba inductivo sistemático* (establece la validez de un enunciado mediante casos particulares que pueden hacerse atendiendo a un criterio); *esquema de prueba transformacional* (establece la validez de un enunciado mediante transformaciones de imágenes o signos por deducción); *esquema de prueba preformal* (refleja la esencia de una demostración formal que refleja el carácter axiomático y transformacional); *esquema de prueba axiomático* (son demostraciones matemáticas y la validez de un enunciado se establece mediante un proceso deductivo a partir de axiomas, enunciados primarios y resultados deducidos en demostraciones); *esquema de prueba gráfico* (basa sus conclusiones en consecuencias directas de visualización de representaciones gráficas); *esquema de prueba numérico* (establece propiedades mediante procesos numéricos), y, *esquema de prueba de inducción completa* (lo constituye el método de inducción, se compone de un proceso inductivo y deductivo).

Ibañes y Ortega (1997) proponen una clasificación para las demostraciones, haciendo uso de las funcionalidades de la metodología demostrativa de las matemáticas. Establecen cuatro dimensiones de la demostración que contribuyen a una mayor aproximación y a una mejor interpretación de demostración (histórica, epistemológica, social y cognitiva).

En la dimensión histórica se abordan los aspectos cronológicamente sobresalientes que han llevado a constituir la práctica de demostración como la conocemos hasta ahora. En particular esta dimensión no será tratada, ya que esboza ideas de la demostración en distintas épocas. Se muestra que lo que se entiende por rigor en la argumentación matemática varía a lo largo de los años, lo cual no aporta información sobre características internas de la demostración como práctica matemática.

En la dimensión epistemológica se tratan aspectos acerca de la fundamentación y métodos del conocimiento científico relativos a la demostración. En la dimensión social hacen un análisis de las funciones de la demostración en matemática educativa. Finalmente en la dimensión cognitiva describen un marco de esquemas de prueba, los cuales serán desarrollados a continuación.

En la dimensión epistemológica, encontramos el trabajo de Miyazaki (2000), quien señala cuatro niveles básicos en los procesos de prueba en función de las diferencias: *razonamiento inductivo y lenguaje funcional* (no se utilizan reglas para organizar ni abreviar oraciones); *razonamiento deductivo y lenguaje funcional* (consiste en el razonamiento deductivo de las suposiciones a la proposición a probar, se representa con un lenguaje formal); *razonamiento inductivo y lenguaje no funcional* (se representa con números, símbolos operativos, símbolos relacionales y términos de aritmética o matemáticas); *razonamiento deductivo y lenguaje no funcional* (la representación de la prueba incluye objetos manipulables, su transformación y algunas oraciones sin lenguaje funcional de demostración).

Otra clasificación se realiza mediante técnicas de demostración relacionándolas con los enunciados de los teoremas y teniendo en cuenta distintos criterios a la vez, dependiendo de esto obtendremos etiquetas para la demostración (Ibañes y Ortega ,1997). Según el *tipo* (estructura lógica del enunciado), *en relación con la implicación*, de condición necesaria o suficiente y de condición necesaria y suficiente; *en relación al cuantificador existencial*: no existencial y de existencia (que puede ser simple, de imposibilidad, de unicidad). Según el *método* (atendiendo los procedimientos lógicos), *por silogismos* (esquema de razonamiento matemático ordinario) y *por reducción al absurdo* (basado en el deseo de respetar la consistencia de las matemáticas, como es el "principio de no contradicción" y en el "principio del tercero excluido"); *por inducción completa; constructivo* (ejemplo o contraejemplo); *por analogía* (se utiliza la semejanza en algunos aspectos entre dos teorías matemáticas para deducir su semejanza en todos los aspectos); *por dualidad*. Según el *estilo* (si atendemos a los procedimientos matemáticos), el cual puede ser geométrico (utilización exclusiva de recursos geométricos); *algebraico* (el uso de símbolos para representar objetos matemáticos cualesquiera y operar con ellos); *de las coordenadas* (enlaza los estilos geométrico y algebraico en fructífera simbiosis); *vectorial;* del Análisis Matemático (el uso de los procedimientos del Análisis Matemático, en particular el concepto de límite); *probabilístico* y *topológico*, etc. Finalmente, por el *modo* (si atendemos al procedimiento de exposición), *sintético o directo* (propio de la presentación formalizada del producto) y *analítico o indirecto* (más adecuado para la exposición didáctica).

En la dimensión social el trabajo de Bell (1976) presenta tres significados de la demostración matemática: *verificación* (también denominado *justificación*, se refiere al carácter de *verdad* de la proposición); *iluminación* (se espera que una buena demostración proporcione ideas de por qué la proposición es cierta) y, finalmente, *sistematización* (organización de los resultados en un sistema deductivo de axiomas y resultados). También encontramos el trabajo de De Villiers (1990) acerca de las funciones de la demostración, quien propone la siguiente clasificación: *verificación* (sobre la verdad de una afirmación), *explicación* (por qué es verdad y qué significados envuelven a una afirmación), *sistematización* (organización de resultados en un sistema axiomático), *descubrimiento* (posibilidad de surgimiento de nuevos resultados) y *comunicación* (de los resultados y de por qué son, o no ciertos). Estos trabajos contribuyeron a las categorías en torno a la demostración.

Con respecto a la dimensión cognitiva, en Ibañes y Ortega (2005) se encuentran cuatro fases de compresión de la demostración: *la fase de interpretación* que incluye, entender el problema y la clase de solución que requiere (esquemas de prueba), comprender los términos matemáticos empleados, interpretar las proposiciones lógicas, las expresiones usuales, la notación utilizada, etc. e identificar el proceso como una demostración; *la fase de análisis*, elementos como recordar resultados anteriores y relacionarlos con la proposición objeto de estudio, revisar la corrección del razonamiento; la *fase de síntesis*, donde hay que identificar ideas y líneas claves de la demostración, así como comprender globalmente el proceso, finalmente, *la fase de profundización*, elementos como estudiar la necesidad de las hipótesis, reconocer el significado del teorema, identificar el tipo de enunciado y los métodos, estilos y modos empleados y valorar las funciones que cumplen la demostración estudiada.

## La práctica de definir

Las definiciones y los axiomas son necesarios en matemáticas, principalmente para evitar problemas de circularidad lógica y regresión infinita (De Villiers, 1995). Leikin y Zazkis (2010) consideran que las definiciones de conceptos matemáticos, el proceso de definir y las estructuras subyacentes de las definiciones deben ser componentes fundamentales del conocimiento de la materia de los profesores de matemáticas.

Definir conceptos en matemáticas es importante para el proceso de conceptualización, De Villiers (2009) destaca que existen dos procesos asociados a esta: *descriptivos o a posteriori* (tienen como papel sistematizar el conocimiento existente) y *constructivos o a priori* (producen nuevo conocimiento). Las definiciones descriptivas se logran cuando el individuo tiene experiencia por determinado tiempo acerca de las propiedades del objeto, y empieza a determinar de las características algunas que a partir de las cuales las demás pueden ser deducidas. Mientras que las definiciones constructivas resultan del proceso de definir constructivamente, surgen de una definición dada, la cual es cambiada por algún proceso lógico (generalización, reemplazo, exclusión) para definir un nuevo concepto. En la definición descriptiva el concepto de imagen precede a la definición eventual del concepto, mientras que en la definición constructiva el concepto de imagen se desarrolla o explora después de la definición del concepto.

Establecer una definición matemática responde a ciertas necesidades de organización y crecimiento del conocimiento (Calvo, 2001), las definiciones no están predeterminadas sino que presentan un carácter convencional en dos sentidos. Algunas nociones pueden ser caracterizadas diferentes, equivalentes entre sí, y es el matemático, el autor de un texto o el profesor quien decide cuál de estas caracterizaciones toma como definición. Calvo menciona que en ocasiones es difícil elegir alguna caracterización y habitualmente esta elección es resultado de un análisis que contempla ciertos factores: *estéticos* (argumentos elegantes, sencillos o relacionados con lo mesurado del enunciado de la definición); *operativos* (el establecimiento se explica por las conclusiones, por la potencia como instrumento organizador de una prueba o resolución de un problema); *didácticos* (las definiciones se presentan respecto a los conocimientos previos de los alumnos o los objetivos del curso).

Consideraremos *definir* como un proceso de prescripción del significado de una palabra o frase de forma muy específica en términos de una lista de características que tienen que ser todas verdaderas y que tiene como producto una definición. Dicho proceso implica la diferenciación y reconocimiento de propiedades particulares del objeto matemático que se desee definir (Oliveros, Pascual, Codes, y Martín, 2018).

Escudero, Gavilán y Sánchez-Matamoros (2014) recogen las características de la definición matemática de diversos autores, las cuales se identificaron como: *la precisión en la terminología-jerarquización* (uso de términos básicos o previamente definidos); *no circularidad* (no hacer referencia al concepto en la propia definición); *no ambigua* (caracterización de manera univoca de una clase de objetos); *no contradictoria o estructuralmente inequívoca* (las características empleadas deben ser consistentes); *invariante bajo cambio de representación* (un objeto pertenece a una clase de objetos, definible ahí, independientemente de su representación); *equivalencia* (se puede dar más de una formulación de un mismo concepto); *elegancia* (entre las definiciones equivalentes, la más elegante es la que utiliza conceptos generales más básicos); *minimalidad* (no redundancia de las características, ninguna de las características se deduce del resto), y *degeneración* (ejemplos del concepto que no se ajustan a la idea intuitiva del concepto). Todos estos atributos, además de darnos una caracterización de la definición matemática, conllevan aspectos de su uso como práctica y las implicaciones en sus posibles variedades.

## Consideraciones finales

A partir de los elementos descritos en los dos apartados anteriores, construimos la Tabla 1, donde se muestra la propuesta de categorías y subcategorías a partir de la práctica de demostrar y definir. Esta categorización es parcial y se robustecerá a partir del estudio de otras prácticas matemáticas. A diferencia de otros subdominios, bajo esta propuesta de categorización en el KPM las categorías tendrían un uso muy limitado, siendo las subcategorías las que sirvan como herramienta fundamental para el trabajo analítico. Los posibles conocimientos que colocamos en la Tabla 1 pueden servir como elementos para la sensibilidad teórica.

Cabe señalar que no encontramos categorías nuevas en Delgado-Rebolledo y Zakaryan (2019), la revisión de la lectura nos llevó a reflexionar si había que quitar o agregar subcategorías y posibles descriptores de conocimiento con base a la presencia del KPM en el estudio de caso del profesor de matemáticas planteado en dicho trabajo.

**Tabla 1**

*Sistema de categorías, subcategorías y posibles descriptores de conocimiento*

| Categoría | Subcategorías | Posibles descriptores de conocimiento |
|---|---|---|
| | Tipo de demostración | En relación a la implicación, en relación al cuantificador existencial. |
| | Método para demostrar | Silogismos, reducción al absurdo, inducción completa, constructivo, analogía, dualidad. |
| **Práctica de demostrar** | Usos de los registros de representación en la demostración | Geométrico, algebraico, de las coordenadas, probabilístico y topológico. |
| | Modo de demostración | Sintético o directo, analítico o indirecto. |
| | Fases cognitivas de la demostración | Fase de interpretación, fase de análisis, fase de síntesis, fase de profundización. |
| | Funciones de la demostración | Verificación, explicación, sistematización, descubrimiento, comunicación. |
| **Práctica de definir** | Proceso de conceptualización | Descriptivos o a posteriori<br>Constructivos o a priori. |
| | Características de la definición | Precisión en la terminología-jerarquización, no circularidad, no ambigua,<br>no contradictoria o estructuralmente inequívoca, invariante bajo cambio de representación, equivalencia, minimalidad, degeneración. |

## Referencias


Bardin, L. (1986). A*nálisis de contenido* (Cesar Suarez, trad.). Madrid, España: Akal.

Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, *7*(1-2), 23-40.

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculo diferencial e integral* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona: Barcelona, España.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., Montes, M. A., Escudero-Avila, D., y Flores-Medrano, E. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Montes, M. A., Escudero, D., y Flores, E. (Coords.) (2016). *Didáctica de las matemáticas para maestros de educación primaria*. Madrid, España: Paraninfo.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ..., Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Escudero, I. M., Gavilan, J. M., y Sanchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matematico generados en el proceso de definir. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(1), 7-32.

Delgado-Rebolledo, R., y Zakaryan, D. (2019). Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*.

Flores, A.H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas. *Educación matemática, 19, 63-98.*

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)* (Tesis de doctoral). Universidad de Huelva: Huelva, España.

Flores-Medrano, E. (2016). Conocimiento de la práctica matemática (KPM). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. *Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 30-34). SGSE: Huelva.

Hanna, G., y Villiers, M. de (2008). Proof and proving in mathematics education. *The international journal on mathematics education (ZDM), 40*(2), 329-336.

Ibañes, M., y Ortega, T. (1997). La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria. *Educación Matemática*, *9*(1), 65-104.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2005). Dimensiones de la demostración matemática en bachillerato. *Numeros: Revista de didáctica de las matemáticas, 61*, 19-40.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. Oxford: Oxford University Press.

Leikin, R., y Zazkis, R. (2010). The content-dependence of prospective teachers' knowledge: A case of exemplifying definitions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 4*, 451-466.

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *41*(1), 47-68.

Oliveros, I., Pascual, M. I., Codes, M., y Martín, J. P. (2018). El conocimiento de la práctica matemática compartido por estudiantes para maestro a través del análisis de videos. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 407-416). Gijón: SEIEM.

Ross, K. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proof in school mathematics. *American Mathematical Monthly*, *3*, 252-255.

Vicario, V., y Carrillo, J. (2005). Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática. El caso de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y las funciones de la demostración. En A. Maz, B. Gómez, y M. Torralbo (Eds.). *Actas del 9º Simposio de la SEIEM* (pp. 145-152) España: SEIEM.

Villiers, M. de (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, *24*, 7-24.

Villiers, M. de (1995). Why proof in dynamic geometry? En C. Hoyles y L. Healy (Eds.), *Proceedings of the Justifying and Proving in School Mathematics Conference* (pp. 155-173). Virginia, Estados Unidos: Instructional Resource Center.

Villiers, M. de (2009). To teach definitions in Geometry or teach to define? En A. Olivier y K. Newstead (Eds), *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 248-255). Stellenbosch, Sudáfrica: University of Stellenbosch

# O conhecimento do ensino de matemática (KMT) em uma formação de professores da Educação Infantil sobre localização

Edvonete Souza de Alencar

## Resumo

Esta comunicação tem como objetivo identificar o conhecimento do ensino de matemática (KMT) em um excerto de formação realizado com professores da Educação Infantil sobre localização. Este treinamento foi desenvolvido utilizando como recurso o processo de criação de histórias de literatura infantil para o ensino da Matemática, especificamente nesta comunicação sobre o conteúdo da localização. Utilizamos o Design Experiment como metodologia e para a análise nos referenciamos aos estudos de conhecimento especializado do professor de Matemática (MTSK). Em geral, identificamos que o conhecimento do ensino de Matemática (KMT) evidenciado na criação de histórias deve ser incentivado nas formações visto o seu potencial para o ensino.

## Palavras-chave

Formação de professores, literatura infantil, matemática, educação infantil, localização.

## Abstract

This communication aims to identify the knowledge mathematics teaching (KMT) in excerpt from training conducted with teachers from nursery school on location. This training was developed using the process of creating stories of children's literature for the teaching of mathematics, specifically in this communication on the content on location. We used the Design Experiment as methodology and for analysis we refined in the Mathematics teacher specialised knowledge (MTSK). In general, we identify that the knowledge of Mathematics teaching (KMT) evidenced in the creation of stories should be encouraged in the formations given its teaching potentiality.

## Keywords

Teacher training, children's literature, mathematics, nursery school, location.

Souza de Alencar, E. (2019). O conhecimento do ensino de matemática (KMT) em uma formação de professores daeducação infantil sobre localização. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (95-100). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Introdução: o projeto

Esse artigo apresenta um excerto das análises do processo formativo de professores da Educação Infantil desenvolvido no projeto “Criação de histórias da Literatura Infantil para o ensino de Matemática” em uma instituição brasileira, com financiamento pelo Instituto Serrapilheira e parecer favorável do Comitê de ética sob o número: CAEE 90142518.0.0000.5160. Nosso objetivo nesta comunicação científica é identificar o Conhecimento do Ensino de Matemática (KMT) em uma formação de professores da Educação Infantil sobre o conteúdo de localização. Assim organizamos nossa introdução apresentando de modo geral o projeto no qual explanaremos nos parágrafos a seguir sobre a justificativas do projeto, a metodologia, a organização da formação e os professores participantes ,as etapas do projeto e o referencial teórico de análise.

O projeto surgiu com o aprofundamento de estudos e reflexões sobre as possibilidades que a Literatura Infantil pode ter como recurso metodológico nas formações de professores. Assim, algumas das investigações utilizadas para a fundamentação deste estudo como Zacarias e Moro (2005), Galperin (2013) e Alencar e Silva (2017) consideram as histórias infantis como um recurso importante para o ensino e demonstram que este pode auxiliar nos contextos de atividades interdisciplinares.

Com isso o projeto promove o desenvolvimento de ações formativas utilizando-se como metodologia o Design Experiment referenciado por Cobb; Confrey; Di Sessa; Lehrer e Schauble (2003). Essa metodologia consiste na análise de um grupo, neste caso um grupo de professores, no qual desenvolveremos um plano de atividades formativas, com o intuito de identificarmos os conhecimentos revelados pelos professores durante as ações de formação. Por meio dos dados coletados elaboraremos uma escrita teórica de contribuições para a formação de professores de matemática. A metodologia assim permite que partamos de um contexto prático para um contexto mais teórico.

A formação foi desenvolvida com 5 docentes da Educação Infantil e 5 docentes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, voluntários que lecionam na rede pública municipal e estadual do estado do Mato Grosso do Sul – Brasil. Nossos encontros foram de 4 horas semanais, no qual se realizou o estudo do conteúdo matemático e a reflexão sobre sequências didáticas que utilizam a literatura infantil. Além disso, houve o incentivo para a criação de histórias infantis que abordassem o conteúdo selecionado, no qual promoveu-se a reflexão sobre como realizar a abordagem dos conteúdos selecionados e como utilizar as atividades desenvolvidas para o ensino. Cabe salientar que neste artigo focamos nossas análises na Educação Infantil.

Com isso as etapas desenvolvidas no projeto foram:1) Aplicação do questionário para conhecer o perfil do professor e suas experiências e/ou vivências com o uso da literatura infantil para o ensino de matemática; 2) O desenvolvimento de estudos sobre a Literatura infantil ,a Matemática e seu currículo, além da apresentação de uma sequência didática aos professores; 3) Processo de criação de histórias infantis coletivamente para o desenvolvimento de conceitos matemáticos, 4) O processo de refinamento das produções com discussões e análises das criações coletivas para reescritas e adequações; 5) As sugestões para a criação das ilustrações e suas análises, 6) a finalização com a diagramação para e-book animado e dos livros impressos.

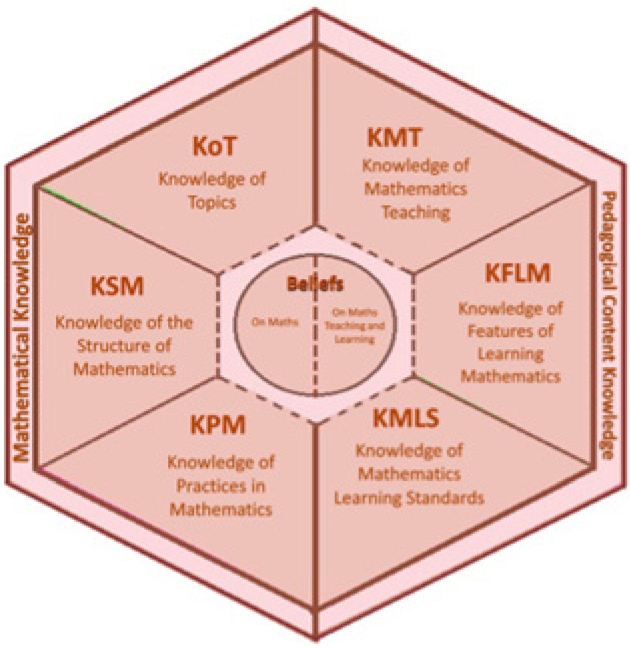
Nosso referencial teórico de análise utilizou o *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge – MTSK,* desenvolvido pelo grupo de pesquisa liderado pelo prof. Dr. Jose Carrillo da Universidade de Huelva - Espanha. Relataremos na próxima seção desta comunicação as especificidades deste referencial teórico.

## Mathematics Teacher's Specialised Knowledge –MTSK

O Conhecimento Especializado dos Professores de Matemática (*Mathematics Teachers' Specialised Knowledge - MTSK*) é fundamentada pela equipe de Carrillo-Yañez, Climent, Miguel Montes, Contreras, Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Vasco, Rojas, Flores, Aguilar-González, Ribeiro e Muñoz-Catalán que em um dos seus artigos publicados no ano de 2018, apresentam as características e as especificidades do modelo.

De modo geral, o modelo apresenta o conhecimento do professor de matemática indicando todos os seus domínios e subdomínios, incluindo ainda as crenças e os aspectos afetivos. Cabe salientar, ainda que apesar dos autores apresentarem cada domínio e subdomínio separadamente, evidenciando suas características, estas não são isoladas, mas sim possuem uma rede de inter-relações, no qual um domínio e /ou subdomínio de certa maneira não existiria sem o outro. Por este motivo, os autores apresentam a Figura 1 com a composição dos domínios e subdomínios demonstrando essas possíveis relações para a formação do conhecimento especializado do professor de matemática.

**Figura 1**
**Domínios do *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge.***




Fonte: Carrillo- Yanez et. al. (2018)

Assim a figura nos mostra dois grandes domínios cada um formado por três subdomínios. O primeiro domínio o conhecimento do conteúdo – MK – é composto por Conhecimento dos Tópicos (KOT), Conhecimento da estrutura Matemática (KSM) e o Conhecimento da Prática Matemática (KPM). O segundo domínio é o conhecimento pedagógico do conteúdo – PCK, sendo formado por: Conhecimento das características da Matemática de

Aprendizagem (KFLM), Conhecimento do ensino de Matemática (KMT) e o Conhecimento de padrões de aprendizagem da Matemática (KMLS).

Assim, identificamos que o primeiro domínio trata sobre o conhecimento do professor a respeito das conexões matemáticas, das regras e de suas características. Observamos que o segundo domínio evidencia o conhecimento do professor sobre os meios, os recursos metodológicos para se ensinar matemática. Neste domínio também estão presentes o conhecimento sobre o currículo e o entendimento das estratégias dos estudantes.

Como nesta comunicação estaremos refletindo sobre o Conhecimento do ensino de Matemática (KMT), optamos por não apresentar as características dos demais subdomínios e sim aprofundarmos sobre as especificidades do subdomínio utilizado para a análise.

## Conhecimento do Ensino de Matemática (KMT)

O subdomínio Conhecimento do ensino de Matemática (*Knowledge of Mathematics Teaching* – KMT) é refere-se aos aspectos do conhecimento do professor sobre os materiais, os recursos de metodologia para o ensino, o planejamento e a maneira de organizar os conteúdos para a aprendizagem, e as potencialidades de cada um dos itens mencionados para aprendizagem dos alunos.

Assim no Conhecimento do ensino de Matemática é composto também pelos exemplos a serem utilizados em cada conteúdo e que possibilitem as relações com o cotidiano. Além disso, evidencia a importância da organização da sequência de cada conteúdo com o intuito de promover uma melhor reflexão e aprendizagem dos estudantes.

Assim Carrillo-Yánez et. al. (2018) mencionam algumas categorias sobre este subdomínio, na qual vemos na Tabela 1.

*Tabela 1.* Categorias de conhecimento do KMT

| |
|---|
| Teorias do ensino de matemática |
| Recursos didáticos (físicos e digitais) |
| Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos |

Fonte: Carrillo-Yánez, et al. 2018, tradução dos autores.

Ao refletirmos sobre o Conhecimento do Ensino da Matemática nas atividades formativas desenvolvidas consideramos que a literatura infantil potencializa as aprendizagens dos alunos. (Zacarias e Moro, 2005; Galperin, 2013; e Alencar e Silva, 2017).

Assim apresentaremos na próxima seção uma parte do processo formativo desenvolvido e as reflexões que pudemos identificar utilizando o referido referencial teórico.

Além disso, essa etapa inicial permitiu que selecionássemos qual seria o primeiro conteúdo matemático que iriamos abordar nas formações, neste caso o conteúdo de localização. Cabe salientar que o questionário foi aplicado para o grupo de Educação Infantil (5 docentes) e para o grupo dos anos iniciais do ensino fundamental (5 docentes) e as respostas foram analisadas em sua totalidade.

As respostas permitiram com que identificássemos que 90% (9 professoras) tiveram como estudantes e/ou em sua prática profissional boas experiências com o uso da literatura infantil para o ensino. Observamos que alguns relatos revelaram a preocupação das docentes com as situações de planejamento e como abordar o conteúdo matemático.

A literatura infantil faz os alunos aprenderem com maior facilidade, conseguimos a utilizando renovar nossa aula, trazer novos exemplos que estejam relacionados ao cotidiano. (Professora C)

Eu sempre faço adaptações das histórias mais conhecidas como Chapeuzinho Vermelho e Patinho feio. (Professora D)

A análise do relato evidencia o subdomínio do Conhecimento do Ensino da Matemática - KMT, pois demonstra o conhecimento que os docentes possuem para o uso de diferentes recursos e estratégias de ensino. As docentes utilizam das histórias para inserir situações problemas no seu enredo, relacionando diferentes conteúdos da matemática com o cotidiano. Podemos citar como por exemplo o uso da história de Chapeuzinho Vermelho para o ensino de localização, Chapeuzinho por causa do lobo mal se perde pelo caminho e acaba seguindo um caminho mais longo e perigoso. Inferimos que este trecho permitirá ao professor elaborar atividades que trabalhem com a referencias de localização, unidades de medida e comparação entre quantidades, no referido caso as distancias percorridas pelos personagens lobo e Chapeuzinho Vermelho.

Esse questionário revelou que 60% (6 docentes) fazem uso da Literatura infantil em suas práticas pedagógicas e 40% (4 docentes) demonstram possuir dificuldade em estabelecer relações entre literatura infantil e matemática ou desenvolver propostas para o uso em sala de aula. Esses dados também nos remetem ao conhecimento do ensino de matemática (KMT), pois identificamos que os professores possuem a preocupação com a diversidade de recursos que utilizam para o ensino e como estes podem beneficiar a aprendizagem dos estudantes.

Assim, conhecendo o perfil do grupo e com o conteúdo matemático definido, realizamos a segunda etapa da formação que propôs o estudo do uso da Literatura infantil para o ensino de Matemática, o conhecimento do currículo brasileiro e de outros países demonstram o que mencionam sobre localização. Nesta etapa definimos o que seria importante abordar do conteúdo localização ao criar a história de Literatura infantil e ainda como seria abordado o conteúdo no enredo da história.

Identificamos que a escolha da sequência do conteúdo e como este será desenvolvido no enredo da história de Literatura infantil, evidência uma das características do Conhecimento do Ensino da Matemática- KMT, sobre a importância de se estabelecer uma sequência dos conteúdos a serem desenvolvidos e como estes serão abordados.

Assim, a terceira etapa permitiu que continuar com as reflexões sobre como abordar o conteúdo de localização na história que seria criada. Com isso, nesta etapa criou-se a história "As aventuras de Guto" que conta a história de um menino que visita uma aldeia e conhece uma arvore mágica. Esta arvore o leva para conhecer diferentes lugares no mundo o fazendo conhecer as referências de localização e as figuras planas da geometria. Para a criação dessa história as docentes tiveram que refletir como seriam as percepções dos alunos, tal aspecto nos remete a outro conhecimento das características da Matemática de Aprendizagem (KLFM). Cabe salientar que os conhecimentos apresentados pelo MTSK estão sempre inter-relacionados e por este fato identificamos em algumas situações mais de um conhecimento.

Esta reflexão serviu para orientar o ilustrador de como deveriam ser as ilustrações da história infantil e que elementos seriam interessantes dar destaque. Tal evidência também faz percebermos o Conhecimento do Ensino de Matemática – KMT.

## Considerações finais

Ao realizarmos a formação com um grupo de professores da Educação Infantil tivemos como objetivo identificar o conhecimento do professor de matemática no processo formativo da criação de uma história para o ensino de localização.

Resumidamente, demonstramos as características gerais do projeto e a metodologia *Design experiment* adotada para a realização do processo formativo. Como nossa inquietação era conhecer mais sobre o Conhecimento do ensino de Matemática - KMT em um processo de formação na Educação infantil sobre localização, utilizamos como aporte teórico de análise o *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge – MTSK de Carrillo et. al. (2018)*. Salientamos que a utilização deste referencial teórico foi importante para compreendermos um dos subdomínios KMT na ação formativa.

Ao propormos o uso de histórias infantis para o ensino de localização quisemos contribuir com as reflexões dos professores sobre o conhecimento do ensino de matemática – KMT. As análises iniciais do questionário fizeram com que percebessemos os conhecimentos dos professores sobre os usos da Literatura infantil para o ensino de Matemática e proporcionou refletirmos sobre as ações das futuras formações.

Os relatos das docentes fizeram com que inferíssemos que o conhecimento do ensino de Matemática estava presente em algumas das ações pedagógicas desses docentes, visto que mencionaram adaptações das histórias da Literatura infantil para o ensino de Matemática.

As ações seguintes da formação de estudo sobre a Literatura infantil para o ensino de Matemática, do currículo de outros países sobre localização e a criação da história, fizeram com que os professores pensassem quais e como os conteúdos deveriam ser abordados no seu enredo (KMT)

Sabemos que esta investigação é o início para que ocorra reflexões futuras sobre a utilização e influência da Literatura infantil para o ensino de Matemática em momentos formativos. Acreditamos ainda que o conhecimento do ensino de matemática – KMT pode ser potencializado em ações formativas, visto sua importância para o ensino.

## Referenciais

Alencar, E. S., y Silva, R. J. (2017). A Literatura Infantil na Educação Matemática inclusiva. *Educação Matemática em Revista-RS, 3*, 68-74.

Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M.; Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., Muñoz-Catalán, M. C. (2018) The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model, *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253, DOI: 10.1080/14794802.2018.1479981

Cobb, P., Confrey, J., Di Sessa, A., Lehrer, R., E Schauble, L. (2003). *Experimentos de design em pesquisa educacional, em: Pesquisador Educacional, 32*(1), 9-13.

Galperin, C. (2013) Os desafios da escola pública do Paraná na perspectiva da professora PDE. *Literatura e Inclusão Infantil*. Secretária de Educação do Paraná: Brasil.

Zacarias, E., Moro, M. L. F. (2005). A Matemática das Crianças Jovens e Literatura Infantil. *Revista Educar* Curitiba , *25*, 275-299.

# Relaciones entre subdominios del PCK: La experiencia de práctica comunitaria

Alejandro Cabrera-Baquedano
María Pezoa-Reyes

## Resumen

La presente investigación se enmarca en la asignatura de Práctica Comunitaria de profesores en etapa de Formación Inicial de la Carrera de Pedagogía en Matemática de una universidad chilena, la cual considera una pasantía durante dos semanas en la Isla de Chiloé, Chile. Con un enfoque cualitativo y utilizando la Ingeniería Didáctica, como metodología del curso, los grupos de profesores en Formación Inicial, diseñan, implementan y reformulan propuestas centradas en la resolución de problemas. Se analizarán las relaciones entre los subdominios del Conocimiento Didáctico del Contenido que se evidencian en los profesores de Formación Inicial en la asignatura, con el propósito de incorporar propuestas al programa del curso que permitan desarrollar aquellas que aparezcan descendidas. Dentro de los resultados obtenidos, se evidencia que el KMT de los profesores en formación inicial, potencia su KFLM.

## Palabras Claves

Conocimiento didáctico del contenido, práctica comunitaria, profesores de matemática, conocimiento del profesor, conocimiento especializado.

## Abstract

The current research focuses on the course 'Community Practice" aimed at Mathematics (Pedagogy) teachers in initial stages of training for their degree in a Chilean university, which considers a two-week internship on Chiloé Island, in Chile. The trainee teachers design, implement and reformulate proposals centered in problem solving, based on a qualitative approach and using the Didactic Engineering, as course methodology. We are interested in studying the Pedagogical Content Knowledge – in the context of MTSK – that can be evidenced in trainee teachers throughout the development of the course, with the purpose to incorporate proposals to the course program that allow developing those that appear descended. Within the results got, it is evident that KMT of the trainee teachers strengthen their KFLM.

## Keywords

Pedagogical content knowledge, community practice, mathematics teachers, teacher`s knowledge, specialized knowledge.

Cabrera-Baquedano, A. y Pezoa-Reyes, M. (2019). Relaciones entre subdominios del PCK:La experiencia de práctica comunitaria. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (101-109). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Introducción

Durante la Formación Inicial de los profesores de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV), se cursan 4 prácticas en diversos establecimientos educacionales. Cada una de estas asignaturas `gradualmente´ demandan más responsabilidades y participación del profesor en Formación en diversos campos educativos, acercándolos al ejercicio docente.

El actual modelo de Formación Inicial de Profesores (PUCV, 2014) se sustenta en principios teóricos respecto del cómo se aprende a enseñar, considerando el aprendizaje como social y distribuido, contextualizado y basado en la práctica. Normalmente, para el profesor en formación de Pedagogía en Matemáticas del Instituto de Matemáticas, las asignaturas de práctica consideran la incorporación a un centro escolar sin dejar de asistir a clases. Desde el año 2003, se incorpora como asignatura optativa el curso "Taller en Liceos de localidades rurales", desarrollando pasantías con sus estudiantes, en diversas localidades, entre ellas, comunas pertenecientes a la Isla de Chiloé, situada a 1.307 kms de Valparaíso. Desde el año 2017, esta asignatura se agrega al Plan de estudios de Pedagogía en Matemáticas en el eje de las prácticas, convirtiéndose en una asignatura obligatoria, pasando a llamarse "Práctica Comunitaria", la cual considera una pasantía de dos semanas en la Isla de Chiloé. Durante este período los estudiantes dejan de asistir a clases en la universidad.

La Práctica Comunitaria aproxima al profesor en Formación Inicial [PFI] al conocimiento e interacción con estudiantes de diversas comunidades. Para ello, los PFI elaboran e implementan propuestas de enseñanza grupales, conectando experiencias de los estudiantes fuera de la escuela con el currículum escolar. Como metodología del curso se utilizan las fases de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995) a partir de la cual los grupos diseñan, implementan y reformulan propuestas centradas en la resolución de problemas (Malaspina, 2016), el cual postula que los elementos esenciales de un problema son la información, requerimiento, entorno matemático y el contexto. Estos elementos se relacionan con el contexto y el entorno matemático presentes en la Práctica Comunitaria.

De este modo, el foco de la Práctica Comunitaria está en el análisis del aprendizaje y enseñanza de la matemática como procesos sociales. Es por ello que los PFI deben articular conocimientos tanto de la enseñanza de las matemáticas (teorías de enseñanza, estrategias, tareas, etc.) como de características de aprendizaje de las mismas (teorías de aprendizaje, dificultades, y errores de los estudiantes, interaciones con el contenido matemático, etc.). Este proceso de articulación no es espontáneo y, como, por ejemplo, se presenta en Zakaryan *et al.* (2018), el conocimiento del profesor de teorías formales de enseñanza, influye a la hora de utilizar estrategias de enseñanza y plantear tareas, potenciando su teoría personal de aprendizaje de las matemáticas. A raíz de lo anterior, como objetivo de investigación nos hemos propuesto: Caracterizar la relación entre los subdominios del Conocimiento Didáctico del Contenido –en el sentido MTSK– que evidencian los Profesores en Formación Inicial al finalizar la práctica comunitaria.

## Marco Teórico

El modelo Mathematics Teacher`s Specialized Knowledge, MTSK, es una conceptualización del conocimiento del profesor que pone énfasis en el carácter especializado de dicho conocimiento, el cual le es útil y necesario solo al profesor de Matemáticas (Carrillo *et al.*, 2018).

Este modelo distingue dos grandes dominios referentes al conocimiento: el *Conocimiento del Contenido* Matemático (MK) y el *Conocimiento Didáctico del Contenido* (PCK). Dado que, tal como se ha mencionado anteriormente, el foco de interés de este estudio se centra en el PCK de los profesores en formación, a continuación, describimos sus subdominios.

El *Conocimiento Didáctico del Contenido* (PCK) está compuesto por tres dominios del conocimiento, que se definen de acuerdo con Carrillo *et al.* (2018) de la siguiente manera:

El *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS), entendiendo por estándar de aprendizaje cualquier instrumento diseñado como referente para construir el conocimiento de los estudiantes y que se puede aplicar en cualquier etapa específica de la educación. Las nociones que sustentan esta medición pueden ser construídas por el profesor basándose en varias fuentes, entre las que se encuentran, las especificaciones del currículo. Incluye también el conocimiento de los contenidos matemáticos susceptibles de ser enseñados en un nivel particular. Este conocimiento es adquirido por el profesor a partir de las especificaciones del currículo correspondiente o al abstraer las habilidades específicas en las que se debe trabajar en un momento particular. También es relevante para este subdominio la secuenciación de los contenidos. Este subdominio posee tres categorías: Expectativas de aprendizaje, Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado y Secuenciación con temas anteriores y posteriores.

El *conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas* (KFLM) que engloba el conocimiento asociado a las características inherentes del aprendizaje de las matemáticas, enfocándose en el contenido matemático (como objeto de aprendizaje) en lugar del proceso de aprendizaje. Las principales fuentes de conocimiento de los profesores dentro de este subdominio tienden a ser su propia experiencia acumulada a lo largo del tiempo junto con los resultados de la investigación en Educación Matemática. KFLM, refiere a la necesidad del profesor de estar al corriente de cómo piensan y construyen el conocimiento los estudiantes al abordar las actividades y tareas matemáticas. Incluye, comprender el proceso por el que deben pasar los estudiantes para familiarizarse con diferentes elementos de contenido y las características propias de cada elemento, que pueden ofrecer ventajas de aprendizaje o, por el contrario, dificultades. Como tal, el subdominio toma en cuenta el conocimiento de los profesores sobre la manera de razonar y proceder de sus estudiantes en Matemáticas. Este subdomimio incluye cuatro categorías de conocimiento: teorías de aprendizaje, fortalezas y debilidades del aprendizaje de las matemáticas, formas de interacción con un contenido matemático y aspectos emocionales del aprendizaje de matemáticas.

El *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT) involucra el conocimiento intrínsecamente ligado con la enseñanza del contenido. Al igual que los otros subdominios del PCK, este conocimiento podría basarse en teorías extraídas de la literatura de investigación sobre Educación Matemática, o en la experiencia personal de los profesores y la reflexión sobre su práctica. En términos generales, a este subdominio concierne los conocimientos teóricos específicos de la Enseñanza de la Matemática. En términos específicos del contenido, incluye el conocimiento de las potenciales tareas, estrategias y técnicas para la enseñanza de un determinado contenido, junto con las potenciales limitaciones u obstáculos que puedan emerger. Incluye además, el conocimiento de los recursos y materiales didácticos. Este subdominio incluye el conocimiento de diferentes formas de representación de un contenido matemático. Las categorías de este dominio son: teorías de enseñanza, recursos materiales o virtuales y estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.

## Contexto y método

La siguiente investigación es de carácter cualitativo, se realizó a partir de la selección de un grupo de PFI que destacaron en los informes presentados durante el proceso de Práctica Comunitaria, el segundo semestre del año 2017. Este grupo estaba compuesto por cinco PFI que realizaron su práctica en la comuna de Quemchi, Isla de Chiloé, Chile.

Los datos han sido extraídos de dos informes. En el informe número uno, los profesores en formación presentaron el diseño del problema (Malaspina, 2016) y su respectivo análisis *a priori*, en este caso se abordó el concepto de ángulos entre paralelas en la unidad de geometría, con estudiantes de 11-12 años que cursaban Sexto año básico. El informe número dos contenía el análisis *a posteriori* y la reformulación de la propuesta, ulterior a la implementación. El análisis de datos se realizó a partir de las definiciones de las categorías de los subdominios asociados al dominio PCK. Los argumentos y reflexiones presentadas por los PFI, se asociaron a una o más categorías de cada subdominio.

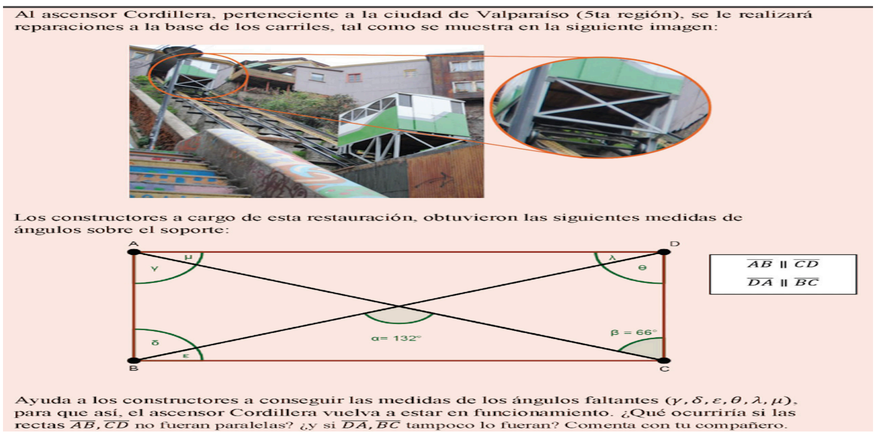
## Análisis de datos y resultados

A partir del análisis realizado a los dos informes de los PFI observamos que, estos al seleccionar un objeto matemático asociado a un objetivo de aprendizaje, analizan la ubicación y progresión de este objeto en el currículo nacional para construir la propuesta atendiendo a sus lineamientos. Todo ello se realiza de acuerdo al curso seleccionado y considerando los conocimientos previos que poseen los estudiantes y, sus relaciones con los cursos superiores. Estos elementos abordan la *secuenciación con temas anteriores y posteriores* del subdominio *Conocimiento de los Estándares de Aprendizajes de las Matemática.*

El objeto matemático seleccionado por los PFI fue el concepto de ángulos entre paralelas. A partir de ello, diseñaron la tarea atendiendo a los elementos propuestos por los Programas de Estudio (Ministerio de Educación [MINEDUC], 2016). Esta tarea se diseña respecto a la profundidad que determina el currículo en Sexto año básico.

**Imagen 1**

**Tarea propuesta por los Profores en Formación Inicial**


Al ascensor Cordillera, perteneciente a la ciudad de Valparaíso (5ta región), se le realizará reparaciones a la base de los carriles, tal como se muestra en la siguiente imagen:

Los constructores a cargo de esta restauración, obtuvieron las siguientes medidas de ángulos sobre el soporte:



Ayuda a los constructores a conseguir las medidas de los ángulos faltantes ($\gamma, \delta, \varepsilon, \theta, \lambda, \mu$), para que así, el ascensor Cordillera vuelva a estar en funcionamiento. ¿Qué ocurriría si las rectas $\overline{AB}, \overline{CD}$ no fueran paralelas? ¿y si $\overline{DA}, \overline{BC}$ tampoco lo fueran? Comenta con tu compañero.

El análisis curricular realizado, les permite a PFI construir la matriz de su planificación relacionando el objetivo de la clase con el objetivo de la unidad propuesto por el MINEDUC. Durante este proceso, los PFI definen las *expectativas de aprendizaje* de sus estudiantes, a partir de las cuales establecen el objetivo de la clase, elementos pertenecientes al subdominio de *Conocimiento de los Estándares de Aprendizajes de las Matemáticas.* En la imagen 2, se puede observar la matriz inicial de la clase diseñada por los PFI, en ella se aprecia las metas de la unidad, extraídas de los Planes y Programas de Estudio y el objetivo de la clase diseñada por los PFI.

**Imagen 2**

**Matriz inicial de plan de clase**

I. **Plan de la unidad**

A. Meta(s) de la unidad:

- ➢ Identificar los ángulos que se forman entre dos rectas que se cortan (pares de ángulos opuestos por el vértice y pares de ángulos complementarios).

II. **Lección de estudio:** *Reconstruyendo el Ascensor Cordillera*

C. Meta(s) de la clase:

- ➢ Conocer los ángulos entre paralelas (correspondientes, alternos internos, alternos externos) relacionándolo con la reconstrucción del Ascensor Cordillera.

A partir del análisis de los informes, encontramos diversas evidencias respecto al *Conocimiento de las Características de Aprendizajes de las Matemáticas*. Los PFI deben elaborar un plan de clases para la implementación de la propuesta, analizando los posibles errores o dificultades que los estudiantes puedan presentar en relación al objeto matemático, para lo anterior, los PFI se basaron en el concepto de error propuesto por Rico (1991). Estos elementos están asociados a la categoría *fortalezas y dificultades*. En la imagen 3, se puede observar las dificultades y posibles errores que los PFI preven puedan cometer los estudiantes durante al actividad propuesta.

**Imagen 3**

**Posibles errores y dificultades de los estudiantes, presentes en plan de clases.**

| | |
|---|---|
| **Dificultades:** Según Rico (1991) una de las dificultades que presenta los estudiantes son las asociadas al objeto matemático, los cuales son: Confundir el sentido de medición de los ángulos (anti horario), confundir los conceptos ángulos complementarios y ángulos suplementarios, no manejar el lenguaje que se utiliza para nombrar los ángulos. | **Errores:** Confundir las definiciones de *ángulo suplementario* con *ángulo complementario,* llegando a calcular $m(\angle CED) = 42°$, pues como saben que la suma de los ángulos $(\angle\alpha)$ y $(\angle DEC)$ deben ser igual a 90°, entonces restan los valores, es decir: 132−90=42 |

Los PFI realizan el análisis a priori de su propuesta identificando posibles estrategias de resolución y el posible lenguaje utilizado por los estudiantes como se observa en la imagen 4, atribuyéndole sentido a los posibles argumentos que los estudiantes desplieguen. Durante este proceso se evidencia que los PFI consideran las *formas de interacción con un contenido matemático.*

**Imagen 4**

**Análisis a priori realizado a la propuesta, posibles respuestas del estudiante.**

| | |
|---|---|
| e) ¿Cuándo dos rectas son paralela?<br>f) ¿Cuándo dos rectas son secante? | e) “son cuando no se cortan entre sí” “siempre están separadas”, “es cuando en la imagen nos ponen dos líneas así //”, “cuando las rectas mantienen la misma distancia y por eso no se tocan”<br>f) “cuando se cortan en un solo punto”, “cuando se intersectan y el ángulo que forman es de 90º grados”, “perpendiculares” |

**Imagen 5**

**Análisis a priori realizado a la propuesta, posibles preguntas del estudiante.**

| | |
|---|---|
| *7. “ese cuadrito que se coloca entre las rectas, ¿Qué significa?* | *7. “ese cuadrito (foto) significa que el ángulo mide 90º* |

De acuerdo con la estructura que posee el curso, el hecho de que los PFI seleccionen un objeto matemático y deban vincular una problemática local en torno a este objeto, se ve fuertemente influido por la propuesta de Malaspina (2016) atendiendo a la resolución de problemas. Los PFI describen la metodología utilizada para diseñar sus problemas. Consideramos, en esto, elementos acerca de *Teorías de aprendizajes asociadas a un conocimiento matemático.* A continuación se presenta un párrafo de la fundamentación de la propuesta diseñada por los PFI.

> *“Como bien se señaló anteriormente, el aprendizaje de la matemática está relacionado a la creación y resolución de problemas. Para ello, según como lo indica Malaspina (2016), se procedió en la creación de situaciones, siguiendo las cinco fases que él propone.”*

Se evidencia que los PFI consideran *Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas* al diseñar propuestas que logren vincular aspectos de la Isla de Chiloé con las temáticas de la región de Valparaíso, como lo son los palafitos y ascensores, respectivamente. El plantear contextos familiares a los estudiantes permite que estos se conecten emocionalmente con el problema. El objetivo propuesto es que los estudiantes puedan “relacionar la Matemática con el Patrimonio Cultural de la Región de Valparaíso y la Isla de Chiloé” con el fin de generar un aprendizaje significativo en los estudiantes. Considerar elementos propios del contexto para generar aprendizaje significativo implica considerar elementos característicos de los intereses y del contexto de los estudiantes.

Además, en su reflexión final, los PFI aluden a Teorías institucionalizadas, referenciando algunos elementos de Socioepistemología de una manera superficial debido a la inexperiencia de los PFI. Estos elementos pertenecen a la categoría *Teorías de enseñanza* del subdominio *Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática* (KMT). Se presenta un párrafo en la reflexión final de los PFI, en ella aluden a la construcción social del conocimiento. Por otro lado, asocian el empoderamiento docente con un mayor dominio en la capacidad para diseñar propuestas contextualizadas y de calidad.

> *“En este último tiempo, se han creado varias propuestas didácticas con base en la idea de una construcción social del conocimiento. Es por ello, que la interacción del docente con sus pares, ya sean profesores o investigadores, potenciarán la apropiación del saber que se está enseñando. Como bien menciona Reyes (2016) es indispensable que nosotros como docentes, vivenciemos un proceso de empoderamiento que nos permita articular nociones del saber matemático con los contextos de los estudiantes.”*

Adicionalmente, si bien los PFI en su plan de clases incorporan preguntas de devolución, como estrategia de enseñanza, frente a posibles dificultades, necesidades u orientaciones que puedan requerir los estudiantes, no presentan dentro de su informe argumentos que sustenten dichas devoluciones. Asimismo, conciben tipos de tareas desafiantes para propiciar el aprendizaje de ángulos alternos, como el que se ilustra en la imagen 1. Estos elementos podrían ser considerados dentro de la categoría *"estrategias, técnicas, tareas y ejemplos,* de este modo, consideramos que existen indicios del *Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática*.

## Discusión

De acuerdo con los resultados que hemos obtenido, los PFI al elaborar el objetivo de la propuesta consideraron los intereses de los estudiantes, y posteriormente en el análisis a priori previeron los posibles errores y dificultades que estos pudieran cometer. Dentro de este aspecto es interesante destacar que los PFI utilizan el concepto de error y dificultad de manera similar (imagen 3), esto se debe a que hasta este punto de su formación solo han estudiado elementos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (Duval, 1999), Ingeniería Didáctica (Artigue, 1999) y Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986). Es en este semestre cuando incorporan otros referentes teóricos, como el análisis de Errores y Dificultades (Rico, 1991) o la Resolución de Problemas (Malaspina, 2016), por lo tanto, no realizan una clara distinción entre el concepto de error y dificultad de acuerdo al marco conceptual utilizado, no obstante lo anterior, esto no les impide realizar una correcta anticipación de los posibles errores que los estudiantes pudiesen cometer.

Dada la estructura de la asignatura, los PFI seleccionan un aspecto de la cultura local de Chiloé y lo abordan a partir de un contenido matemático, para esto deben situarse en un nivel curricular y realizar el posterior análisis de este, en torno a la secuenciación con temas anteriores y posteriores. Es con base en este análisis, que los PFI proponen estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, a partir de las formas de interacción de los estudiantes con el objeto matemático seleccionado y de acuerdo al nivel en que se sitúan, considerando ciertos elementos del lenguaje propios del nivel, así como la complejidad de la tarea propuesta y, las estrategias y técnicas de resolución que puedan desarrollar los estudiantes, a partir de este proceso, existe una relación entre los subdominios KMT, KFLM y KMLS.

La propuesta de los PFI se sustenta en la Resolución de Problemas con base en lo propuesto por Malaspina (2016); el objetivo trazado considera que a través de la resolución de problemas, se logra un aprendizaje significativo de los contenidos propuestos para la clase, así mismo, la resolución de problemas contextualizados permite a los estudiantes familiarizarse con este y por tanto abordarlo con una actitud distinta. Isoda y Olfos (2009) plantean que la clase basada en resolución de problemas involucra al alumno en una actividad orientada a la abstracción, modelación, formulación y discusión, en la que el profesor otorga la posibilidad al alumno de construir su conocimiento. Por otro lado, plantean, desde la perspectiva psicológica, que el enfoque de resolución de problemas lleva al alumno a integrar los conocimientos nuevos a los ya adquiridos.

A raíz de lo anterior, consideramos que el enfoque de resolución de problemas, desde el punto de vista de los PFI y en relación a lo propuesto por Isoda y Olfos (2009), está presente tanto como una Teoría de Enseñanza como una Teoría de Aprendizaje, por cuanto, los PFI consideran que los estudiantes generan aprendizajes consolidados a través de la resolución de problemas contextualizados y porque los contenidos propuestos para la clase son abordados desde experiencias familiares mediante la resolución de problemas como Teoría de Enseñanza, articulando componentes de los subdominios KFLM y KMT.

En consecuencia con lo señalado anteriormente, y en relación con lo propuesto en Zakaryan *et al.* (2018), los PFI relacionan estos subdominios con el conocimiento de tareas desafiantes para propiciar el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, debido a que los PFI aún están en un proceso de formación inicial, el KMT potencia al KFLM a partir del enfoque de resolución de problemas, lo que se ve intervenido por la escasa experiencia en aula que poseen los PFI, esto difiere del caso presentado en Zakaryan *et al.* (2018) en el que, al poseer la docente el grado de Magister y una vasta experiencia profesional, es el subdominio KFLM el que potencia al KMT, generando la interrogante de si volver a mirar el desempeño de estos PFI al finalizar su proceso de formación, invertirá la forma en que estos subdominios se potencian.

## Conclusión

En conclusión, consideramos necesario incorporar propuestas al programa de la asignatura Práctica Comunitaria que permitan el desarrollo de las categorías que, si bien son aludidas, no se evidencia una aprehensión de los fundamentos dados.

En esta misma línea, los cursos de práctica en la formación inicial de los profesores de Matemática deben propiciar experiencias que permitan a los docentes en formación construir teorías de aprendizaje personales, fundamentadas en las Teorías formales, sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje para generar actuaciones profesionales, que, considerando el contexto, generen oportunidades de aprendizaje a todos los estudiantes.

A partir de esta primera implementación de la Práctica Comunitaria, como asignatura obligatoria, los resultados de esta investigación evidencian que la creación y resolución de problemas junto a la metodología de la asignatura basada en Ingeniería Didáctica, requieren poner énfasis en aquellas categorías descendidas, en relación a los subdominios de la componente PCK. Estos resultados nos permiten enriquecer el programa de la asignatura y nos plantea como línea de trabajo, extender este análisis a los cursos del eje de práctica, a la luz de este marco teórico, para fortalecer, el conocimiento del profesor de matemática en su formación inicial.

Como proyección a esta investigación, se propone volver a analizar el desempeño de los PFI al finalizar su proceso de formación e, identificar si persiste esta relación entre los subdominios KMT y KFLM y si, debido al desarrollo de competencias profesionales establecidas en el perfil de egreso, son más evidentes las relaciones entre los subdominios del componente PCK.

## Referencias


Artigue, M. (1995). *Ingeniería Didáctica. Ingeniería Didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamericana. 33-61

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. *Recherches en didactique des mathematiques*, *7*(2), 33-115

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E., y Montes, M. A. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher´s specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253, DOI: 10.1080/14794802.2018.1479981

Isoda, M., y Olfos, R. (2009). El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases. *Ediciones Universitarias de Valparaíso*, Pontifica Universidad Católica de Valparaíso.

Malaspina, U. (2016). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 321-331.

Ministerio Educación [MINEDUC]. (2013*). Programa de Estudio 6 Año Básico.* Santiago, Chile: MINEDUC. Disponible en: http://www.curriculumenlineamineduc.cl (Consultado abril 2019)

Ministerio Educación [MINEDUC]. (2016*). Bases Curriculares. 7° básico a 2° medio*. Santiago, Chile: MINEDUC. Disponible en: http://www.curriculumenlineamineduc.cl (Consultado abril 2019)

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (2014). Marco Conceptual Formación Inicial de Profesores Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, 2014. Valparaíso: Chile.

Zakaryan, D., Estrella, M. S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E., & Carrillo, J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria*. Enseñanza de las ciencias, 36*(2), 105-123.

## Agradecimientos

Beca Conicyt, Magister Nacional año 2018, folio: 22181017.

# El uso de MTSK en el diseño de tareas formativas para estudiantes para profesor de Educación Primaria

Víctor J. Barrera-Castarnado
Mª Mar Liñán-García
Mª Cinta Muñoz-Catalán
Luis Carlos Contreras

## Resumen

En este trabajo presentamos un avance de un experimento de enseñanza, cimentado en la observación de una situación real de aula. Mostramos cómo, a partir de esa observación, podemos generar tareas formativas que movilicen conocimiento especializado en la formación inicial de profesores de Primaria. Utilizamos MTSK como modelo analítico tanto para el análisis de episodios de aula como para enriquecer los mismos, promoviendo la competencia "mirar con sentido" en los estudiantes para profesor.

## Palabras clave

MTSK, tarea formativa, formación inicial de profesores, conocimiento especializado en geometría, experimento de enseñanza.

## Abstract

We present in this paper an advance of a teaching experiment, based on the observation of a real classroom situation. We show how, from this observation, we can generate educational tasks that mobilise specialized knowledge in the initial teacher training. We use MTSK as an analytical model both for the analysis of episodes and to enrich them, promoting professional noticing in preservice primary teachers.

## Keywords

MTSK, educational task, initial teacher training, specialised knowledge of geometry, teaching experiment.

Barrera-Castarnado, V J., Liñán-García, M. M., Muñoz-Catalán, M. C. y Contreras, L. C. (2019). El uso de MTSK en el diseño de tareas formativas para estudiantes para profesor de educación primaria. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (110-118). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Introducción

Los principios para la educación matemática (NCTM, 2000, p. 18) indican que la eficacia docente exige saber matemáticas, tener en cuenta que los estudiantes son aprendices y disponer de estrategias pedagógicas, lo que implica un conocimiento especializado, tanto del contenido matemático como del didáctico, que permita una buena gestión de las situaciones que surgen en el aula. Entendemos por conocimiento aquella información (no necesariamente correcta) de la que dispone un sujeto para resolver problemas o enfrentarse a cualquier tarea (Schoenfeld, 2010), y lo consideramos especializado por ser inherente al profesor (Carrillo et al., 2018; Scheiner, Montes, Godino, Carrillo y Pino-Fan, 2017).

Como formadores de profesores, consideramos fundamental conectar la formación inicial con la práctica profesional para favorecer el desarrollo de ese conocimiento especializado (Goos, 2014). Para ello, teniendo en cuenta que no es fácil tener la opción de que los estudiantes para profesor (EPP) puedan observar a los escolares y a sus profesores inmersos en procesos de enseñanza-aprendizaje, se propone el uso de tareas ligadas al análisis de la práctica real de aula. Estas tareas favorecen el desarrollo de competencias profesionales que permiten gestionar situaciones de clase de matemáticas (Climent et al., 2016) interpretando las interacciones entre estudiantes y profesor (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018), así como comprender el potencial de los recursos utilizados, entre otros elementos. Este tipo de tareas permite integrar el conocimiento matemático y el conocimiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, componentes esenciales del conocimiento especializado del EPP, como futuro profesor de matemáticas (Carrillo et al., 2018). Consideramos, con Ball y Forzani (2005), que las tareas profesionales han de ser el eje vertebrador del currículo de formación de profesores.

Esta propuesta contempla el diseño de tareas formativas que ejemplifiquen la práctica educativa (Markovits y Smith, 2008). Dichas tareas permitirán relacionar el conocimiento matemático con el conocimiento didáctico del contenido matemático, favoreciendo una comprensión profunda del primero (Ma, 1999). El conocimiento didáctico del contenido matemático ayudará a identificar los elementos esenciales de la práctica, a reflexionar de manera integrada sobre estos elementos y a ofrecer planteamientos alternativos de enseñanza (Santagata y Guarino, 2011).

Para generar las tareas formativas, y puesto que consideramos que el conocimiento que permite al profesor de matemáticas el diseño y gestión de tareas de enseñanza y aprendizaje es especializado, vamos a utilizar el MTSK (Mathematics Teachers' Specialised Knowledge, Carrillo et al., 2018) como modelo analítico. Inicialmente servirá como herramienta para analizar el conocimiento movilizado en las prácticas reales de aula y, como consecuencia, para seleccionar episodios de la práctica real que sean ricos en conocimiento especializado. Una vez seleccionado, MTSK permitirá, por un lado, vertebrar el enriquecimiento de la transcripción del vídeo para generar un caso (Markovits y Smith, opus cit.) junto a actividades diseñadas *ad-hoc*, y, por otro lado, analizar elementos de conocimiento especializado movilizado por los EPP. Las actividades propuestas en las tareas formativas irán encaminadas a que los EPP aprendan a *mirar con sentido* la práctica profesional (Fernández et al., 2018).

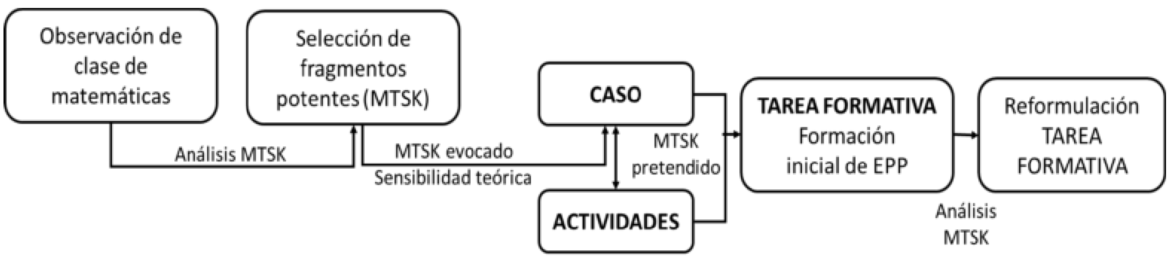
En el trabajo que presentamos, el diseño de dichas tareas se centrará en el contenido geométrico considerando trabajos recientes (Liñán-García et al., 2019; Liñán-García, Montes y Contreras, 2015; Liñán-García y Contreras, 2013) que han puesto de manifiesto las dificultades en el conocimiento especializado en Geometría de los EPP, así como ciertas carencias relacionadas con contenido geométrico de una maestra en ejercicio, respectivamente.

## Diseño de tareas formativas

Comenzamos observando el proceso de enseñanza y aprendizaje en un aula de 5º de Educación Primaria en la que se está trabajando contenido geométrico. Considerando las transcripciones de las distintas sesiones de clase videograbadas, las notas de campo tomadas por la investigadora y las entrevistas mantenidas con la maestra, desde una perspectiva interpretativa, se realiza el análisis con MTSK. En dicho análisis se tiene en cuenta no solo la realidad observada -*evidencias e indicios* de conocimiento (Escudero-Ávila, 2015)- sino también el conocimiento especializado evocado al formador por las situaciones que se presentan en el aula (Liñán-García, 2017). Teniendo en cuenta este análisis, se seleccionan fragmentos potentes en cuanto al conocimiento especializado sobre el que se puede reflexionar en un aula de formación de profesores. El formador, partiendo del conocimiento evocado, de su sensibilidad teórica (Strauss y Corbin, 1994) y de su propia experiencia como profesor, incluye en la transcripción literal de las videograbaciones elementos que puedan provocar la reflexión sobre aspectos adicionales del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. De esta forma se obtiene el caso, al que se le añadirán actividades, considerando los diferentes subdominios del modelo MTSK sobre los que se pretenda reflexionar en cada fragmento (MTSK pretendido), para conseguir la tarea formativa.

Las tareas formativas, así diseñadas, se implementan en grupos de formación inicial de profesores de Educación Primaria. Las transcripciones de las videograbaciones de las clases, así como las producciones de los EPP, se analizan utilizando el modelo MTSK. Asimismo, se tienen en cuenta entrevistas con estudiantes y con los formadores encargados de implementar las tareas. Con este nuevo análisis se pretende evaluar el conocimiento especializado que finalmente movilizan los EPP al realizar la tarea en relación con el conocimiento especializado pretendido en el diseño de la misma; con las conclusiones obtenidas al respecto, se modifica la tarea con el fin de refinarla para responder mejor a los objetivos inicialmente planteados (Figura 1).

**Figura 1**
**Diseño de una tarea formativa**




Esta propuesta se enmarca, por tanto, en una investigación en la que, a partir de un experimento de enseñanza (Molina et al., 2011), se pretende analizar el conocimiento especializado que movilizan los EPP a través de la resolución de tareas formativas diseñadas *ad-hoc*. El proceso de investigación tiene lugar a través de ciclos continuos de investigación en tres fases: diseño y planificación de la instrucción, experimentación y análisis retrospectivo (Penalva et al. 2009; Gravemeijer, 2004; Simon, 2000), atendiendo a criterios de validez de la investigación cualitativa (Guba y Lincoln, 1994). El énfasis se centra en el análisis del proceso de construcción del conocimiento de los estudiantes en ciclos sucesivos de experimentos de enseñanza.

## Tarea formativa: Definición de polígono

Proponemos a continuación un ejemplo de tarea, indicando los pasos seguidos por el investigador-formador para el diseño de esta. Nos centraremos en un episodio, en el sentido de Schoenfeld (2000) y Muñoz-Catalán (2009), sobre la definición de polígonos grabado en una clase de Geometría de 5º de Educación Primaria.

Tras seleccionar el tema sobre el que versará la tarea, en este caso definición del concepto *polígono*, se marcan los objetivos de la misma: a) reflexionar y discutir sobre la construcción de conceptos relacionados con polígono y la búsqueda de relaciones entre ellos (Climent y Carrillo, 2002); b) conocer las estructuras subyacentes de las definiciones y el cómo se debe definir (Zazkis y Leikin, 2008); c) reflexionar sobre el proceso de definir, viendo la importancia del uso de ejemplos (no solo prototípicos) y contraejemplos en el desarrollo de este proceso, favoreciendo de esa forma la creación de imágenes versátiles de los conceptos; d) conocer los atributos que caracterizan a una buena definición de un concepto (Escudero, Gavilán y Sánchez-Matamoros, 2014); y e) analizar las respuestas de escolares, pudiendo determinar el nivel de razonamiento geométrico según Van Hiele (1986) atendiendo a las respuestas dadas en la resolución de una actividad (Jaime y Gutiérrez, 1990). Estos objetivos están relacionados con los subdominios KoT y KPM del conocimiento del contenido, y con KFLM y KMT del conocimiento didáctico de tal contenido. Podrían añadirse otros relacionados con KSM, en cuanto al conocimiento del contenido, y KMLS en cuanto al conocimiento didáctico del contenido, como se puede ver en los ejemplos mostrados en Montes, Carrillo, Contreras, Liñán-García y Barrera-Castarnado (2019).

Para diseñar el caso, tras haber analizado desde MTSK distintos episodios relacionados, y teniendo en cuenta la riqueza de estos, seleccionamos aquel en el que la maestra plantea una actividad con el fin de conocer si sus alumnos recuerdan qué es un polígono. Cada uno dibuja en su cuaderno un polígono y un “no polígono”. Para generar un debate en grupo y forzar la reflexión sobre las características que deben tener los polígonos, la profesora divide la pizarra en dos partes (*polígonos* y *no polígonos*) donde cada alumno pueda dibujar su ejemplo. El fin último es enunciar una definición de polígono entre toda la clase.

En el análisis con MTSK del episodio que conduce al caso del ejemplo que mostramos, el formador-investigador detecta evidencias de elementos de conocimiento movilizado por la maestra; en particular, de KoT (Definiciones, propiedades y sus fundamentos), KMT (Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) y KPM (Condiciones necesarias y suficientes para generar una definición). En este episodio, entre las figuras que no son polígonos solo aparecen aquellas con lados curvos o abiertas, así que el formador-investigador decide modificarlo[1] incluyendo intervenciones de la maestra preguntando sobre dónde situarían algunas figuras formadas por líneas poligonales no simples. Incluye así un detonante para relacionar los conocimientos puestos en juego en clase (KoT, Definiciones, propiedades y sus fundamentos), generando el caso de nuestra tarea.

1 Desde el análisis, seleccionamos un fragmento del episodio en el que las interacciones profesora-alumnos ayuden a movilizar MTSK en el aula de formación inicial de profesores. Considerando el conocimiento evocado detectado, nuestra sensibilidad teórica y nuestra experiencia como formadores, le añadimos ciertos elementos a la situación real de aula para generar el caso.

En este momento se diseñan las actividades que se intercalarán en la lectura del caso. Además de las cuestiones planteadas para provocar reflexión sobre los subdominios de MTSK, se incluyen otras cuestiones que implican el análisis de las respuestas de los estudiantes como, por ejemplo, la identificación del nivel de razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele (KFLM-Teorías de aprendizaje) (Jaime y Gutiérrez, 1990) o el análisis de las posibles dificultades detectadas en el caso (KFLM-Fortalezas y dificultades). De este modo, destacamos algunas de las actividades que se podrían plantear a los EPP en esta tarea formativa para provocar su reflexión sobre su MTSK en relación con el caso:

- *Enunciad una definición y analizad la distribución de las figuras representadas en la imagen* (en la que aparecen las figuras organizadas en polígonos o no polígonos por los escolares).

  Con esta primera actividad se tendrán evidencias del conocimiento sobre la definición de polígono (KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Comparando diferentes definiciones dadas por los EPP se puede determinar qué atributos debe cumplir la definición correcta de un concepto (KPM-Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones). El formador puede tener en cuenta, para proponer la reflexión, que la representación mediante diagrama del polígono destaca el contorno frente a su superficie, aspecto que puede repercutir en la generación de la definición (KoT-Registros de representación).

- ¿Cuáles pensáis que habrán sido los argumentos esgrimidos por los estudiantes para realizar esta distribución entre polígonos y no polígonos?

  Los EPP deben reflexionar sobre qué razones han podido llevar a los escolares a colocar cada figura en un grupo. Para ello deberán fijarse en las características que tienen las figuras, relacionándolas con las propiedades que debe cumplir una figura para ser polígono (KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Para responder a esta actividad deben fijarse en las respuestas, correctas y erróneas, que han dado los escolares, interpretando por qué dan esa respuesta (KFLM-Formas de interacción con un contenido matemático), así como qué dificultades se han podido observar en la resolución de la tarea (KFLM-Fortalezas y dificultades). Las respuestas erróneas, en su mayoría, están relacionadas con situaciones en las que no hay una equivalencia entre la definición del concepto del estudiante y la imagen de polígono que tiene (KFLM-Teorías de aprendizaje).

- *Teniendo en cuenta a Escudero, Gavilán, Sánchez-Matamoros (2014), analizad si la definición a la que han llegado los estudiantes cumple los atributos de una definición matemática. ¿Hay una única definición de polígono?*

  Los EPP deben analizar si la definición a la que han llegado los escolares cumple los atributos exigibles a una definición. Se pueden analizar, de igual forma, las definiciones dadas por los propios EPP en la *Actividad 1* (KPM-Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones; Prácticas particulares del quehacer matemático).

- ¿Qué conocimientos matemáticos se ponen en juego en el desarrollo de la sesión?

  Pretendemos que los EPP movilicen conocimiento sobre las definiciones asociadas a los polígonos y sus elementos, y los distintos registros de representación (KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Registros de representación), sobre la forma de definir en matemáticas, incluyendo el lenguaje (KPM-Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones; Prácticas particulares del quehacer matemático; Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal) (Montes et al., 2019).

- ¿Qué papel juegan los ejemplos y contraejemplos en la construcción de una definición matemática? ¿Qué relación hay entre la imagen que muestran del concepto polígono y la definición que dan?

En esta actividad destacamos la importancia de la reflexión sobre los atributos relevantes, irrelevantes e incorrectos (KPM-Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones), relacionados con la imagen y la definición del concepto polígono (Vinner, 2011) (KFLM-Teorías de aprendizaje), para conseguir analizar el conocimiento especializado de los EPP sobre el uso de ejemplos en los procesos de enseñanza y aprendizaje (KMT-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) (Montes et al., 2019).

- ¿Qué aprenden los estudiantes de primaria con esta actividad? ¿Qué interés tiene frente a que se les hubiera dado una definición a priori?

Esta actividad permite a los EPP reflexionar sobre el tipo de actividades que pueden ser más potentes para un objetivo concreto. En este caso deben analizar pros y contras entre dar una definición y construir una definición en un aula de primaria (KMT-Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Una vez diseñada la tarea formativa, se ha implementado en distintos grupos de formación inicial de profesores. Usando el modelo MTSK, se han analizado las respuestas de los EPP a las actividades de la tarea para identificar el conocimiento movilizado con la misma. Mostramos un extracto del análisis de las interacciones que surgen en clase entre los EPP en la implementación de la tarea, en la parte que versa sobre el papel de los ejemplos en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

1. A: Los ejemplos sirven para reafirmar su definición de polígono, en cambio los contraejemplos sirven para mostrar falsedad de lo que dicen sus compañeros. Es decir, el ejemplo ayuda a visualizar el concepto y el contraejemplo a afianzarlo.
2. C: Cuando la profesora ha dibujado las figuras complejas, con vértices de los que salían más de dos lados, ha conseguido que los niños reflexionen sobre esa característica, que no había salido antes.
3. S: Yo creo que esta forma de tratar la definición de polígono es muy potente, porque permite ver ejemplos y contraejemplos de polígonos, saliéndose de las imágenes prototípicas, de cuadrado, rectángulo, ...
4. A: Claro, es una forma de conseguir una imagen completa del concepto polígono, fijándose en las características críticas y eso... Hay una equivalencia entre la definición y la imagen de polígono. Si esto no es así pueden tener dificultades en identificar algunos polígonos.

Se observa que los EPP muestran su conocimiento acerca del uso de ejemplos prototípicos que se suele hacer en las aulas, lo que puede generar dificultades en la identificación de ejemplos concretos (KFLM-Fortalezas y dificultades), y esto implica que reaccionen de determinadas formas ante determinados casos (KFLM-Formas de interacción con un contenido matemático).

Los EPP relacionan la definición del concepto con la imagen de este, estableciendo la relación con la forma en la que los escolares aprenden el concepto (KFLM-Teorías de aprendizaje; Formas de interacción con un contenido matemático).

Por otra parte, las respuestas se apoyan en su propio conocimiento sobre polígonos (KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos), considerando el dibujo como forma de representación del concepto (KoT-Registros de representación) como apoyo para mejorar la comprensión (KMT-Recursos materiales y virtuales). En la última intervención se habla de las características críticas, como propiedades que deben considerarse en la definición de un concepto, lo que se puede relacionar con el conocimiento sobre las condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones (KPM).

Como puede observarse, se han movilizado elementos de MTSK esperados en el diseño de la actividad, si bien hay también respuestas relacionadas con algún subdominio no esperado.

## Conclusiones

Además de todo el conocimiento que se esperaba fuera movilizado por parte de los EPP en la resolución de la tarea, en el análisis de sus intervenciones se observa cómo se moviliza conocimiento especializado relacionado con categorías de subdominios que no formaban parte del citado conocimiento esperado. Advertimos así cómo los EPP reflexionan y establecen conexiones con otros conocimientos especializados que trascienden en principio con los circunscritos al caso, cuestión que no suele ser habitual en otro tipo de tareas formativas planteadas en la formación inicial.

Estas conexiones se tendrán en cuenta en la reformulación de la tarea formativa para implementaciones posteriores, con el fin de refinarla, mejorando en consecuencia la formación de los EPP.

En la línea de Montes et al. (2019), es fundamental la transferencia de los resultados de investigación a la formación inicial de EPP. Las tareas formativas diseñadas desde situaciones reales de aula se tornan en una herramienta fundamental para la enseñanza y el aprendizaje de los EPP a partir de la investigación sobre el conocimiento movilizado en las mismas.

## Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto de I + D + i “Retos Investigación” del programa estatal de I + D + i orientado a los retos de la sociedad del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, referencia RTI2018-096547-B-I00.

## Referencias

Ball, D. L., y Forzani, F.M. (2007). What makes education research “educational”? *Educational Researcher, 36* (9), 529-540.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Climent, N., Montes, M. A., Contreras, L. C., Carrillo, J., Liñán-García, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Barrera-Castarnado, V. J., y León, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las matemáticas a través del análisis de vídeos. *AIEM- Avances de Investigación en Educación Matemática, 9,* 85-103

Climent, N., y Carrillo, J. (2002). Una propuesta para la formación inicial de maestros. Ejemplificación: los triángulos, una situación de primaria. *Revista EMA, 7* (2), 171-205.

Escudero, I. M., Gavilán, J. M., y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Relime, 17* (1), 7-32.

Escudero-Ávila, D. I. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral no publicada: Huelva: Universidad de Huelva.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J., y Callejo, M. L. (2018). Noticing Students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *AIEM-Avances de Investigación en Educación Matemática, 13*, 39-61.

Goos, M. (2014). Researcher–teacher relationships and models for teaching development in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 46*, 189-200.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical thinking and learning, 6* (2), 105-128.

Guba, E. G., y Lincoln, Y. S. (1994). Competing paradigms in qualitative research. In N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (eds.), Handbook of qualitative research (pp. 105-117). Thousand Oaks, CA: Sage.

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar.

Liñán-García, M.M. (2017). *Conocimiento Especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria*. Tesis doctoral no publicada. Huelva: Universidad de Huelva.

Liñán-García, M. M., Contreras, L. C., Climent, C., Montes, M. A., Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, M.C. (2019). Features of the specialised knowledge in Geometry of prospective primary teachers at the beginning of their training. En L. Jung (Ed.), Student Teaching: Perspectives, Opportunities and Challenges (pp. 57-107). New York: Nova Publishers.

Liñán-García, M. M., y Contreras, L. C. (2013). Debilidades y Fortalezas en el Conocimiento de los Tópicos Matemáticos en Geometría de los Estudiantes para Maestro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 337-344). Bilbao: SEIEM.

Liñán-García, M. M., Montes, M. A. y Contreras, L. C. (2015). Conocimiento sobre la recta de una maestra de tercer ciclo de educación primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 335-342). Alicante: SEIEM.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Markovits, Z., y Smith, M. (2008). Cases as Tools in Mathematics Teacher Education. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education (Volume 2)* (pp. 39-64). Rotterdam: Sense Publisher.

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 29* (1), 75-88.

Montes, M. A., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M., y Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de Profesores de Matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional.* Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Muñoz-Catalán, M. C. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel.* Huelva: Repositorio Arias Montano: http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/2949.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM

Penalva, M. C., Roig, A. y Río, M. D. (2009). Experimento de enseñanza: Tareas de aprendizaje de la Geometría en la formación de maestros de Educación Infantil. *VII Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria. La calidad del proceso de enseñanza/aprendizaje universitario desde la perspectiva del cambio.* Alicante: Universidad de Alicante

Santagata, R. y Guarino, J. (2011). Using video to teach future teachers to learn from teaching. *ZDM Mathematics Education, 43*, 133-145.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J. y Pino-Fan, L. R. (2017). What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17 (1), 153-172.

Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think.* Nueva York: Routledge.

Schoenfeld, A. (2000). Models of the Teaching Process. *Journal of Mathematical Behavior, 18* (3), 243-261.

Simon, M. (2000). Research on the development of mathematics teachers: the teacher development experiment. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.) *Handbook of research design in mathematics and science education.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Pubs.

Strauss, A., y Corbin, J. (1994). Grounded Theory Methodology. En N.K. Denzin y Y.S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 217-285). Thousand Oaks: Sage Publications.

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight. A theory of mathematics education*. Londres: Academic Press.

Vinner, S. (2011). The role of examples in the learning of mathematics and in everyday thought processes. *ZDM – The International Journal of Mathematics Education 43* (2), 247-256.

Zazkis, R., y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69* (2), 131-148.

# Aplicação da metodologia PaP-ER para transposição do MTSK para diferentes áreas das ciências da natureza

Susel T. C. Soares
Stela S. Lima
Leandro Carbo
Geison J. Mello

## Resumo

O PaP-eR originou-se a partir da necessidade de documentar episódios de ensino em pesquisas relacionadas ao PCK. Desta forma, tendo em vista que um dos modelos que proporcionaram a origem do MTSK foi o PCK, o objetivo desta pesquisa foi avaliar a aplicação do uso de PaP-eRs na transposição do modelo MTSK para duas área do ensino de Ciências da Natureza, a Química e a Física, de modo a comprovar sua aplicabilidade na área Química, tendo-se em vista que em estudo anterior esta metodologia foi diagnosticada como favorável para área da Física. Posteriormente, foram confrontados os resultados de ambas as áreas e identificado o tipo de publicação proporciona a identificação de maior número de conhecimentos. A aplicabilidade da metodologia foi significativa para estas áreas, embora tenha apresentado limitações.

## Palavras chave

*Relatório de Experiência Profissional Pedagógica, transposição, episódio de ensino, conhecimento especializado de professores, conhecimento pedagógico do conteúdo.*

## Abstract

The origin of this PaP-eR becomes from the necessity to document teach episodes at researches related to PCK. Through this and aiming that the theory that origin the MTSK was the PCK, the goal of this research was to evaluate the application of the PaP-eR at the transposition of the MTSK model to two areas of the Nature Science, Physics and Chemistry, in the way to prove his applicability at Chemistry area, since this method was diagnosed favorably to the Physics area. Subsequently, the results of both areas were confronted and indicated which type of publication provides the identification of the greatest number of knowledge. The applicability of the methodology was significantly positive for these areas, although it presented limitations.

## Keywords

Pedagogical and professional-experience repertoire, transposition, teaching episode, teacher's specialized knowledge, pedagogical content knowledge.

Soares, S. T. C., Lima, S. S. Carbo, L. y Mello, G. J. (2019). Aplicação da metodologia PaP-ER para transposição do Mtsk para diferentes áreas das ciências da natureza. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (119-126). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Introdução

O profissional da área educacional é pouco valorizado e, muitas vezes, não é reconhecido como em outras profissões, como por exemplo, médicos, advogados e engenheiros. Isto ocorre tanto quanto à remuneração e falta do prestígio social quanto à responsabilidade destes profissionais na formação de uma sociedade, ou até mesmo quanto às crenças, ao considerar que tal profissão remete à existência de talento e não de conhecimento.

Deste modo, pesquisadores têm trabalhado em busca de reconhecimento profissional para minimizar este senso comum presente na sociedade, bem como buscar avanços para ofertar um ensino igualitário, com qualidade e eficiência, valorizando o conhecimento docente específico da área de formação (Shulman, 1986; Ball, Thames & Phelps, 2008; Carrillo et al., 2014; Goes, 2014; Carrillo, Contreras & Montes, 2015; Luís, Monteiro y Carrillo, 2015; Lima, 2018; Soares, 2019)

A partir da década de 80, a educação começou a avançar devido à publicação de Shulman (1986) sobre o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK, *Pedagogical Content Knowledge*). O PCK tem sido objeto de estudo em diversas áreas, inclusive nas Ciências da Natureza.

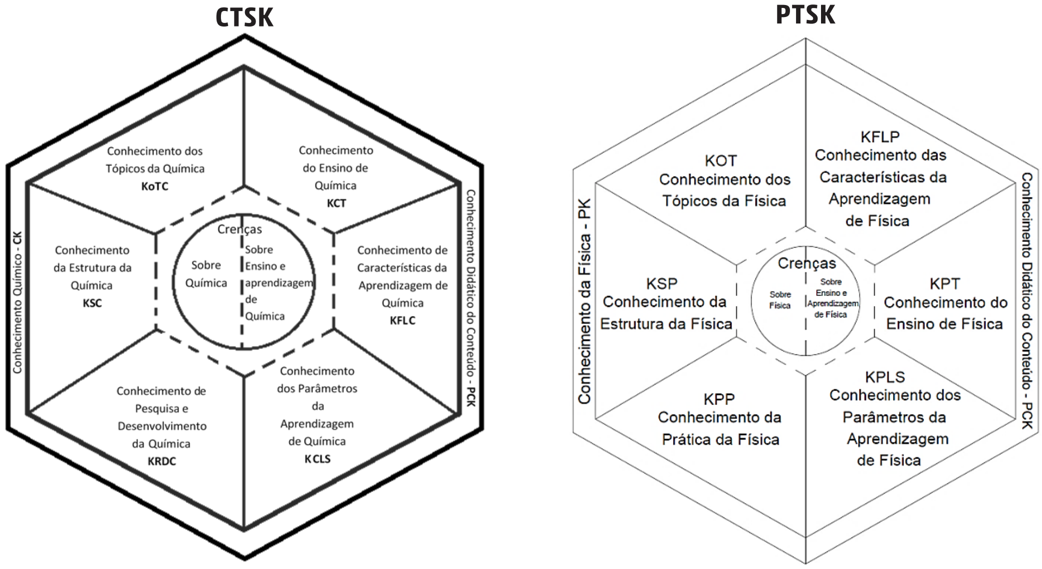
Há décadas, pesquisadores propõem diferentes metodologias para auxiliar pesquisas visando o avanço do PCK. Uma destas propostas foi o Relatório de Experiência Profissional Pedagógica (PaP-eR, *Professional and Pedagogical experience Repertoire*), desenvolvido com intuito de documentar informações referentes à prática pedagógica, de modo a possibilitar a construção do episódio de ensino por outrem (Loughran et al., 2001).

Dentre os estudos realizados a partir do PCK a área com maior destaque nas produções é a matemática (Goes, 2014), tal fato justifica o fato desta área encontrar-se em estado mais avançado de pesquisa que as Ciências da Natureza e inclusive ter sido a pioneira em propor o modelo referenciado nesta pesquisa capaz de descrever o Conhecimento Especializado dos Professores de Matemática (MTSK, *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge*) (Montes, Contreras y Carrillo, 2013; Carrillo et al., 2014; Carrillo et al., 2018)

Tendo em vista um estudo recente que verificou a possibilidade do uso de PaP-eR para configurar o modelo de Conhecimento Especializado de Professores de Física (PTSK, *Physics Teacher´s Specialized Knowledge*) que concluiu como promissora a utilização da metodologia para identificação de conhecimentos da área da Física, bem como na identificação de conhecimentos didáticos (Lima et al., 2017), o objetivo desta pesquisa foi avaliar a aplicação para a Química confrontando os resultados para estas duas disciplinas das Ciências da Natureza e verificando qual tipo de material de pesquisa (artigos, dissertações ou teses) trazem mais informações quanto à identificação de conhecimentos.

A avaliação proposta tem como contexto a proposição do modelo do Conhecimento Especializado de Professores de Química (CTSK, *Chemistry Teacher´s Specialized Knowledge*), assim como foi utilizada na proposição do PTSK. Os dois modelos encontram-se na figura 1, apesar de terem sido propostas categorias para o Subdomínio Conhecimento dos Tópicos em ambos, este aspecto não será aqui detalhado por fugir ao objetivo proposto do presente estudo.

**Figura 1.**
**Modelos do Conhecimento Especializado de Professores de Química e Conhecimento Especializado de Professores de Física: CTSK (Soares, 2019) e PTSK (Lima, 2018)**




## Metodologia

O PaP-eR possibilita a reconstrução do episódio de ensino, levando informações significativas ao leitor, que são validadas pelo professor e autênticas ao episódio avaliado. Dessa forma, a coleta de dados foi através da seleção de episódios de ensino, mediante a utilização de Relatórios de Experiência Profissional Pedagógica (PaP-eRs).

Os PaP-eRs são documentos que reconstroem um episódio de ensino de forma comunicável, sempre a partir de uma prática real de um conteúdo específico de uma área, neste caso, relacionada à área das Ciências da Natureza, foco do estudo (Loughran et al., 2001). Estes documentos podem ter formatos diversos como: diários de sala, filmagens, entrevistas, revistas e outros. O primordial é que o PaP-eR caracterize, para o pesquisador, o conhecimento do professor e permita a identificação de aspectos do conteúdo, da pedagogia e do contexto do episódio de ensino (Loughran et al., 2001).

Os episódios de ensino foram selecionados entre publicações científicas de ensino de Química que apresentassem as características de um PaP-eR. Assim, para seleção dos PaP-eRs foram obedecidos os seguintes critérios: (i) ser baseado em uma prática real de ensino de Química ou Física, conforme o caso; (ii) possibilitar a reconstrução do episódio de ensino; (iii) apresentar descrições detalhadas do cenário de ensino; e (iv) abordar o aspecto experimental na área.

A busca de episódios de ensino na área Química foi exclusivamente em artigos científicos, enquanto na área da Física esta ocorreu em artigos científicos, dissertações e teses que atendessem os quatro critérios estabelecidos.

Após a escolha dos episódios de ensino, foi realizada a identificação dos conhecimentos, aplicando os modelos transpostos a partir do MTSK para área da Física e da Química, como ferramenta analítica. A partir da identificação e classificação destes conhecimentos em cada subdomínio, os resultados foram confrontados entre as duas áreas pertencentes à Ciência da Natureza e entre os tipos de documentos estudados na área de Física, para verificar a aplicabilidade na área e investigar se diferentes materiais de pesquisa apresentam resultados distintos.

**Quadro 1**
**Exemplos de trechos extraídos dos PaP-eRs e da descrição dos conhecimentos identificados**

| Modelo | Trecho do PaP-eR no qual o conhecimento foi identificado | Descrição do Conhecimento |
|---|---|---|
| **CTSK** | Dentre os vários temas usados como contextualizadores, convém destacar os agrotóxicos. Além de contexto motivador, agrotóxicos é uma temática rica conceitualmente, o que permite desenvolver conceitos químicos, biológicos, ambientais, entre outros...<br>(CAVALCANTI et al., 2010, p. 31) | Conhecimento do tema agrotóxicos em uma temática rica conceitualmente que consiste em: desenvolver conceitos químicos, biológicos, ambientais, entre outros. |
| **PTSK** | A seguir, abordamos a direção da força magnética e das grandezas que interferem em sua intensidade.<br>...<br>Considere o vetor campo magnético e o vetor velocidade da partícula nem mesmo plano. A força magnética é sempre perpendicular a esse plano, como monstra a Fig. 3.1.<br>(OLIVEIRA, 2012, p. 68 e 112) | Conhecimento de como determinar a direção da grandeza vetorial força magnética que consiste em: na direção perpendicular ao plano formado pelos vetores da velocidade da partícula e do campo magnético. |

Fonte: CTSK (Soares, 2019, p. 65) e PTSK (banco de dados dos autores)

De modo mais sistematizado tem-se que a análise dos dados seguiu a sequencia de: preparação das informações, unitarização, categorização, descrição e interpretação (Moraes, 1999). O processo de aprimoramento do modelo final proposto envolveu leituras sucessivas e a triangulação entre investigadores que permitiu a redução do viés individual das análises feitas.

## Resultados

Após a seleção dos PaP-eRs, conforme os critérios estabelecidos, em cada área, estes foram analisados de modo a identificar e descrever os conhecimentos dos professores. No Quadro 1 são apresentados um exemplo da Física e um da Química desta etapa da pesquisa. Cada conhecimento identificado foi classificado conforme o respectivo modelo transposto e após sucessivas análises e aproximações obteve-se a configuração dos modelos propostos ao término de cada pesquisa.

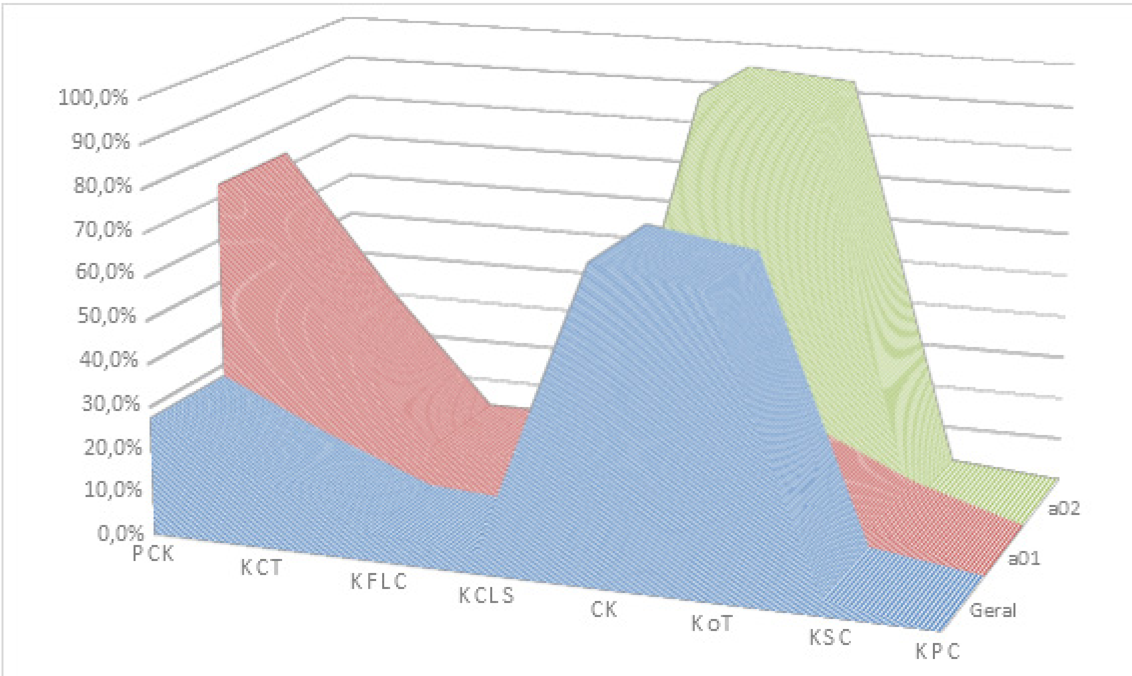
Sendo o foco deste artigo analisar a aplicabilidade da metodologia PaP-eR na coleta de dados para transposição dos modelos, o debate sobre as etapas de análise não serão aprofundadas no presente texto.

Na área da Química foram analisados dois PaP-eRs, sendo um envolvendo conhecimentos de Química Geral, Inorgânica, Físico-química, Orgânica e Química Ambiental, enquanto o segundo abordava exclusivamente conhecimentos relativos à área de abrangência de Química Orgânica. No total foram evidenciados 80 conhecimentos.

Dentre os episódios selecionados na área química, o PaP-eR denominado 02 foi o que se destacou. Trata-se de um artigo, pertencente à área de abrangência de Química Orgânica, com apenas 5 páginas, entretanto evidenciou-se 54 conhecimentos que foram classificados conforme o modelo transposto do MTSK. Este foi maior número de conhecimentos em um único PaP-eR de todo estudo realizado nesta pesquisa.

Ainda sobre o PaP-eR 02, apesar do número significativo de conhecimentos identificados, dois subdomínios não foram contemplados, sendo eles relativos ao Conhecimento dos Parâmetros da Aprendizagem de Química e Conhecimento de Pesquisa e Desenvolvimento da Química. Enquanto, Conhecimentos dos Tópicos da Química destacou-se com 92,6% dos conhecimentos evidenciados. O gráfico 1 apresenta um panorama geral dos PaP-eR analisados, referentes à área Química.

**Gráfico 1**
**Porcentagem dos conhecimentos evidenciados em cada subdomínio transposto para química (produção dos autores)**




Na área da Física foram selecionados 18 episódios de ensino e identificados um total de 346 conhecimentos pertencentes a diferentes áreas de abrangências da Física, sendo elas: Astronomia, Eletricidade e Magnetismo, Física Moderna, Mecânica Clássica, Oscilações e Ondas, Ótica e Termofísica.

O maior número de PaP-eR analisado foi referente à Mecânica Clássica, entretanto a porcentagem de conhecimentos evidenciados foi relativamente baixa, com apenas 17%. Entretanto, Eletricidade e Magnetismo, abordado em apenas 3 episódios de ensino, representaram 26% dos conhecimentos evidenciados, tendo sido o maior destaque na área. A Física Moderna contribuiu com a menor porcentagem de conhecimentos, apenas 6%.

Independentemente da área de abrangência dos Pap-eRs, o levantamento de conhecimentos ocorreu tanto em episódios de ensino provenientes de artigos científicos, como dissertações e teses. Todavia, embora a dissertação possua maior número de páginas que um artigo científico, não pode-se afirmar que terá maior número de conhecimento. O PaP-eR denominado P17, trata-se de uma dissertação, contendo 110 páginas, entretanto apenas 5 conhecimentos foram evidenciados, enquanto o artigo científico P16, com 8 páginas, sobre o mesmo tópico, evidenciou 8 conhecimentos.

Após transposição do MTSK verificou-se que nem todos os subdomínios foram significativamente contemplados. O subdomínio referente ao Conhecimento da Prática da Física possuiu apenas 1 conhecimento evidenciado, um valor relativamente baixo, comparado ao total. Os maiores destaques foram com os subdomínios referentes ao Conhecimento dos Tópicos da Física e ao Conhecimento do Ensino de Física. O gráfico 2 demonstra a distribuição dos conhecimentos evidenciados e seus respectivos subdomínios, a partir da transposição do MTSK para a Física.

**Gráfico 2**
**Porcentagem dos conhecimentos evidenciados em cada subdomínio transposto para física (produção dos autores)**


Confrontando os resultados obtidos em ambas as áreas, nota-se a dificuldade de evidenciar conhecimentos relativos ao subdomínio Conhecimento da Prática da área. Embora a área química tenha tido como objeto de estudo apenas 2 PaP-eR, o número de conhecimento foi significativo, o que demonstrou que para a área a metodologia é consideravelmente atraente, mesmo tratando-se de artigos com números reduzidos de páginas.

Nos estudos realizados com os diferentes materiais foi possível notar que o número de páginas não influencia na quantidade de conhecimentos, logo estudos futuros pode optar por utilizar artigos e trabalhar com mais artigos, haja vista que o tempo de análise reduz significativamente conforme reduz o número de páginas para análise.

Em ambas as áreas o resultado referente ao subdomínio KoT foi relevante, comparado aos demais, mas é possível evidenciar conhecimentos de todos os subdomínios provenientes da transposição do MTSK, um resultado promissor para estudos futuros, tanto para evolução e propagação do MTSK quanto para os demais modelos.

O uso da metodologia PaP-eR na transposições do modelo permitiu a incorporação de aspectos específicos de cada ciência aos Modelos. Por exemplo, a análise dos conhecimentos matemáticos envolvidos nas duas disciplinas é um resultado que evidencia como a idiossincrasia de cada área pode ser identificada e incorporada aos modelos propostos com base nos conhecimentos identificados nos PaP-eRs. No MTSK o conhecimento matemático condiciona todos os conhecimentos abordados no modelo, tanto conhecimentos os didáticos como os disciplinares.

Na proposta feita para Física o conhecimento matemático é incluído como um conhecimento necessário para o ensino da disciplina. No PTSK a matemática não é entendida como apenas como uma ferramenta da Física, mas sim como uma linguagem estruturante do pensamento físico, que empresta sua precisão, universalidade e lógica dedutiva ao pensamento científico para compor modelos sobre os sistemas físicos reais do mundo. Assim, no PTSK foi proposta a categoria "Linguagem Matemática" no subdomínio KoT para abranger estes conhecimentos.

Na Química a interação com a matemática é presente, pois há conexões entre estes conhecimentos, porém a interdisciplinaridade é mais presente que na Física ou na Matemática. A compreensão de alguns conhecimentos químicos demanda conhecimentos sobre Matemática, Física, Biologia e outras Ciências. Desta forma os conhecimentos de outras áreas necessários para a compreensão da Química foram incluídos na categoria "Conhecimento Interdisciplinar" no subdomínio KoT do modelo CTSK .

## Conclusão

Após análise dos resultados foi possível verificar que a metodologia possui limitação quanto ao subdomínio denominado pela transposição a partir do Conhecimento da Prática Matemática para ambas as áreas, bem como para as crenças. Entretanto, a aplicação para os demais subdomínios provenientes da transposição do MTSK os resultados foram promissores.

Além disto, é importante ressaltar outra limitação, que consiste na impossibilidade de realizar uma entrevista com o professor autor de cada PaP-eR. Desta forma não há como aprofundar a investigação de possíveis indícios, consequentemente são analisadas apenas as evidências de conhecimento identificadas em cada episódio de ensino.

Como ponto positivo vale ressaltar a praticidade da disposição deste material para pesquisas, uma vez que tal documento encontra-se pronto e disponível para consulta virtual, facilitando o desenvolvimento de pesquisas, uma vez que não faz-se necessária a avaliação do projeto por comité de ética.

A quantidade de conhecimento evidenciado pode ser significativa mesmo em artigos científicos que possuem número reduzidos de páginas. Confrontando todos os resultados, houve caso de maior evidencia de conhecimento em artigo científico do que em documentos contendo maior número de páginas (teses/dissertações), portanto o número de conhecimentos identificados não é proporcional a extensão do documento.

O artigo com maior destaque na quantidade de conhecimentos evidenciados foi pertencente à Química, mais especificamente à Química Orgânica, com 54 conhecimentos. Notou-se que a área de abrangência, de ambas as Ciências, também não influenciam nesta quantidade.

É possível utilizar esta metodologia para evidencias de conhecimento especializado de professores, sugere-se após sua utilização como estudo inicial, a pesquisa seja complementada com outras metodologias empíricas que possibilitem entrevistas com os professores participantes. Todavia, para estudos de prazo reduzido, nível de mestrado, a metodologia é extremamente satisfatória, devido à possibilidade de execução rápida.

A metodologia de análise de episódios de ensino relatados nos PaP-eRs, com suas vantagens e limitações acima relatadas, foi utilizada com sucesso na transposição do MTSK para proposição dos modelos de conhecimento especializado de professores de Química e Física, CTSK e PTSK, nos quais manteve-se a especialização como premissa para conhecimentos modelados e foram incorporadas as características específicas de cada disciplina.

## Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of teacher education, 59*(5), 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., Montes, M. A., Escudero-Ávila, D., y Flores-Medrano, E. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del professor de matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M. A., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education,* 20 (3), 236-253. doi:10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo, J., Contreras, L. C., y Montes, M. A. (2015). *Reflexionando Sobre el Conocimiento del Profesor. Investigacion de Didactica de la matemática de la universidad de Huelva.* Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didactica de la Matemática de la Universidad de Huelva, España.

Cavalcanti, J. A., Freitas, J. C. R., Melo, A. C. N., Freitas Filho, J. R. (2014). Agrotóxicos: Uma Temática para o Ensino de Química. *Química Nova na Escola*, 32 (1), 31-36.

Goes, L. F. (2014). *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo: Estado da Arte no campo da Educação e no Ensino de Química.* (Dissertação de Mestrado). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

Lima, S. S. (2018). *Conhecimento Especializado de Professores de Física: Uma proposta de Modelo Teórico.* (Dissertação de Mestrado em Ensino). Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologias do Estado de Mato Grosso, Cuiabá, 2018.

Lima, S. S, Costa, L. D., Soares, S. T. C, Silva Filho, V. P., Moriel Junior, J. G. y Mello, G. J. (2017). *Análise de PaP-eRs como primeira aproximação metodológica para configurar o modelo de conhecimento especializado de professores de física (PTSK).* In: Congresso Internacional de Formação e Desenvolvimento Profissional Docente – Residencia Docente: Paradigma de Integração Teoria-Prática, 3, 1-5.

Loughran, J., Milroy, P., Berry, A., Gunstone, R., y Mulhall, P. (2001). Documenting science teachers' pedagogical content knowledge through PaP-eRs. *Research in Science Education, 31*(2), 289-307.

Luís, M., Monteiro, R., y Carrillo, J. (2015). *Conhecimento Especializado do Professor para Ensinar Ciências.* In: Encontro Nacional de Educação em Ciências, Lisboa, Portugal. 1-6

Montes, M. A., Contreras, L. C., y Carrillo, J. (2013). *Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK.* In: Simposio de la SEIEM, Bilbao, Espanha. 1, 1-8.

Moraes, R. (1999) Análise de conteúdo. *Revista Educação*, 22 (37), 7-32.

Oliveira, V. (2012). *Uma proposta de ensino de tópicos de eletromagnetismo via instrução pelos colegas e ensino sob medida para o ensino médio*. (Dissertação de Mestrado Profissional em ensio de Física). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher,* 15 (2), 4-14.

Soares, S. T. C. (2019). *Conhecimento Especializado de Professores de Química – CTSK: Proposta de Modelo Teórico.* (Dissertação de Mestrado em Ensino). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso, Cuiabá, 2018.

# Conhecimento especializado de professores de biologia: uma análise de pap-er sobre embriologia humana

Marcela Marques
Jeferson G. Moriel-Junior

## Resumo

O avanço na ideia de especialização do conhecimento necessário para ensinar levou ao desenvolvimento do MTSK e de sua transposição para outras disciplinas, como Biologia, Física e Química. Nosso objetivo é caracterizar o conhecimento especializado de professores de Biologia sobre embriologia humana a partir da análise de um Professional and Pedagogical experience Repertoire (PaP-eR). Utilizamos o modelo teórico Biology Teacher's Specialized Knowledge (BTSK) numa abordagem metodológica analítico-documental. Nossos resultados identificaram dez conhecimentos especializados de professores de Biologia para ensinar e fazer aprender embriologia humana, predominando o conhecimento da Biologia frente ao didático do conteúdo.

## Palavras-chave

Conhecimento especializado de professores, BTSK, Biologia, Embriologia, PaP-eR.

## Abstract

The advance in the idea of specialization of the knowledge necessary to teach led to the development of MTSK and its transposition to other disciplines, such as Biology, Physics and Chemistry. The objective is to characterize the Biology Teacher's Specialized Knowledge (BTSK) when teaching human embryology from the analysis of Professional and Pedagogical experience Repertoire (PaP-eR). We use the theoretical model Biology Teacher's Specialized Knowledge (BTSK) in analytical-documentary methodological approach. Our results identify ten specialized knowledge to teach and learn human embryology, predominating the biological knowledge in front of the didactic knowledge.

## Keywords

Teacher's specialized knowledge, BTSK, Biology, Embryology, PaP-eR.

Marques, M. y Moriel-Junior, J. G. (2019). Conhecimento especializado de professores de biologia: uma análise de pap-er sobreembriologia humana. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (127-134). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Introdução

Este trabalho[1] é parte da dissertação de mestrado da primeira autora[2] sob orientação do segundo autor[3], estando inserido no conjunto de pesquisas do *Teacher's Specialized Knowledge Research Group* (*TSK Group*)[4] composto por docentes e estudantes do Programa de Pós-Graduação em Ensino no Instituto Federal de Mato Grosso (IFMT) e vinculado à *Red Iberoamericana MTSK*.

Parte-se da premissa de que o conhecimento de professores necessário para ensinar tem percorrido uma trajetória que vai do genérico ao especializado (Moriel Junior y Wielewski, 2017). O constructo Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK)[5] de Shulman (1986) tem protagonismo no início deste movimento de especialização. A disciplina da Matemática foi pioneira ao abordar suas especificidades com o modelo Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT)[6] (Ball, Thames y Phelps, 2008), cujos avanços e limitações levou ao desenvolvimento do modelo do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK)[7] (Carrillo et al., 2014; Carrillo et al., 2018).

Dado o impacto e o reconhecimento do MTSK na área da educação matemática, o modelo passou a ser transposto a outras disciplinas das ciências. Este proceso se iniciou com uma parceria Portugal-Espanha para a Biologia com o modelo Conhecimento Especializado de Professores de Biologia (BTSK)[8] (Luís, 2015). E recentemente, no PPGEn/Brasil para a Física com o modelo Conhecimento Especializado de Professores de Física (PTSK)[9] (Lima, 2018) e a Química com o modelo Conhecimento Especializado de Professores de Química (CTSK)[10] (Soares, 2019).

Na perspectiva de contribuir com o desenvolvimento da compreensão dos conhecimentos necessários para ensinar e fazer aprender Biologia (BTSK), este trabalho tem como objetivo caracterizar o conhecimento especializado de professores de Biologia sobre embriologia humana a partir da análise de um *Professional and Pedagogical experience Repertoire* (PaP-eR).

1 Esta pesquisa foi realizada com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, do Edital Universal 42/2016/FAPEMAT e da Chamada 04/2018/DPG/PROPES/IFMT.

2 Mestranda em Ensino no Instituto Federal de Mato Grosso (IFMT) e Licenciada em Biologia (FAFISM). Email: m.marquesbio@gmail.com

3 Doutor em Educação em Ciências e Matemática (UFMT/REAMEC), Docente do Mestrado em Ensino e do Mestrado em Educação Profissional e Tecnológica no Instituto Federal de Mato Grosso (IFMT). Email: jeferson.moriel@cba.ifmt.edu.br

4 http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/7032020622091895

5 Sigla em inglês para: Pedagogical Content Knowledge.

6 Sigla em inglês para: Mathematical Knowledge for Teaching.

7 Sigla em inglês para: Mathematics Teacher's Specialized Knowledge.

8 Sigla em inglês para: Biology Teacher's Specialized Knowledge.

9 Sigla em inglês para: Physical Teacher's Specialized Knowledge.

10 Sigla em inglês para: Chemistry Teacher's Specialized Knowledge.

## Conhecimento Especializado de Professores de Biologia

O atual modelo do Conhecimento Especializado de Professores de Biologia (BTSK) (Luís, 2015) Figura 1, segue o formato hexagonal em consonância com o modelo do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK) (Carrillo et al., 2014) dividido em dois domínios, o Conhecimento Didático do Conteúdo (PCK), que é subdividido em três subdomínios, (i) Conhecimento do Ensino de Biologia (KBT) que é conhecimento de estratégias de ensino da Biologia, como a microscopia, trabalho experimental, saídas de campo, e analogias; (ii) Conhecimento das Características da Aprendizagem da Biologia (KFLB) que é o conhecimento da forma como os alunos aprendem Biologia, o trabalho prático como elemento facilitador ou as conexões alternativas como bloqueio às novas aprendizagens; e (iii) Conhecimento dos *Standards* de Aprendizagem da Biologia (KBLS) que é conhecimento dos parâmetros de aprendizagem da Biologia, como o currículo, complementos ao currículo, estudos das associações de professores; e no domínio do Conhecimentos da Biologia (BK) que também é subdividido em três subdomínios, sendo eles (i) Conhecimento dos Temas da Biologia (KoBT) que é o conhecimento das definições, fenômenos, teorias, leis, da Biologia;  (ii) Conhecimento da Estrutura da Biologia (KSB) que é o conhecimento da estrutura da Biologia, das relações entre os diferentes conteúdos; e (iii) Conhecimento da Natureza da Ciência (KNoS) que relata sobre o conhecimento da natureza, dos princípios e das grandes ideias sobre ciências, de ciência e em ciências.

Descrevemos a seguir as categorias do subdomínio Conhecimento dos Temas da Biologia, que atualmente é o único descrito na literatura (Luís, 2015):

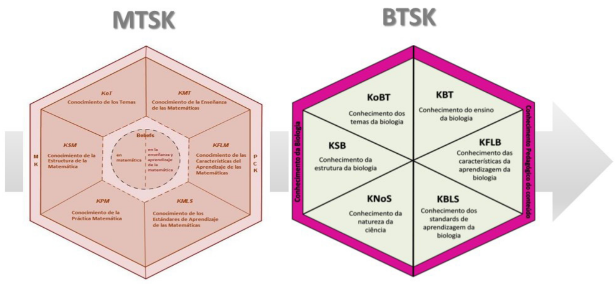
Conhecimento de Conceitos e de Exemplos Associados que se referem ao conhecimento das definições ou propriedades específicas que caracterizam os elementos ou conceitos biológicos e dos exemplos que ajudam a defini-lo;

- Conhecimento de Leis, Princípios e Teorias que são os conhecimento das leis, princípios e teorias associados ao tema;
- Conhecimento de Fatos e Fenômenos Biológicos que traz o conhecimento sobre os fatos como verdades dogmáticas e dos fenômenos biológicos enquanto processos e sequências de acontecimentos biológicos;
- Conhecimento de Procedimentos e Técnicas de Observação que é o conhecimento sobre os meios e técnicas apropriadas para realizar determinada observação mas também sobre como e quando fazer;
- Conhecimento de Modelos Relacionados com o Conteúdo que retrata sobre o conhecimento sobre estruturas ou registros que permitem diferentes representações de um determinado conteúdo;
- Conhecimento sobre as Aplicações do Conteúdo que é sobre a ampla variedade de contextos e aplicações ligada ao conteúdo, que permitem ao professor conhecer os diferentes significados que se podem atribuir ao conteúdo.

## Metodologia

A pesquisa é qualitativa, documental, de cunho analítico-interpretativo, teve como fonte de dados um artigo científico classificado como *Professional and Pedagogical experience Repertoire* (PaP-eR). Isto significa que trata-se de um relato de experiência de ensino que apresente elementos que caracterizam o conhecimento dos professores, permita que sejam reconhecidos os aspectos da pedagogia, do conteúdo e do contexto (Loughran et al., 2001). Deve se basear na prática real de ensino, reconstruir episódio de ensino, conter descrições detalhadas das situações vivenciadas durante o ensino do conteúdo, e as partes dos textos selecionados devem abordar aspecto experimental do ensino da disciplina (Lima et al., 2017).

**Figura 1**
**Modelos de Conhecimento Especializado dos Professores de Matemática e Biologia: MTSK (Carrillo et al., 2014) e BTSK (Luís, 2015).**




A busca em repositórios digitais iniciou-se elencando três artigos por palavras-chave, como "Embriologia Humana" e "Ensino", e só então buscamos identificar nestes, as características de PaP-eR, o que nos gerou o resultado de apenas um artigo intitulado "Intervenção com Modelos Didáticos no Processo de Ensino-Aprendizagem do Desenvolvimento Embrionário Humano: uma Contribuição para a Formação de Licenciados em Ciências Biológicas" (Meira et al., 2015).

A análise de dados se dará por meio da identificação de evidências dos conhecimentos especializados que os professores de Biologia precisam ter, caracterizando os domínios, subdomínios e categorias, e também pela identificação de indícios, que está relacionado ao trecho do artigo (manifestação do sujeito) que demonstra uma superficialidade de um determinado conhecimento sugerindo que o sujeito possa saber mais sobre o que foi exposto (Moriel Junior & Carrillo, 2013). Para tanto, utilizamos o instrumento de análise MTSK desenvolvido (Moriel Junior & Alencar, 2019), testado e validado em dissertações de mestrado dos integrantes do grupo de pesquisa GIMC – IFMT como ferramenta de análise (cf. Quadro 1). Os conhecimentos identificados foram codificados com a tríade *PaP-eR-Parágrafo-Linhas* para composição e organização do banco de dados. Com isso, adotamos para a codificação uma sequência alfanumérica indicando com a letra "P" e o número de identificação do PaP-eR, o símbolo "§" e o número de identificação do Parágrafo, e a letra "L" seguida da numeração separada por traço para identificar a Linha, sendo que a numeração das linhas é sequencial, iniciando-se a cada parágrafo. Neste trabalho, analisaremos um único PaP-eR e por isso omitiremos a primeira parte da tríade, como se pode ver no seguinte exemplo: §5.L3-7.

**Quadro 1**
**Instrumento de análise MTSK**

| **Trecho do artigo** | | **Análise do pesquisador** | |
|---|---|---|---|
| **Manifestação** | **Conhecimento...** | **associado a...** | **que consiste em...** |
| Trecho do episódio<br>(Artigo, ano, linha ou página) | [subdomínio] | [categoria] | [Síntese do conhecimento] |
| *Exemplo: "eu utilizo a resolução de problemas para ensinar derivada" (Artigo, Ano, página)* | *do ensino de matemática (KMT)* | *estratégia de ensino* | *uma metodologia de ensino de 'derivadas': 'resolução de problemas'* |

Fonte: Adaptado de Moriel Junior y Alencar (2019).

## Resultados

O PaP-eR em questão apresenta uma análise do potencial pedagógico de modelos didáticos tridimensionais, que foram utilizados em aulas de Embriologia Humana em um curso de Ciências Biológicas de Universidade pública. A inserção dos modelos tridimensionais foi realizada após aulas teóricas e de microscopia referentes à embriogênese humana inicial.

Identificamos neste PaP-eR dez conhecimentos especializados de professores de Biologia, sendo nove evidências e um indício (Quadro 2). Das nove evidências, seis são do domínio do Conhecimento da Biologia (KB), sendo a maioria (cinco) do subdomínio do Conhecimento dos Temas da Biologia (KoBT), relacionadas ao conhecimento das definições ou propriedades específicas e às definição de processos e sequências de acontecimentos biológicos; e o restante (um) do subdomínio do Conhecimento da Estrutura da Biologia. Quanto, ao Conhecimento Didático do Conteúdo (PCK) identificamos duas evidências no subdomínio do Conhecimento das Características da Aprendizagem da Biologia sobre modos como os alunos aprendem e uma do Conhecimento do Ensino da Biologia que consiste em um recurso para a diversificação metodológica.

O indício identificado está associado ao Conhecimento do Ensino da Biologia (KBT) associado a uma estratégia de ensino que consiste na ‘construção/uso’ de ‘modelos didáticos tridimensionais’ em ‘aulas dinâmicas e interativas’ sobre o tema ‘desenvolvimento embrionário humano’. Vimos que um único trecho pode evidenciar um único conhecimento (como §1.L9-12 e §9.L1-3), pode evidenciar mais de um conhecimento em distintos subdomínios (como §10.L3-7 e §47.L4-6), bem como, ser necessário diferentes trechos para dar sentido na evidência de um ou mais conhecimentos (como §4.L1-4 e §16.L16-20). Este cenário fortalece a existência de conexões entre conhecimentos e subdomínios do modelo BTSK.

**Quadro 2**
**Análise BTSK a partir dos trechos do PaP-eR**

| Trecho do artigo | | Análise do Pesquisador | |
|---|---|---|---|
| **Manifestação** | **Conhecimento…** | **associado a…** | **que consiste em…** |
| §1.L9-12: No que se refere ao ensino de Ciências (Biologia, Química e Física), a ocorrência de aulas práticas ou teórico-práticas é fundamental para a compreensão dos processos e apropriação de conceitos. | de Características da Aprendizagem da Biologia (KFLB - Evidência) | Formas como os alunos aprendem Biologia | ‘A compreensão dos processos e apropriação de conceitos’ de Biologia ocorre por meio ‘de aulas práticas ou teórico-práticas |
| §9.L1-3: A importância da Embriologia está, portanto, em explicar a origem da estrutura humana normal e das malformações congênitas. | de Temas de Biologia (KoBT - Evidência) | Conceitos e de exemplos associados | Definição de embriologia: ‘explicar a origem da estrutura humana normal e das malformações congênitas’ |
| §10.L3-7: O zigoto é uma célula altamente especializada e totipotente que, através de vários processos – multiplicação, crescimento, diferenciação e rearranjo celulares – transforma-se em um organismo multicelular. | e Temas de Biologia (KoBT - Evidência) | Conceitos e de exemplos associados | Definição de zigoto: ‘é uma célula altamente especializada e totipotente’ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | de Temas de Biologia (KoBT - Evidência) | Fatos e fenômenos biológicos | Processos biológicos: 'multiplicação, crescimento, diferenciação e rearranjo celulares' |
| | da Estrutura da Biologia (KSB - Evidência) | Estrutura da Biologia, das relações entre os diferentes conteúdos | Relação entre processos para transformação de um célula unicelular (zigoto) em um organismo multicelular |
| §47.L4-6: Aspectos morfológicos e funcionais da placenta e do cordão umbilical são apresentados na grande maioria dos livros de Biologia. | do Ensino da Biologia (KBT - Evidência) | Recurso de ensino | Um recurso didático para abordar a morfologia e a funcionalidade da placenta e do cordão umbilical: 'livros de Biologia' |
| | de Temas de Biologia (KoBT - Evidência) | Conceitos e de exemplos associados | A placenta e o cordão umbilical possuem aspectos morfológicos e funcionais |
| | de Temas de Biologia (KoBT - Evidência) | Conceitos e de exemplos associados | Termos da Biologia: 'placenta' e 'cordão umbilical' |
| §4.L1-4: Os modelos didáticos tridimensionais podem atuar como importantes ferramentas facilitadoras do processo de ensino e aprendizagem acerca do desenvolvimento embrionário humano.<br><br>§16.L16-20: A construção e/ou o uso de modelos tridimensionais oportuniza aulas dinâmicas e interativas, em que o aluno não figura como mero e passivo expectador e sim como agente ativo no processo de ensino-aprendizagem. | do Ensino da Biologia (KBT - Indício) | Estratégia de Ensino | 'construção/uso' de 'modelos didáticos tridimensionais' em 'aulas dinâmicas e interativas' sobre o tema 'desenvolvimento embrionário humano' |
| | de Características da Aprendizagem da Biologia (KFLB - Evidência) | Formas como os alunos aprendem Biologia | Papel do aluno no processo de aprendizagem de Biologia: 'agente ativo' no processo de 'construção e/ou o uso de modelos tridimensionais' de Biologia. |

Nas últimas manifestações do Quadro 2 identificamos não só conhecimentos, como também certo nível de crença ao mencionar o caráter 'facilitador' de determinada estratégia de ensino, algo que poderia estar no centro do modelo BTSK.

## Conclusão

Caracterizamos o conhecimento especializado de professores de Biologia sobre embriologia humana a partir da análise de *Professional and Pedagogical experience Repertoire (PaP-eR).* Os resultados mostram evidências (e um indício) de conhecimentos especializados tanto no domínio didático (PCK), quanto no da Biologia (KB).

O indício identificado aponta a necessidade da continuidade da investigação para ampliar a compreensão do fenômeno (Flores, Escudero y Aguilar, 2013; Moriel Junior y Carrillo, 2013). Porém, na análise de PaP-eRs essa continuidade fica limitada ao que está exposto no documento, de modo que não se pode fazer questionamentos ao sujeito do tipo: descreva como utilizar o modelo tridimensional para ensinar e suas etapas ou como a manipulação ou construção de um modelo tridimensional contribuiria no processo de aprendizagem do aluno?

Apesar dos nossos resultados da análise estarem restritos ao atual estado de conhecimento sobre o modelo BTSK, acreditamos que a não contemplação dos subdomínios do Conhecimento da Natureza da Ciência (KNoS) e do Conhecimento dos *Standards* de Aprendizagem da Biologia (KBLS) se deve ao tema e à maneira como o conteúdo foi abordado e descrito no PaP-eR. A ausência desses subdomínios não sugere fragilidade teórico-metodológica na caracterização do conhecimento especializado. Deste modo, mais pesquisas são necessárias para avançar na compreensão do papel destes subdomínios na prática docente.

É plausível afirmar a partir da caracterização dos conhecimentos aqui obtida que a transposição do MTSK para Biologia resulta em um modelo útil como uma ferramenta para compreensão e melhoria da formação de professores. O mesmo tem sido identificado com o PTSK e o CTSK. Estes resultados reforçam a importância da continuidade das pesquisas que contribuam para o desenvolvimento do BTSK e uso na formação docente.

A expectativa é que continuemos a desenvolver pesquisas com o modelo teórico BTSK, incluindo metodologias tanto teóricas (como a deste artigo), quanto empíricas com gravação de aulas. É extremamente importante avançarmos também na compreensão das conexões entre os conhecimentos, para além da visão estática. Acreditamos que com profissionais mais preparados com conhecimentos especializados seja possível uma melhoria significativa da qualidade do ensino da Biologia e da aprendizagem discente.

## Referências

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of teacher education*, *59* (5), 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., Montes, M.A., Escudero-Ávila, D., y Flores-Medrano, E. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Flores, E., Escudero, D. I., y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. In A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (17. ed., Vol. 1, pp. 275-282). Bilbao, Espanha: SEIEM.

Loughran, J., Milory, P., Berry, A., Gunstone, R., y Mulhall, P. (2001). Documenting science teachers' pedagogical content knowledge through PaP-eRs. *Research in Science Education, 31*(2), 289-307.

Lima, S. S, Costa, L. D., Soares, S. T. C, Silva Filho, V. P., Moriel Junior, J. G., y Mello, G. J. (2017). *Análise de PaP-eRs como primeira aproximação metodológica para configurar o modelo de conhecimento especializado de professores de física (PTSK).* In: Congresso Internacional de Formação e Desenvolvimento Profissional Docente – Residência Docente: Paradigma de Integração Teoria-Prática, 3, 1-5.

Lima, S. S. (2018). *Conhecimento Especializado de Professores de Física: Proposta de Modelo*. (Dissertação de mestrado). Instituto Federal de Mato Grosso em associação com Universidade de Cuiabá, Cuiabá.

Luís, M. (2015). *Conhecimento Especializado de Professores de Biologia.* (Tese de doutorado). Universidad de Huelva, Espanha. (Documento Inédito).

Meira, M. S., Guerra, L., Carpilovsky, C. K, Ruppenthal, R., Astarica, K. B., y Schetinger, M. R. C. (2015). Intervenção com modelos didáticos no processo de ensino-aprendizagem do desenvolvimento embrionário humano: uma contribuição para a formação de licenciando em ciências biológicas. *Revista Ciências e Natureza, 37*(2), 301-311.

Moriel Junior, J. G., y Alencar, A. P. (2019). Conhecimento especializado para ensinar Cálculo: um panorama da produção do COBENGE 2012-2017. *Brazilian Journal of Development*, *5*(7), 7687-7702.

Moriel Junior, J. G., y Carrillo, J. (2014). *Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar matemática com o modelo MTSK.* Paper presented at the Seminário de Investigación en Educación Matemática XVIII, Salamanca, España.

Moriel Junior, J. G., y Wielewski, G. D. (2017). Base de conhecimento de professores de matemática: do genérico ao especializado. *Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas, 18*(2), 126-133.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Education Researcher*, *15*(2), 4-14.

Soares, S. T. C. (2019). *Conhecimento Especializado de Professores de Química: Proposta de Modelo com detalhamento do Conhecimento dos Tópicos*. (Dissertação de mestrado). Instituto Federal de Mato Grosso em associação com Universidade de Cuiabá, Cuiabá.

# Conhecimento especializado de professores: potencialidades do modelo da matemática para o ensino de língua portuguesa

Joseany Moreira
Edson Evangelista
Geison Mello


## Resumo

Diversos referenciais bibliográficos abordam lacunas existentes sobre os conhecimentos dos professores e a falta de especialização docente no ensino da Língua Portuguesa. Com a expansão do Conhecimento Especializado necessário aos professores para ensinar, que teve como pioneira a disciplina de matemática com o modelo teórico MTSK – Conhecimento Especializado de Professores de Matemática, objetiva-se avaliar as potencialidades do MTSK como base fundamentadora para propor um modelo de Conhecimento Especializado de Professores de Língua Portuguesa.



## Palavras-chave

Conhecimento especializado de professores, língua portuguesa, ensino.



## Abstract

Several bibliographical references address existing gaps in the knowledge of teachers and the lack of teaching specialization in the teaching of the Portuguese Language. With the expansion of the Specialization Knowledge needed for teachers to teach that pioneered the mathematics discipline with the theoretical model MTSK - Specialized Knowledge of Mathematics Teachers, aims to evaluate the potential of the MTSK as a basis for proposing a model of Portuguese Language Teachers Specialized Knowledge.



## Keywords

Teacher’s specialized knowledge, language portuguese, teaching.


Moreira, J., Evangelista, E. y Mello, G. (2019). Conhecimento especializado de professores: potencialidades do modelo da matemática para o ensino de língua portuguesa. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (135-140). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Introdução

O presente trabalho surgiu a partir de uma proposta de pesquisa do Grupo Interdisciplinar de Ensino de Matemática e Ciências da Natureza (GIMC) formado por representantes da Linha de Pesquisa: Ensino de Matemática, Ciências Naturais e suas Tecnologias, do Programa de Pós-Graduação em Ensino IFMT/UNIC (PPGEn), inserido na Red Iberoamericana MTSK, da qual a primeira autora foi convidada a participar para desenvolvimento desta pesquisa.

Assim como nas demais profissões a especialização é de suma importância e na educação não é diferente. Porém, pesquisas mostram que, em relação a formação inicial de professores de uma escola e as disciplinas por esses lecionadas, em nenhuma disciplina do ensino médio este índice atinge 80% de adequação, apresentando a disciplina de Língua Portuguesa com o percentual de 79,3%. (Brasil, 2017).

Apesar dos esforços de diversos pesquisadores para a identificação dos conhecimentos necessários aos professores para a prática do ensino (Moriel Junior, 2014), ainda há muito trabalho a ser realizado em busca da sistematização dos conteúdos e aprimoramento dos professores (Loughran et al, 2001; Ball, Thames, Phelps, 2008; Salvador, Novais, 2015; Karal, Alev, 2016).

O ensino de Língua Portuguesa no Brasil parte da concepção de linguagem como prática socio interacional, em que a linguagem é compreendida a partir da interação verbal, é através dela que se constitui a realidade da língua, uma vez que a língua é resultado de uma interação entre os seres que a utilizam em sua língua materna, oral e escrita, a fim de lhes garantir o pleno exercício da cidadania, pois a partir dela é possível alcançar um dos principais objetivos da disciplina: tornar o aluno proficiente, como enuncia Bakhtin (1989).

Os estudos relacionados ao conhecimento do professor para o exercício docente foram iniciados por Shulman (1986,1987), que foi um dos primeiros grandes pesquisadores a se aprofundar na questão referente aos conhecimentos que os professores precisam ter para ensinar de forma eficaz, abrangendo também a pedagogia usada para o ensino deste conteúdo ao aluno.

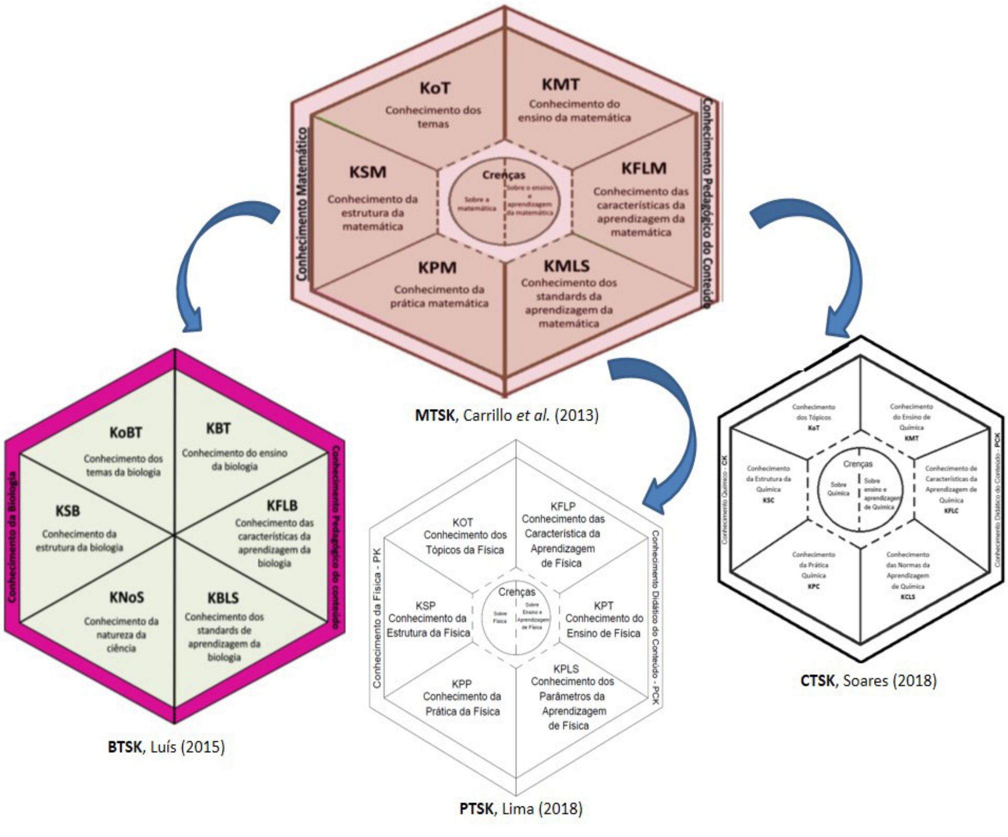
As descrições do conhecimento que o professor deve ter para ensinar desenvolvida por Shulman, é apresentada em sete categorias dos conhecimentos fundamentais dos professores: (a) conhecimento de conteúdo, ou conhecimento do conteúdo da disciplina; (b) conhecimento pedagógico geral, como gestão de sala de aula e disciplina; c) conhecimento curricular ou conhecimento do conteúdo que se espera que seja ensinado dentro de uma disciplina; (d) conhecimento pedagógico de conteúdo, ou conhecimento de como transmitir esse conteúdo para os outros de forma eficiente; (e) conhecimento dos alunos e suas características; (f) conhecimento de contextos educacionais, ou conhecimento de escolas, salas de aula e os vários contextos em que operar; e (g) conhecimento de fins, propósitos e valores educacionais, ou conhecimento das questões mais amplas em torno dos propósitos e objetivos da educação e os valores que devem ser instigados nos alunos dentro de um determinada sociedade. Dentre os conteúdos apresentados na estrutura o que se destaca, em particular, é o conhecimento que os professores precisam ter, denominado Conhecimento Pedagógico de Conteúdo (PCK), que os permite compreender o conhecimento de conteúdo de forma eficaz, porque engloba conhecimentos de pedagogia, do conteúdo, dos estudantes e do contexto da aprendizagem (Novais, 2015).

O modelo do PCK apresenta características generalistas, pois não identifica as diferenças entre as disciplinas, abordando-as sem enfatizar as particularidades pertinentes de outras disciplinas. Com isso surge o modelo do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK) (Carrillo et al., 2014) que é sucessor do modelo Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008).

Com o reconhecimento do modelo MTSK na área do ensino da matemática, o modelo passou a ser transposto a outras disciplinas das ciências, tendo iniciado com a transposição para a disciplina da Biologia com o modelo Conhecimento Especializado de Professores de Biologia (BTSK) (Luís, 2015), sendo esse aplicado como forma de validação por um projeto de mestrado no conteúdo de reprodução (Marques, 2018), e para a disciplina de Física com o modelo Conhecimento Especializado de Professores de Física (PTSK) (Lima, 2018) e para a Química com o modelo Conhecimento Especializado de Professores de Química (CTSK) (Soares, 2018), esses projetos são desenvolvidos pelo PPGEn/Brasil.

**Figura 1**

**Modelos de Conhecimento Especializado dos Professores de Biologia, Física e Química, transpostos do Modelo de Conhecimento Especializado de Matemática - MTSK (Adaptado de Marques, M., 2018)**

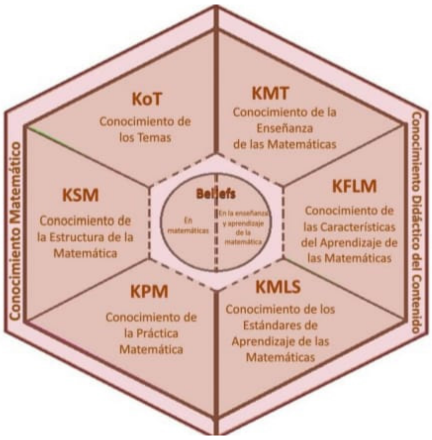



## Conhecimento Especializado de Professores de Matemática – MTSK

Criado por Carrillo et al. (2014), o modelo teórico possui formato hexagonal, em seu centro encontram-se as crenças que são os conceitos que norteiam as ações dos professores em relação ao da matemática, ao ensino e à aprendizagem, assim dividido por dois domínios Conhecimento Matemático (MK) e o Conhecimento Didático (PCK), sendo cada domínio dividido em três subdomínios, conforme Figura 2, e caracterizado da seguinte forma: (1) Conhecimento Matemático (MK), (i) Conhecimentos dos Tópicos (KoT), (ii) Conhecimento da Estrutura da Matemática (KSM), (iii) Conhecimento da Prática da Matemática (KPM); (2) Conhecimento Didático do Conteúdo (PSK), (i) Conhecimento do Ensino de Matemática (KMT), (ii) Conhecimento das Características da Aprendizagem de Matemática (KFLM), e (iii) Conhecimento das Normas da Aprendizagem de Matemática (KMLS).

O uso do modelo MTSK como instrumento de análise para identificação dos conhecimentos mobilizados pelos docentes de matemática para o ensino de tópicos específicos é evidenciado em trabalhos como a tese de doutorado do professor Moriel Júnior (2014) onde foram apontados os conhecimentos sistemáticos para o ensino de divisão de frações.

**Figura 2**
**Modelos de Conhecimento Especializado de Professores de Matemática - MTSK (Adaptado de Carrillo et al., 2014)**




## Metodologia

Na busca em repositórios digitais por modelos teóricos de conhecimentos especializados de professores de Língua Portuguesa, não foi identificado nenhum modelo genérico acerca do conhecimento de professores de Língua Portuguesa nem tão pouco especializado. É nessa perspectiva da transposição do MTSK, acreditamos nas potencialidades do mesmo como base fundamentadora para modelar o Conhecimento Especializado de Professores de Língua Portuguesa (PLTSK) para uma futura proposta. Por tanto, o encaminhamento metodológico será de cunho analítico-interpretativo, sendo a pesquisa qualitativa.

Prevê-se para o primeiro momento, uma aproximação da transposição através da identificação de evidências do conhecimento especializado em artigos científicos classificados como Professional and Pedagogical experience Repertoire (PaP-eRs), definido por Loughran et al. (2001) como artigos que ilustrem para o pesquisador os elementos que caracterizam o conhecimento dos professores e permitam que sejam reconhecidos os aspectos da pedagogia, do conteúdo e do contexto. Para tanto, utilizaremos o instrumento de análise de exploração o modelo apresentado na Tabela 1.

**Tabela 1**
**Instrumento de análise MTSK**

| Trecho do artigo | Análise do pesquisador | | |
|---|---|---|---|
| **Evidência** | **Conhecimento...** | **associado a...** | **que consiste em...** |
| [Trecho do episódio - linha ou página, artigo, ano] | [subdomínio] | [categoria] | [Síntese do conhecimento] |
| *Exemplo: "eu utilizo a resolução de problemas para ensinar derivada" (Artigo, Ano, página)* | *do ensino de matemática (KMT)* | *estratégias de ensino* | *uma abordagem de resolução de problemas para ensinar derivadas* |

Fonte: Moriel Junior y Alencar (2018).

Para validação do modelo proposto, configurando como uma segunda etapa, a pesquisa contemplará a observação e gravação (áudio/visual) das aulas de Língua Portuguesa, que para Savola (2008) é uma tecnologia eficaz a favor das pesquisas qualitativas, ajudando na profunda compreensão da prática docente por meio da identificação das evidências nas transcrições dos episódios de ensino gravados.

Havendo a necessidade de aprofundar a caracterização dos conhecimentos, será realizada a terceira etapa configurada como Entrevista Semiestruturada, com intuito de investigar os indícios de conhecimento especializado encontrados nas evidências.

## Conclusão

O modelo MTSK permite a identificação dos conhecimentos em diversos cenários, a efetividade de sua utilização como ferramenta de análise de conhecimentos dos professores para o ensino de tópicos específicos e a elaboração de atividades formativas por meio do uso do banco de dados, tornam essencial a efetiva investigação de um modelo do Conhecimento Especializado de Professores de Língua Portuguesa, PLTSK, que tenha como base conceitual o modelo MTSK.

A transposição do modelo MTSK para a disciplina língua portuguesa, com o objetivo de constituir o PLTSK, é o objetivo da primeira autora deste trabalho que visa realizar uma pesquisa de caráter qualitativo com o intuito de construir um modelo para o Conhecimento Especializado de Professores de Língua Portuguesa que seja coerente com as características particulares da disciplina.

A partir do estabelecimento do modelo, será viável fazer a determinação sistemática do conhecimento especializado de professores de língua portuguesa, o que trará inúmeros benefícios para a educação, como: maior valorização da profissão docente, melhor formação profissional e melhoria na qualidade do ensino da disciplina.

## Referências

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of teacher education*, 59 (5), 389-407.

Bakhtin, M. (1989) *Marxismo e filosofia da linguagem*. São Paulo: Hucitec.

Brasil. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP (Comp.). Censo escolar da educação básica 2016: Notas estatísticas. Brasília, 2017. 29.

Carrillo, J., Avila, D. I. E., Mora, D. V., Medrano, E. F. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del professor de matemáticas*, Universidad de Huelva Publicaciones.

Karal, I. S., Alev, N. (2002). *Developement of pre servisse and its influence physics teachers pedagogical contente and its influence on physics teaching. Reserch in Science*. (s.l]. 20 (2), 215-225.

Loughran, J., Milory, P., Berry, A., Gunstone, R. y Mulhall, P. (2001). *Documenting science teachers' pedagogical content knowledge through PaP-eRs. Research in Science Education,* 31 (2), 289-307.

Lima, S. S; Costa, L. D.; Soares, S. T. C; Silva Filho, V. P.; Moriel Junior, J. G. y Mello, G. J. (2017) *Análise de PaP-eRs como primeira aproximação metodológica para configurar o modelo de conhecimento especializado de professores de física (PTSK).* In: Congresso Internacional de Formação e Desenvolvimento Profissional Docente – Residência Docente: Paradigma de Integração Teoria-Prática, 3, 1 - 5.

Lima, S.S. (2018) *Conhecimento Especializado de Professores de Física: Proposta de Modelo*. (Dissertação de mestrado). Instituto Federal de Mato Grosso em associação com Universidade de Cuiabá, Cuiabá. (Documento Inédito).

Luís, M. (2015). *Conhecimento Especializado de Professores de Biologia.* (Tese de doutorado). Universidad de Huelva, Espanha. (Documento Inédito).

Marques, M. (2018). *Conhecimento Especializado de Professores de Biologia para ensinar Reprodução.* (Dissertação de mestrado). Instituto Federal De Mato Grosso em associação com a Universidade de Cuiabá, Cuiabá. (Documento Inédito)

Moriel Junior, J. G., y Alencar, A. P. (2019). *Conhecimento especializado para ensinar Cálculo: um panorama da produção do COBENGE 2012-2017*. Brazilian Journal of Development, 5(7), 7687-7702.

Moriel Junior, J. G. *Conhecimento especializado para ensinar divisões de frações.* (2014). Tese de Doutorado. (Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática – PPGECEM/REAMEC) – Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 162.

Moriel Junior, J. G.; y Wielewski, G. D. (2017). Base de conhecimento de professores de matemática: do genérico ao especializado. *Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas*, 18 (2), 126-133.

Moriel Junior, J. G.; Alencar, A. P. (2018). *Panorama quantitativo do COBENGE 2012-2017 sobre conhecimento especializado para ensinar Cálculo. In: WorkIF*. Workif. Cuiabá: IFMT, 2018. 5, 11.

Novais, R. M. (2015) *Docência Universitária: a base de conhecimentos para o ensino e o conhecimento pedagógico de conteúdo de um professor de ensino superior*. (Tese de doutorado). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Salvador, D. F.; Rolando, F. R. R. y Rolando, L. G. R. (2010). Aplicação do modelo de conhecimento tecnológico, pedagógico de conteúdo (TPCK) em um programa on-line de formação continuada de professores de Ciências e Biologia. *Electrón. investig. educ. cienc., Tandil*. 5 (2), 31-43.

Savola, L. (2008) *Video-based analysis of mathematics classroom practice: examples from finland and Iceland*. Doctoral dissertation. Universidad de Columbia. United States.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Education Researcher*, 15 (2), 4 - 14.

Soares, S.T.C. (2018) *Conhecimento Especializado de Professores de Química: Proposta de Modelo com detalhamento do Conhecimento dos Tópicos*. (Dissertação de mestrado). Instituto Federal de Mato Grosso em associação com Universidade de Cuiabá, Cuiabá. (Documento Inédito).

# ¿Qué MTSK movilizan formadores y maestros cuando analizan una actividad sobre medida de longitud en Educación Infantil?

Noemí Pizarro
Nuria Joglar-Prieto
Mónica Ramírez-García
Blanca Arteaga-Martínez
M. Mar Liñán-García
Juan Miguel Belmonte
M. Cinta Muñoz-Catalán
Esperanza Hernández

## Resumen

Para avanzar en la comprensión del conocimiento del maestro de Educación Infantil sobre la enseñanza de la medida de magnitudes, se describen e interpretan acciones de maestros y formadores cuando reflexionan sobre el potencial y la implementación de una tarea en un aula de alumnos de 5 años. Con el foco en la práctica de aula, considerando el modelo MTSK, analizamos una sesión de reflexión. Los resultados ponen de relieve la complementariedad en los aspectos de MTSK que maestras y formadores movilizan al analizar la práctica docente, lo que refuerza la necesidad de trabajar en entornos colaborativos.

## Palabras clave

MTSK, educación matemática en Infantil, medida de longitud, formación inicial de maestros, formadores (matemáticos) de maestros

## Abstract

In this work we aim to deepen our understanding of the content and nature of the early childhood teacher's knowledge, focusing on those aspects which might promote students' thinking about measuring length. With the focus on classroom practice, considering the MTSK model, we analyzed a reflection session where teachers and mathematics teacher educators discuss about the potential and the implementation of a task in a classroom with 5-year-old children. The results highlight the complementarity in the aspects of MTSK that teachers and trainers mobilize when analyzing teaching practice. This complementarity issue reinforces the need to work in collaborative environments.

## Keywords

MTSK, early childhood mathematics education, length measurement, pre-service teacher training, mathematics teacher educators

Pizarro, N., Joglar-Prieto, N., Ramírez-García, M., Arteaga-Martínez, B., Liñán-García, Mª. M., Belmonte, J. M., Muñoz-Catalán, Mª. C. y Hernández, E. (2019). ¿Qué MTSK movilizan formadores y maestros cuando analizan una actividad sobre medida de longitud en educación infantil?. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (141-148). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Introducción

La atención a la etapa de Educación Infantil es relativamente reciente en nuestra comunidad de investigación. El profesor de Educación infantil precisa, quizás en mayor medida que el profesor de otras etapas educativas, disponer de un sólido conocimiento matemático para identificar con rigor los cimientos del edificio matemático, promover un aprendizaje profundo de los mismos y revestirlos de un aparataje lúdico y funcional. En esta comunicación presentamos nuestros avances preliminares en la descripción de aspectos del MTSK que movilizan maestras de Infantil y formadores-investigadores cuando reflexionan conjuntamente sobre la implementación en un aula de alumnos de 5 años de una actividad de introducción a la medida de longitud.

Todos los investigadores que hemos formado parte de esta experiencia somos formadores de maestros pero no trabajamos en el aula Infantil con frecuencia. Por lo tanto, se torna fundamental para nosotros el trabajo conjunto con las maestras del nivel para contextualizar y complementar desde la práctica nuestro conocimiento, en este caso sobre la enseñanza de la medida, y mejorar así nuestras prácticas en la formación de maestros de esta etapa (McIntyre, 2005).

A partir de lo anterior, maestras de Educación Infantil y formadores de maestros de Educación Infantil, acuerdan colaborar para diseñar y llevar al aula actividades para trabajar la medida de magnitudes y, posteriormente, reflexionar conjuntamente sobre esa implementación. En particular, en esta comunicación nos vamos a centrar en el análisis que realizan formadores de maestros y maestros sobre una primera actividad de aula. El detonante de esta reflexión es la implementación de una actividad diseñada por varios formadores-investigadores, llevada al aula por dos de las formadoras en un aula con alumnos de 5 años de una escuela pública. Nuestro objetivo es avanzar en la descripción de aspectos del conocimiento especializado que movilizan, por un lado, formadores-investigadores y por otro, maestras de Infantil cuando reflexionan conjuntamente sobre una actividad de medida de magnitudes en el aula infantil viéndola en vídeo.

Este análisis sobre la práctica conlleva trabajos posteriores en los que se tratará de describir e interpretar diferentes elementos de MTSK movilizados por maestras y formadoras al diseñar actividades (refinamientos de la presentada en esta comunicación), al implementarlas en un aula real y al reflexionar conjuntamente sobre esa implementación. Estos análisis están todavía siendo elaborados y se espera sean divulgados en los próximos meses.

## Referentes teóricos

El contexto de la investigación es la colaboración entre formadores de maestros y maestros, como espacio de desarrollo profesional bidireccional, coordinado por dos formadoras-investigadoras de la Universidad Complutense de Madrid.

El núcleo del trabajo es la medición de longitudes en Educación Infantil, como objeto de enseñanza. El MTSK es el modelo de análisis que nos permite ubicar aspectos del conocimiento especializado movilizado por formadores de maestros y maestros, cuando analizan conjuntamente una actividad de introducción a la medida de longitud en un aula infantil.

## *Formador de maestros, maestros y escuela*

Desde hace unos años la investigación sobre la práctica docente ha ido en aumento, dado que el proceso de enseñanza se ha entendido como un escenario complejo, incierto y cambiante, donde se producen interacciones interesantes de observar, relacionar, contrastar, cuestionar y reformular (Gergen, 2001), para comprender cómo se desarrollan los procesos de enseñanza y cómo podrían mejorarse. Estas investigaciones han posicionado al profesor como el factor interno más importante en el aprendizaje (Hargreaves y Fullan, 2014).

A partir de lo anterior, emerge la importancia de la formación de maestros, y por consecuencia surge la preocupación sobre quienes forman al profesor para que su quehacer sea eficaz. Sin embargo, así como el profesor de aula no está, en general, al tanto del conocimiento que se imparte actualmente en la universidad, el formador de profesores no está familiarizado con el trabajo de aula (Zeichner, 2010). "La educación se considera un proceso y la escuela es una experiencia vivida" (Merriam, 1998, p.4). Entonces surge una pregunta de investigación, ¿cómo el formador de maestros, lejano en su quehacer diario al aula de educación infantil, puede comprender qué contexto, actividades o situaciones de enseñanza favorecen el aprendizaje?

De esta forma, las teorías planteadas en la formación quizás no sintonizan con la práctica del futuro maestro. Por ello, una de las especificidades del conocimiento del formador de profesores se refiere a conceptualizar y explorar situaciones de enseñanza que permitan desarrollar conocimiento que traten con los futuros maestros (Ribeiro, 2016)

Para McIntyre (2005) en la desconexión entre la teoría y la práctica se encuentra una brecha de conocimiento relevante: el que se genera en la investigación académica, abstracto y descontextualizado y el que se genera en la escuela, artesanal y ligado a la enseñanza. Por lo tanto, vincular la universidad con la escuela es una oportunidad para estrechar la brecha y mejorar directamente la formación de profesores.

La colaboración entre la investigación de formadores de maestros y maestros es un camino para el desarrollo profesional de ambos grupos y para el desarrollo de la investigación centrada en un conocimiento especializado para enseñar evidenciado en la práctica (Baumfield y Butterworth, 2007).

## *La enseñanza de la medida*

La longitud es la primera magnitud que se estudia y la más tratada en el aula. Constituye la base para otras magnitudes como la superficie y el volumen, que son lamentablemente reducidas a la aritmetización a partir de la longitud en demasiadas ocasiones (Chamorro y Belmonte, 1991; Chamorro, 2003). Para enseñar a medir, es fundamental considerar la conservación y la transitividad (Belmonte, 2005; Chamorro y Belmonte, 1991; Clements y Stephan, 2004), la iteración de la unidad, su relación el número, el origen en el punto cero, su aislamiento y percepción.

La medida como parte de las matemáticas es un conocimiento con una alta componente social, por ello, se generan algunas paradojas en su enseñanza. La escuela delega buena parte de la enseñanza de la medición a la sociedad, con la convicción de que los estudiantes terminarán aprendiendo ciertos temas en su entorno familiar o social, sin soporte matemático (Chamorro, 2003).

## MTSK

El trabajo que nos ocupa pretende reflexionar sobre el conocimiento profesional especializado que movilizan los formadores de maestros, y los propios maestros, al analizar una actividad matemática en educación infantil. Nos posicionamos con Schoenfeld (2010) al considerar que el conocimiento profesional es el que el profesor necesita y utiliza por la propia naturaleza de la enseñanza de las matemáticas, que es en su totalidad especializado por ser inherente a su profesión (Scheiner, Montes, Godino, Carrillo y Pino-Fan, 2017). Elegimos, consecuentemente, el modelo analítico *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo et al., 2018) para nuestra reflexión.

De acuerdo con Muñoz-Catalán y Montes (2015) se ha observado que el KoT es uno de los subdominios más débiles en educación infantil. El KMT es relevante dado que los formadores de profesores quizás no tienen conocimiento del lenguaje usual, o las situaciones potencialmente significativas del nivel y el KFLM nos permite enfocarnos en el razonamiento y la construcción de conceptos, así como en las dificultades y errores de los estudiantes de infantil.

Por otra parte, los resultados de otra investigación reciente (Muñoz-Catalán, Joglar-Prieto, Ramírez-García, Escudero-Domínguez, Aguilar y Ribeiro, 2018), ponen de relieve la sólida formación matemática en contenidos específicos de la etapa que estos profesionales necesitan y la importante relación de estos con elementos de conocimiento didáctico del contenido. También en estos estudios previos se ha detectado que algunos elementos de conocimiento de carácter pedagógico general, no ligado a la materia, parecen hacerse más presentes (y necesarios) que, en otras etapas educativas, por el desarrollo físico y cognitivo de estos alumnos. Esto será especialmente relevante en nuestros análisis de las reflexiones de las maestras.

## Metodología

Esta comunicación responde a nuestra preocupación por comprender la naturaleza y contenido del conocimiento que moviliza el maestro de Educación Infantil para enseñar la medida de longitud con el fin último de organizar procesos formativos para estos profesionales sustentados en elementos de conocimiento procedentes del diálogo entre la investigación y la práctica. En este momento presentamos una primera parte, muy preliminar, de este trabajo concreto.

Afrontamos este objetivo desde el paradigma interpretativo (Bassey, 1999), y mediante un estudio exploratorio centrado en el análisis de vídeos, por un lado de una clase a cargo de dos formadoras de maestros de Educación Infantil que llevan al aula por primera vez una actividad para crear la necesidad de medir longitudes y, por otro, de una sesión de reflexión conjunta sobre ese vídeo en la que participan formadores (incluidas las responsables de la actividad detonante) y maestros.

Las maestras son parte de un equipo profesional de continua colaboración bidireccional, entre maestros y formadores de maestros, con la Universidad Complutense de Madrid.

En este trabajo, el investigador es al mismo tiempo el instrumento y el análisis de los datos (Merriam, 1998). El análisis se realiza sobre la base de la transcripción de ambas sesiones y comienza con la identificación de episodios relevantes para los fines de esta investigación, siguiendo a Schoenfeld (2000).

A continuación, aplicamos un enfoque interpretativo (Kvale, 1996) en el que los datos son recontextualizados a la luz del modelo analítico MTSK. El MTSK es el modelo de análisis que nos permite ubicar aspectos del conocimiento especializado movilizado por formadores de maestros y maestros, cuando analizan conjuntamente una actividad acerca de la medida de longitud en un aula infantil. Veremos cómo estos aspectos se complementan bidireccionalmente en los dos colectivos implicados. Finalizamos esta sección describiendo brevemente la actividad detonante de la reflexión conjunta.

## Actividad detonante

Cuatro formadores de maestros visitan una clase de alumnos de cinco años acompañados por la maestra del grupo. Dos de ellos trabajan con la mitad del curso (12 alumnos) mientras los otros observan y graban en vídeo la sesión. La maestra acompaña el trabajo.

Las formadoras muestran tres botellas de tres tamaños diferentes. Preguntan al grupo, abiertamente, si todas son del mismo alto; en caso de que indiquen que no, preguntan de nuevo cuál es la más alta. Piden a algunos niños que las ordenen de mayor a menor.

Posteriormente, una formadora de maestros (F1) se tapa los ojos y la otra formadora (F2) elige la botella grande y solicita a los niños que expliquen a la profesora de ojos tapados cómo de larga es la botella, esperando que emerja el uso de la medida para comparar.

## Análisis preliminares MTSK

Organizamos esta sección en dos apartados diferentes para incluir los análisis de aspectos de MTSK movilizados en dos momentos. En un primer momento se analiza el MTSK que moviliza la formadora al implementar la actividad detonante en el aula de 5 años. En un segundo momento, formadores y maestras se reúnen, tras la implementación de la sesión de aula, para observar el vídeo y reflexionar sobre las acciones del formador que actúa como maestro. Esta sesión de reflexión conjunta es grabada en vídeo. Posteriormente es analizada para detectar aspectos de MTSK movilizado por los dos colectivos al analizar la actividad, obteniendo de esta manera el MTSK movilizado en los dos momentos (implementación y reflexión sobre la implementación) para considerar las relaciones y, consecuentemente, la complementación entre ambos.

### Apartado 1

### Análisis del MTSK movilizado por la formadora al implementar la actividad (actividad detonante)

| Unidad de información | Análisis preliminar MTSK |
|---|---|
| F1. “Miren tenemos unas botellas azules -muestra a los niños cogidas en sus manos las botellas- ¿son todas del mismo tamaño? ¿Están ordenadas las botellas? ¿Esta es la más alta?” | Observamos que decide compartir con el alumnado cada intento de descubrimiento, pues va preguntando con intención de que expongan su propio razonamiento. Su conocimiento sobre las relaciones de orden, sobre la magnitud longitud y sobre los cuantificadores aplicables le permite realizar las preguntas precisas. Observamos, por tanto un KMT teorías sobre la enseñanza que ha sido detonado por su KoT definiciones, propiedades y sus fundamentos y su KoT procedimientos. |

| | |
|---|---|
| F1: "Y le queremos dar información a F2. ¿De qué tamaño es la más grande? ¿Cómo le podemos decir a F2, para que sepa de qué tamaño es? Ustedes le tienen que decir a F2 de qué tamaño es" | El KFLM teorías sobre el aprendizaje (en este caso, personales) y su conocimiento sobre las formas de interacción de los estudiantes con este contenido, permiten al formador utilizar palabras acordes al nivel de los niños para que estos entiendan el problema que va a plantear, convirtiendo este en un precursor del lenguaje formal y, por tanto, una muestra de su KPM.<br>Observamos también su KoT registros de representación que le permite mostrar su KMT sobre estrategias, técnicas..., pues plantea a los escolares la necesidad de designar la medida para poder comunicar un mensaje al respecto que sea comprensible por la receptora. Asimismo, muestra su KoT procedimientos sobre el proceso de medir conectado con su KMT estrategias de nuevo, lo que le permite realizar, como en la unidad anterior, las preguntas precisas. |
| A1 -la niña coge un bote de la pizarra, lo lleva al lado de la botella- "Como un poquito más pequeño que esto, la colonia"<br>F1 "Tenemos una colonia, y ¿qué es más grande, la colonia o la botella?" | La formadora muestra su KFLM formas de interacción con un contenido matemático conectado con su KMT sobre la bondad del uso de un recurso determinado al hacer reflexionar a la estudiante sobre la afirmación realizada. |

## Apartado 2

### Análisis del MTSK movilizado por maestras y formadores al reflexionar sobre la actividad implementada por la formadora (actividad detonante)

| Unidad de información | Análisis MTSK movilizado por maestras al reflexionar | Análisis MTSK movilizado por formadores al reflexionar |
|---|---|---|
| M1: "Me parece muy bueno que sean capaces de... tener la necesidad de utilizar materiales cada vez más específicos para la medida, para medir. No es lo mismo oral que utilizar referencias (se refiere a las comparaciones directas) que ya utilizar un bote de colonia u otros materiales como regletas Teide."<br>F2: "La maestra incide en el hecho de que la medida respecto de una unidad es la mejor manera de comunicar una cantidad de magnitud (en este caso longitud) por encima de otros intentos orales meramente cualitativos." | Considera, intuitivamente, que es idóneo que los niños descubran que hay diferentes maneras de medir y que no necesitan un material específico para hacerlo, mostrando así su KoT definiciones, propiedades y sus fundamentos y procedimientos sobre medir y las unidades de medida, que conecta con su KMT, técnicas, estrategias y recursos y materiales. Finalmente, parece que estos conocimientos estarían también conectados con su KFLM formas de interacción con un contenido matemático, al indicar que los escolares tienen la necesidad de usar cada vez materiales más específicos para la medida. | Conocimiento de la medida, definiciones, propiedades y fundamentos, y designación, registros de representación, y KPM papel de los símbolos y uso del lenguaje formal y procesos asociados a la resolución de problemas (comunicar la cantidad de magnitud resuelve un problema de comparación). |

| | | |
|---|---|---|
| M2: "Tiene que quedar muy clara la consigna,… tiene que tener un sentido… Los niños no han entendido la consigna".<br>F1: "Efectivamente, tiene que quedar clara la consigna, no deja claro el objetivo del alumno". | Se preocupa porque la consigna ha de quedar clara, mostrando su KPM Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos, conectado con su KMT teorías sobre la enseñanza. | KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos: diseño de la tarea, los alumnos tienen que tener muy claro el objetivo, no se deberían plantear preguntas que no tengan respuesta. Además, está conectado con su KPM, jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas. Para pasar por la primera fase de resolución de problemas es imprescindible la comprensión de la consigna. |

Además, debemos agregar que las maestras, en general, movilizan más el conocimiento pedagógico general que aspectos de las dimensiones del MTSK. Por ejemplo, a lo largo de sus discusiones en la sesión de reflexión conjunta, en muchas ocasiones, hablan sobre tiempos de trabajo, funcionalidades de la tarea, cantidad de niños por actividad, recompensas por respuestas claras, uso del lenguaje y temas relacionados con la emocionalidad. Para el formador investigador hay objetivos de aprendizaje matemático parciales gestionados en el aula a través de la modificación de las variables didácticas, pero a los alumnos solo les presenta el primero (a través de la consigna). Las maestras ven que es importante que el objetivo completo esté claro y que no se vaya cambiando sobre la marcha sin reforzar las respuestas positivas de los niños, es necesario cerrar cada parte de la actividad explícitamente.

## Primeras reflexiones

Como formadores, el KoT y el KPM movilizados son teóricos y abstractos, porque comprendemos el trabajo de medición en el aula infantil desde el conocimiento matemático y la investigación didáctica; que son, en este contexto, son el sustento de nuestro quehacer tanto en la implementación como en la reflexión sobre ella. Nuestra lente busca, por ejemplo, las relaciones de orden sobre magnitud y la rigurosidad conceptual.

Por otro lado, las maestras se enfocan en un KoT y KPM intuitivo conectado con el KMT, dirigidos por un KFLM, centrado en las características de los niños, dado que ellas no han estudiado formalmente los aspectos matemáticos involucrados en la medida, sino que los ha ido desarrollando de forma informal a través de su práctica.

Trabajar en conjunto nos permite avanzar en el diseño de situaciones de enseñanza fortalecidas por la movilización del KMT y KFLM de los maestros. Por otro lado, el KoT y KPM intuitivo de los maestros, se hace más sólido al compartirlo con los formadores.

Es para nosotros imposible soslayar el conocimiento pedagógico general movilizado por los maestros al analizar el episodio. Probablemente, cuanto más jóvenes son los alumnos, el complemento pedagógico es más relevante para una enseñanza matemática idónea.

## Referencias


Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham: Open University press.

Baumfield, V., y Butterworth, M. (2007). Creating and translating knowledge about teaching and learning in collaborative school–university research partnerships: An analysis of what is exchanged across the partnerships, by whom and how. *Teachers and Teaching: Theory and practice*, *13*(4), 411-427.

Belmonte, J. M. (2005). La construcción de magnitudes lineales en Educación Infantil. En M.C. Chamorro (coord.). *Didáctica de las matemáticas para educación infantil* (pp. 315-345). Madrid: Pearson Educación.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Chamorro, M. C., y Belmonte, J. M. (1991). *El problema de la medida: Didáctica de las magnitudes lineales*. Madrid: Síntesis.

Chamorro, M. C. (2003). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Pearson Education.

Clements, D. H., y Stephan, M. (2004). Measurement in pre-K to grade 2 Mathematics. En D. H. Clements, J. Sarama, y A. M. DiBiase (Eds.) *Engaging young children in Mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 299-317). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Gergen, K. (2001). Self narration in social life. In M. Wetherell, S. Taylor y S.J. Yates Eds.) *Discourse theory and practice* (pp. 247–259). London: Sage.

Hargreaves, A., y Fullan, M. (2014). *Capital profesional. Transformar la enseñanza en cada escuela*. Madrid: Morata.

Kvale, S. (1996). *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing*. Thousand Oaks: Sage.

McIntyre, D. (2005). Bridging the gap between research and practice. *Cambridge Journal of Education, 35*(3), 357-382.

Merriam, S.B. (1998). *Investigación cualitativa y aplicaciones de aprendizaje de casos en educación*. San Francisco: Jossey  Bass.

Muñoz-Catalán, M. C., y Montes, M. A. (2015). La investigación sobre MTSK en las distintas etapas educativas. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M.A. Montes. *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor*. II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática. Universidad de Huelva, 15 y 16 de septiembre 2015.

Muñoz-Catalán, M. C., Joglar-Prieto, N., Ramírez-García, M., Escudero-Domínguez, A. M., Aguilar, Á., y Ribeiro, M. (2018). La práctica de aula: una ventana para acceder al conocimiento especializado del profesor de educación infantil para enseñar matemáticas. *Monográfico Red 8*.

Ribeiro, M. (2016). Tareas para alumnos y tareas para la formación: discutiendo el conocimiento especializado del profesor y del formador de profesores de matemáticas*. XX Jornadas Nacionales de Educación Matemátic*a, 1-9.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., y Pino-Fan, L. R. (2017). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*, 153-172.

Schoenfeld, A. (2000). Models of the Teaching Process. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(3), 243-261.

Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think*. New York: Routledge.

Zeichner, K. (2010) Rethinking the connections between campus courses and field experiences in college- and university-based teacher education. *J. Teacher Educ. 61*, 89-99.

# Conexiones de simplificación y complejización en la enseñanza de la multiplicación de fracción por natural en la Escuela Primaria

Manuel Montañez-Esparza
Eugenio Lizarde

## Resumen

En esta comunicación analizamos cómo se manifiesta el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas cuando diseña y aplica una lección de trabajo elaborada ex profeso para contribuir a extender el concepto de multiplicación con números naturales hacia el primer acercamiento de multiplicación de fracción por natural. A partir del análisis de transcripciones de clases se puede concluir que desde el diseño de la lección se manifiesta a priori el conocimiento del profesor relacionado principalmente con el Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas y el Conocimiento de la Estructura Matemática; en la práctica se evidencia el Conocimiento de los Temas lo que permite, aunado con el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas y el Conocimiento de la Práctica Matemática, profundizar los conocimientos de sus estudiantes.

## Palabras clave

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, multiplicación de fracciones, enseñanza de las matemáticas

## Abstract

In this communication, we analyse how the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge manifests when designs and applies a working lesson prepared specifically to help extend the concept of multiplication with natural numbers towards the first multiplication approach of fraction by natural. From the analysis of class transcriptions it can be concluded that from the design of the lesson a priori manifests the knowledge of the teacher related mainly to the Knowledge of the Features of Learning Mathematics and the Knowledge of the Structure of Mathematics; in practice, knowledge of the topics is evident, which allows, together with the Knowledge of Mathematics Teaching and the Knowledge of the Practice of Mathematics, to deepen the knowledge of their students.

## Keywords

Mathematics Teacher's Specialised Knowledge, multiplication of fractions, teaching of mathematics

Montañez-Esparza, M. y Lizarde, E. (2019). Conexiones de simplificación y complejización en la enseñanza de la multiplicación de fracción por natural en la escuela primaria. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (149-157). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Introducción

La enseñanza de los números racionales en la escuela primaria representa para los estudiantes uno de los temas más complejos a enfrentar, pues el sistema que han construido sobre el funcionamiento con naturales interfiere al trabajar con racionales, y es que como plantea Llinares & Sánchez, (1997), el éxito que se tiene al trabajar con fracciones comunes, "lleva a los maestros a una prematura introducción de los algoritmos y ahí es donde empiezan a aparecer los problemas" (pág. 32).

En razón de lo anterior nuestro análisis está centrado en cómo se manifiesta el conocimiento del profesor que enseña matemáticas (Carrillo, Montes, Contreras, y Climent, 2017), así nos planteamos ¿cuál es el MTSK del profesor que se manifiesta al establecer conexiones de simplificación y complejización sobre la multiplicación de fracciones a partir de los conocimientos que los alumnos ya poseen?; para dar respuesta a la pregunta se hace el análisis de un caso (estudio instrumental de caso - Stake, 1999) considerando varios momentos: primero, el diseño de una lección de trabajo con el tema de una fracción por un número natural; segundo, su aplicación en un grupo de 5° de educación primaria, con la finalidad de extender el concepto multiplicación con números naturales hacia la multiplicación de fracciones (la aplicación se grabó en video y se transcribió); tercero, a partir de las categorías del MTSK se analiza en dos momentos: el diseño de la lección (análisis a priori) y las evidencias (Escudero-Ávila, 2015) de conocimiento especializado manifestadas por el profesor (análisis a posteriori)

## MTSK: Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas.

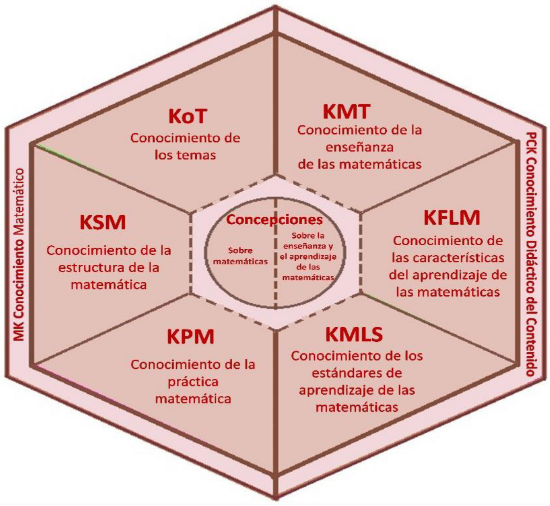
Ahora bien, ¿en qué consiste el modelo MTSK (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*) (Carrillo, Montes, Contreras, y Climent, 2017)? ¿cómo lo utilizamos en el diseño y análisis de la lección? El modelo MTSK describe todos aquellos conocimientos que debe tener un profesor de matemáticas y que son específicos a su labor profesional.

El MTSK es un modelo para interpretar, analizar y dilucidar los conocimientos didácticos y disciplinares del docente cuando enseña un contenido matemático y debemos reconocerlos como elementos indisociables que se hace necesario separar únicamente con fines analíticos.

El modelo lo integran dos dominios (Ilustración 1), el Conocimiento Matemático (MK) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK); y al centro se toma en cuenta las concepciones acerca de la matemática y sus procesos de enseñanza.

El Conocimiento Matemático (MK) está compuesto por tres subdominios. El primero es el Conocimiento de los Temas (KoT) donde se incluyen aquellos conceptos, procedimientos, terminologías, y explicitaciones sobre los saberes matemáticos, así como los aspectos fenomenológicos, los significados y aquellas formas en que se fundamenta el conocimiento matemático.

**Ilustración 1**
**Esquema del modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) (Carrillo, Montes, Contreras, y Climent, 2017)**




Bajo la misma idea, el subdominio Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM) considera aquellas conexiones interconceptuales que pueden ser de complejización, como aquellas que tienen que ver con temas posteriores, mientras que las conexiones de simplificación se refieren a los temas anteriores, las conexiones transversales retoman aquellos conocimientos que se ven a lo largo de la estructura matemática y por último las conexiones auxiliares como aquellos conceptos que pueden servir en la articulación entre diversos temas matemáticos.

Por último, el subdominio Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) que de acuerdo con Flores-Medrano y Aguilar-Gonzáles (2017) integra categorías como aquellas formas de validar y demostrar con el uso de un lenguaje formal, procesos asociados a la resolución de problemas matemáticos, la capacidad para jerarquizar y planificar rutas de solución y la forma de generar definiciones bajo ciertas condiciones según el contenido matemático que enseña.

El dominio Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) integra tres subdominios. El Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) se correlaciona con la tesis de que el profesor conoce e incorpora concepciones sobre aquellas dificultades que pueden presentar sus alumnos al trabajar un determinado contenido matemático y que, por su naturaleza, fenomenología y/o génesis representará un obstáculo didáctico para el tema introducción de fracciones; de la misma forma debe conocer las teorías de aprendizaje, fortalezas y debilidades ante determinado tema (Carrillo, Montes, Contreras, y Climent, 2017)

El Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS) abarca el conocimiento general tanto del currículum oficial y sus objetivos de aprendizaje matemáticos, así como los estándares que propone el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) que permiten tener claro el nivel de profundidad, los cursos y etapas en las que cada uno de los temas deberían de ser presentados.

Como último subdominio tenemos el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) que contempla las categorías de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, así como aquellos recursos y/o materiales didácticos que son del conocimiento del profesor y que contribuyen en la consolidación de vías alternativas de trabajo dentro del aula (Carrillo, Montes, Contreras, y Climent, 2017), de la misma forma se consideran aquellas teorías tanto personales como institucionalizadas que debe tener el profesor para enseñar matemáticas, por ejemplo la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 2007)

## Análisis a priori: Elementos del MTSK puestos en juego en el diseño de la lección.

Comenzaremos el análisis buscando reconocer cuál es el conocimiento del profesor que se pone de manifiesto desde el momento de planificar sus clases y nos planteamos, ¿qué subdominios del MTSK manifiesta el docente que diseña una lección de trabajo enfocada al tema de multiplicación de una fracción por un número natural en 5º grado de primaria?

En el diseño de la lección (véase la Ilustración 2) puede observarse primeramente el KFLM del profesor al considerar *a priori* un problema cuyo resultado es el producto de multiplicar  x 3, en el cual el alumno puede recuperar aquellos saberes previos relacionados con la suma de fracciones con igual denominador y multiplicación con naturales (Véase ilustración 3), pues de acuerdo con Itzcovich, (2007) “es necesario poner en relación lo que los alumnos saben de los números naturales y de sus propiedades con un nuevo campo de números que tiene sus propias leyes” (pág. 132), sirviendo este primer acercamiento como antecedente a la futura confrontación acerca de que en el funcionamiento con racionales no es igual, en particular con la idea de que en multiplicación con fracciones no siempre el producto será mayor que sus factores.

### Ilustración 2

**Lección diseñada por el docente para trabajar el primer acercamiento a multiplicación de fracciones.**

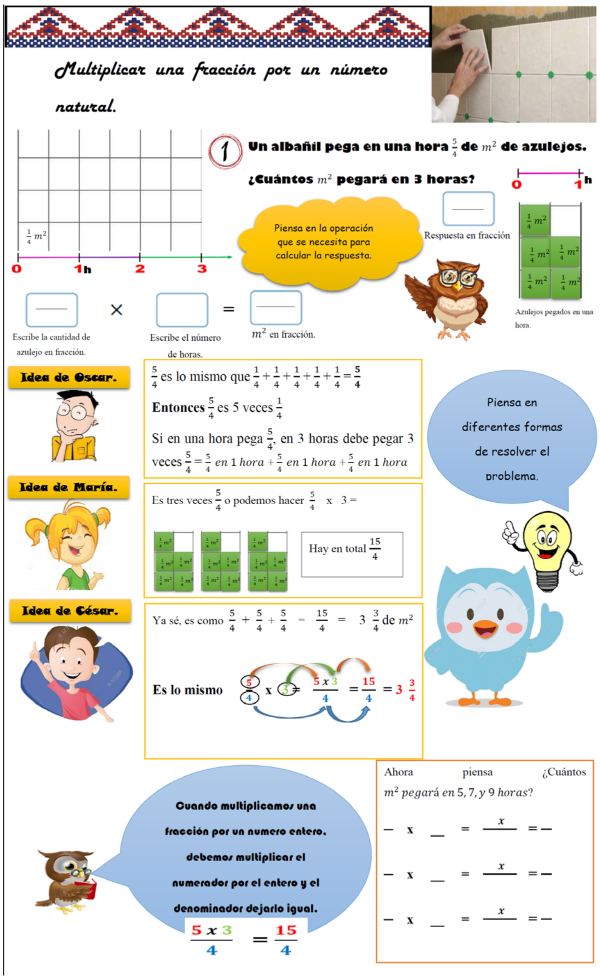
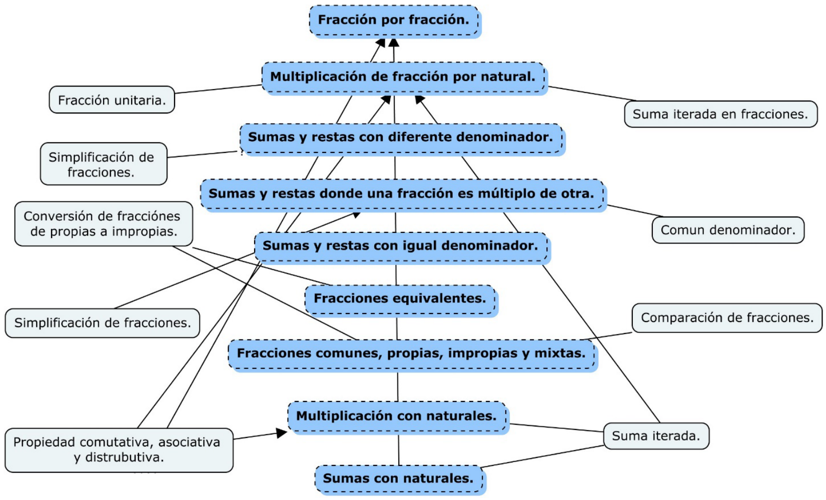


**Ilustración 3**

**Paquete de conocimientos para entender el significado de la multiplicación de fracciones. Fuente: Elaboración propia a partir de SEP, (2011)**




De esta forma, la lección busca hacer accesible y adecuado el nuevo saber en función del razonamiento e ideas previas de sus estudiantes, además de que contempla que pueda ser resuelto desde diferentes interpretaciones por parte de los alumnos, desde el gráfico (mostrado en la representación de cada azulejo), simbólico (en los espacios de azulejos representados en fracción = factor 1, horas = factor 2 y  de azulejo = producto) e intuitivo (utilizando descomposición de  o suma iterada), considerando así las ideas previas que puedan tener sus estudiantes al verse enfrentados al problema.

De igual forma notamos que dentro de la lección el docente manifiesta su KMLS al considerar como antecedente el conocimiento sobre la suma de fracciones con igual denominador y fracciones mixtas, puesto que desde el currículo oficial SEP (2011), ya se planteó su estudio. En contraposición, no contempla un problema que implica multiplicación de fracción por fracción, ya que no aparece en el nivel primaria. Su lección se correlaciona con el texto Principios y Estándares en el eje Números y Operaciones donde establece que los estudiantes deben "comprender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras" (Marín y Lupiáñez, 2005).

El diseño de las actividades permite visualizar el KSM, en particular con las conexiones de simplificación y de complejización (Carrillo, Montes, Contreras, y Climent, 2017); para ejemplificar las conexiones de complejización, mostramos cómo el contenido que se trabaja representa, bajo las ideas de Ma, (2010) un nudo conceptual necesario para un tema de mayor complejidad, pues la construcción de suma iterada, multiplicación de naturales y con fracciones son contenidos necesarios que sirven como antecedente para el tema de división y multiplicación con fracciones, y a su vez, todo lo anterior coadyuva a la idea de que la construcción de nuevos saberes retoma conocimientos previos que serán reforzados y profundizados en el proceso continuo de construcción de éstos (Ma, 2010). Pero ¿cómo podrían ejemplificarse las conexiones de simplicación bajo las premisas de Ma, (2010)?

Para poder analizarlas (vease la Ilustración 3), es necesario retomar la idea de que el tema tiene su génesis, de forma natural (Llinares y Sánchez, 1997), desde el trabajo mismo con naturales, transitando desde la suma iterada, multiplicación, concepto de fracción, equivalencias, sumas con igual y diferente denominador, lo que permite trabajar la noción de fracción por natural,  previmente a la multiplicación de fracción por fracción.

Finalmente, el KoT puede observarse cuando en la lección recuperan los racionales en su expresión como fracción que será multiplicado por un natural, así se busca extender el concepto de multiplicación con naturales, en cuanto se dice N veces una fracción; para ello se retoman distintos registros de representación, por ejemplo al descomponer una fracción impropia en fracciones unitarias, = m2 + , es 5 veces m2) y suma de fracciones con igual denominador y su conversión de fracción impropia a mixta ( + = 3 ) donde cada cuarto representa un azulejo de 250 cm2. De igual forma al recuperar racional por natural, el multiplicador está expresando la cantidad de azulejo en fracción impropia (), el multiplicando expresa el número de horas (3) y el producto se manifiesta en expresado en fracción impropia ()

## Análisis a posteriori: Evidencias del MTSK.

En la puesta en práctica de la lección, identificamos primeramente una serie de fases en la sesión, comenzando con su entrega a los alumnos donde ellos se responsabilizan al intentar responderla en grupos de tres integrantes, posteriormente notamos que el docente se acerca a los equipos de trabajo con la finalidad de orientar y cuestionar, mas no de explicar el tema, buscando que reflexionen por su cuenta; después selecciona varios procedimientos para que sean expuestos ante el resto de los alumnos:

149. Aa: sumamos esto 3 veces y nos salía 15/4 y luego…

150. Mo: a ver pausa, dijiste que sumaste 5/4 tres veces ¿Por qué?

151. Aa: porque primero antes de eso yo ya había hecho 4 x 3 y nos había salido 12 y yo dije que para verificar si era, lo íbamos a sumar 3 veces, pero nos salió 15 entonces ahí fue cuando nos dimos cuenta que se multiplicaban estos dos y éste se dejaba igual.

152. //la alumna señala primero los numeradores y al final el denominador//

153. Aa: luego multiplicamos 5 x 3 igual a 15 y el 4 lo pasamos igual

154. Mo: a ver puedes escribir eso que dijeron ahorita de que sumaron 5/4 tres veces.

155. //empiezan a escribir en el pizarrón 5/4 + 5/4 + 5/4= 15/4//

156. Mo: pregunta, ¿es lo mismo sumar 5/4 + 5/4 + 5/4 que multiplicar 5/4 x 3?

158. A Aos: si

159. Mo: ¿Por qué sí, por qué es lo mismo?

160. //un alumno levanta la mano//

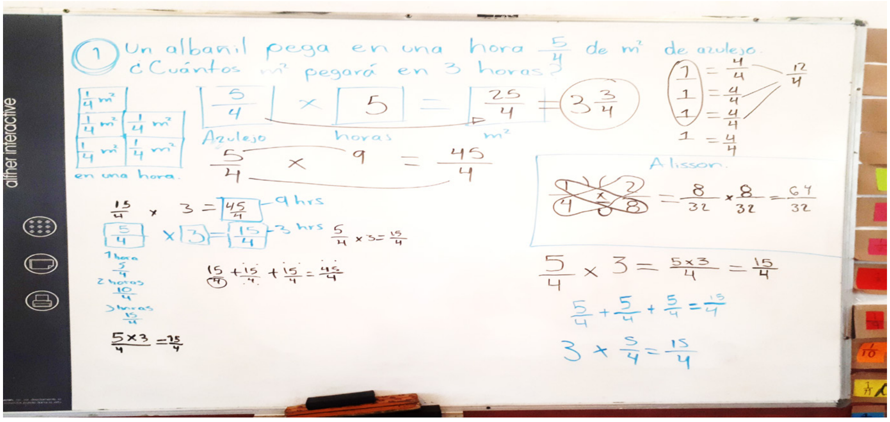
161. Mo: a ver Cristóbal

162. Ao: porque como son 5 x 3 van a salir 15 y luego en el otro nada más lo vamos a sumar y nos va a salir también 15 y 4 va a ser lo de abajo.

Nótese que, aunque durante el desarrollo de la sesión aparecieron procedimientos distintos, cuando se expone el relacionado con la conexión de simplificación (línea 149) por parte de los alumnos, el docente interviene para solicitar que sea explicitado y reforzado dicho razonamiento (línea 150), y al explicarse (líneas 151) solicita se genere un registro de representación (líneas 154) que es conocido por el resto de estudiantes. Con lo anterior pretende que sus estudiantes creen conexiones y extiendan su conocimiento al de multiplicación de fracción por natural (ilustración 4).

Pero ¿qué le permite al profesor llevarlos por ese camino?, consideramos que influyen varios subdominios del MTSK en este sentido, primeramente, su KPM, influye porque al conocer los procesos asociados a la resolución de problemas, le permiten visualizar los conocimientos y procedimientos que ponen en juego sus estudiantes como un asunto preponderante para la construcción del saber que desea aprendan, también al solicitarles

**Ilustración 4**
**Procedimiento para multiplicar fracciones.**




se exponga, explique y profundice sobre ellos, pues denota que el docente tiene una "jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos" (Carrillo, Montes, Contreras, y Climent, 2017) al reconocer en la validación que emplea dichos procesos.

Pero lo anterior, aunado con el KMT del profesor permite potencializar los momentos y/o fases medulares de la sesión en las que interviene para orientar las discusiones (líneas 156), permitiendo una adecuada gestión del contenido al brindar espacio para que sean los alumnos quienes pongan en juego sus razonamientos; esta fase es denominada validación, en términos de la Teoría de las Situaciones didácticas Brousseau, (2007). Con ello se manifiesta una teoría que sustenta su enseñanza.

Con las explicaciones y reflexiones generadas brinda pauta para que el docente esté en condiciones de realizar una institucionalización (Brousseau, 2007), para profundizar y ampliar aquello que los estudiantes han construido en la fase de validación y sigue formando parte del KMT en cuanto a una teoría que sustenta su enseñanza, además consideramos que es el detonante de su KoT:

204. Mo: aquí dijimos que es lo mismo sumar 5/4 + 5/4 + 5/4 igual a multiplicar 5/4 x 3 igual a 15/4 o si los cambiamos también nos saldría 15/4 (...)

212. Mo: 15/4 bueno en realidad una forma que podemos hacer para multiplicar una fracción por un número entero es multiplicar el numerador por el número entero poner el resultado como numerador luego al denominador solamente lo vamos a pasar a ser denominador en el resultado. (...)

237. Mo: si tengo 12/4 en tres enteros y acá tengo 15...

240. //el maestro escribe 15/4 = 3 3/4// (...)

243. Mo: lo convierto de una fracción propia a una fracción... fracción mixta, porque tiene enteros y una fracción propia...

Se observa que el docente manifiesta el KoT, en cuanto a la categoría de definiciones, propiedades y sus fundamentos, al evidenciar la propiedad conmutativa de la multiplicación (línea 204), al mismo tiempo está profundizando el conocimiento al extender la idea de conmutatividad con naturales (idea que los alumnos hasta el momento tienen) con la idea de conmutatividad con fracciones por naturales (Ilustración 5)

Más adelante, puede apreciarse que el KoT del profesor en su categoría de procedimientos se manifiesta al explicitar la forma de realizar el algoritmo convencional de fracción por natural (líneas 212) pues, Vasco, Moriel, y Contreras, (2017) mencionan que tiene que ver con "¿Cómo se hace?, referido al conocimiento que tiene el profesor sobre los

**Ilustración 5**

**Registros de representación y conmutatividad.**

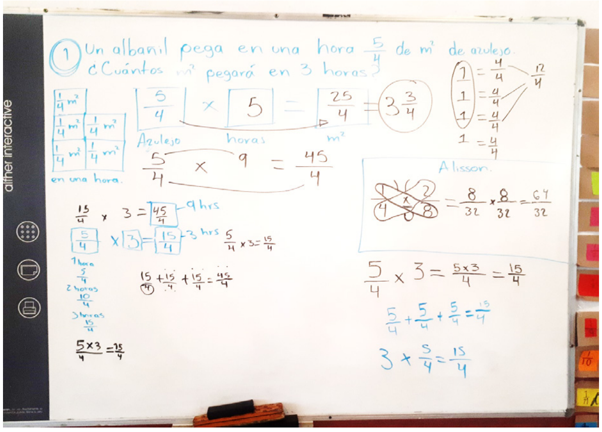
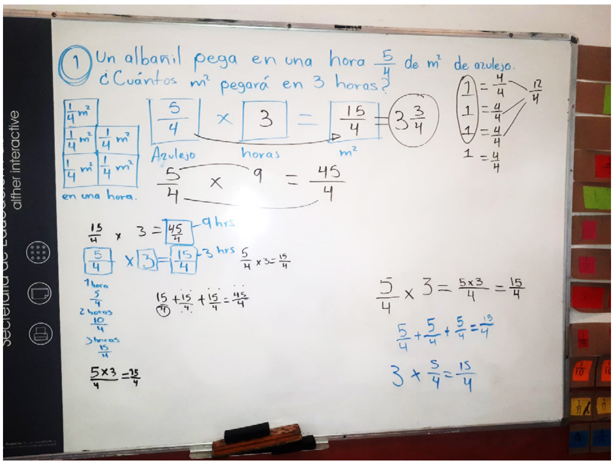



**Ilustración 6**

**Conversión de una fracción impropia a una mixta.**




algoritmos convencionales" (pág. 30). En cuanto a definiciones al hablar de fracciones el profesor utiliza términos como "numerador y denominador" que brinda apertura para que los alumnos las sustituyan por el de arriba y el de abajo respectivamente.

Por último, el docente propicia la generación de registros de representación (Ilustración 6) siendo parte del KoT, al convertir una fracción impropia expresada en cuartos a fracción mixta (líneas 237, 240 y 243) de forma que además de extender lo que los alumnos han construido, permite profundizar en el tema.

## Conclusiones

Ante lo complejo que resulta el trabajo de los racionales en la escuela primaria y la ruptura conceptual que los alumnos deben construir entre el funcionamiento con naturales y racionales, cobra gran relevancia el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, incluso desde antes del acto de enseñar. En este sentido, el KoT, el KFLM y KMLS le permitieron proponer una lección de trabajo acorde y congruente con los conocimientos previos de sus estudiantes, de la misma forma que su KSM le permitió establecer conexiones de simplificación al lograr extender el conocimiento de multiplicación con naturales y suma de fracciones con igual denominador, hacia la multiplicación de fracciones.

Lo anterior, aunado con su KMT expresado a partir del manejo de la TSD como teoría que sustenta su enseñanza le permiten potencializar mediante la fase de validación e institucionalización su KoT, para profundizar en cuanto a conmutatividad, generación de registros de representación, procedimientos y definiciones en el tema de multiplicación de fracciones.

## Bibliografía


Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas .* Buenos Aires: Libros del zorzal .

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L., y Climent, N. (2017). El conocimiento del profesor desde una perspectiva basada en su especialización: MTSK. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 22*, 185-205.

Escudero-Ávila, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria.* Huelva: Universidad de Huelva (tésis de doctorado inédita).

Flores-Medrano, E., & Aguilar-Gonzáles, A. (2017). Profundizando en el Conocimiento de la Práctica Matemática. En J. Carrillo, y L. Contreras, *Avances, utilidades y retos del odelo MTSK* (págs. 38-47). Huelva, España: CG.SE.

Itzcovich, H. (2007). El trabajo escolar en torno a las fracciones. En H. Itzcovich, *La Matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula* (págs. 131-168). Buenos Aires: Aique.

Llinares, S., y Sánchez, V. (1997). *Fracciones. La relación parte-todo.* Madrid: Editorial Síntesis.

Ma, L. (2010). *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales.* Santiago de Chile: Academia Chilena de Ciencias.

Marín, A., y Lupiáñez, J. (2005). *Principios y esténdares para la educación matemática: Una visión de las matemáticas escolares.* Granada: S.A.E.M Thales (traducción al Castellano por la sociedad Thales).

Montes, M., Contreras, L., y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, y N. Climent, *Investigación en Educación Matemática VII* (págs. 403-410). Bilbao: SEIEM.

SEP. (2011). *Programa de estudio 2011. Guia para el maestro.* México: SEP.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos.* España: Morata.

Vasco, D., Moriel, J., y Contreras, L. (2017). Subdominios del mathematics teacher’s specialised knowledge (MTSK) KOT y KSM: definición, categorías y ejemplos. En Y. Carrillo, y L. Contreras, *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK* (págs. 29-37). Huelva: CGSE.

# MTSK y formación docente continua: explorando horizontes de posibilidades

Eugenio Lizarde

## Resumen

En el marco de las discusiones actuales sobre la formación docente continua y la necesidad de un modelo claro de formación matemática para los profesores de educación preescolar y primaria (profesores generalistas), en esta comunicación presentamos los avances que hemos tenido en el desarrollo del curso "Números racionales: procesos y prácticas en la construcción del MTSK" como parte de la maestría profesionalizante que trabajamos en la Escuela Normal. Resaltamos la importancia del uso del modelo MTSK en una doble dimensión: para el autoanálisis de la práctica de los profesores/estudiantes (estudio intrínseco) y como marco para el diseño de tareas formativas-profesionalizantes (resolución e invención de problemas, elaboración de paquetes de conocimiento y diseño, aplicación y análisis de lecciones, con la fundamentación teórica que les subyace).

## Palabras clave

Conocimiento especializado, formación docente continua, didáctica, matemáticas

## Abstract

Within the framework of the current discussions on continuing teacher training and the need for a mathematical training model for preschool and primary education teachers (general professors), in this communication we present the progress that we have made in the development of the course "Rational numbers: processes and practices in the construction of the MTSK" as part of the professional mastery that we work in the teacher training college. We emphasize the importance of the use of the model MTSK in a double dimension: for the self-analysis of the practice of the professors/students (intrinsic study) and as a framework for the design of training-professional tasks (resolution and invention of problems, elaboration of knowledge packages and design, application and analysis of lessons, with the theoretical foundation underlying them).

## Keywords

Specialized knowledge, continuous teaching training, didactics, mathematics

Lizarde, E. (2019). CMTSK y formación docente continua: explorando horizontes de posibilidades. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (158-166). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Introducción

Desde la conformación del modelo MTSK (Carrillo, y otros, 2014) se han precisado varias cuestiones que lo definen, de entre ellas quiero resaltar las siguientes: a) Es un modelo que en esencia surge de la "elucubración teórica" y del análisis crítico-profundo de lo que otros modelos de conocimiento del profesor han planteado; b) El centro de énfasis es el conocimiento del profesor pero en específico lo relacionado con el saber matemático (sin desconocer otros saberes: psicopedagógico, por ejemplo, pero de ello no se ocupa el modelo); c) Por conocimiento especializado se entiende el conocimiento que es específico del profesor, en tal sentido, todo el conocimiento que organiza el modelo MTSK es especializado para el profesor de matemáticas, en tanto cobra sentido para su labor profesional; d) Es un modelo analítico explicativo (útil en esencia para la investigación (Carrillo, y otros, 2013)) que nos permite evidenciar la manifestación del conocimiento de los profesores de matemáticas, al ofrecer una serie de categorías amplias pero específicas para analizar de manera profunda, unidades de conocimiento de naturaleza distinta.

La propia definición del modelo le confiere una génesis específica, sin embargo ello se ha ido transformando sobre todo desde la misma utilidad que sus usuarios le van encontrando, de tal manera que, sin perder de vista su intención primaria, en la medida en que se aportan evidencias concretas de lo que acontece en los salones de clase, en diferentes niveles educativos (infantil, primaria, secundaria, bachillerato, formación de profesores, universidad), se va apreciando la necesidad de darle uso al modelo ya no sólo para la investigación, sino también para el diseño de propuestas de formación tanto inicial como permanente (Lizarde, Hernández, y Zúñiga, 2017) (Ramírez, Joglar, y Muñoz-Catalán, 2017) (Quiroga & Gamboa, 2017); coincidimos ampliamente con ello sobre todo porque como nos ha dicho Zemelman.

La cuestión es determinar si el conocimiento se restringe a la simple descripción, por histórica y crítica que sea, o bien se despliega para abarcar desafíos de construcción, en cuanto a potenciar la realidad en una dirección valórica u otra. Ello supone resolver lo que es potenciable de manera de pasar de la simple constatación, a la construcción de lo que resulte contextualmente viable (Retamozo, 2013, pág. 4).

"Potenciación", transformación microgenética que permita incidir en las prácticas formativas y en una nueva cultura matemática es lo que nos guía en la intencionalidad de uso del modelo MTSK y lo que a la vez nos está permitiendo diseñar, evaluar y concretar una propuesta formativa para los profesores en servicio, expuesta en un programa de posgrado profesionalizante con énfasis en la construcción del conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas en la escuela primaria.

## Contexto y necesidades formativas

En México, desde la reforma educativa del gobierno peñista (2012 – 2018), se revitalizó la discusión en torno a qué conocimientos debe tener el profesional de la enseñanza, sobre todo a partir de las declaraciones de que "cualquiera puede enseñar"; este dilema se sigue generando ahora con un nuevo rostro, el gobierno de la república (2018 – 2024) ha encontrado una decisión salomónica: si los egresados de universidades (titulados de carreras afines a la docencia) quieren dedicarse a la enseñanza deben recibir formación pedagógica, de igual manera, es necesaria mayor formación disciplinaria en los maestros normalistas. Sin embargo, las primeras señales al respecto no son muy alentadoras; desde una revisión que hemos realizado a los programas de matemáticas para la formación inicial de profesores (SEP, 2018) encontramos que siguen sin concretar un modelo claro para la formación matemática, sin considerar los diferentes componentes que ésta debe tener, es decir, se han generado efectos pendulares entre un enfoque formativo propio de las “Situaciones didácticas” y un enfoque generalista por competencias (Lizarde, 2019), pero sin que medie un modelo específico para la formación en cada campo del saber, apreciándose ausencias (por ejemplo en el análisis de la estructura del saber -KSM, en la terminología del MTSK) que difícilmente se atienden por los formadores de profesores.

Ante estas evidencias que se han percibido, desde el ciclo escolar 2017-2018 se nos autorizó el diseño de una maestría profesionalizante para maestros en servicio, con el enfoque MTSK. ¿Qué elementos consideramos en su diseño? ¿Cuál es el enfoque y la visión que planteamos?

De manera general, la malla curricular que se ha propuesto en la maestría se presenta en la Figura 1; como apreciamos, el énfasis principal en la aplicación del MTSK lo tenemos en la línea de saberes especializados, fundamentalmente en el campo de las matemáticas; la explicación del porqué resulta simple, ello obedece al campo de conocimientos y experiencias de los coordinadores de los cursos; dado que todos somos usuarios del modelo, su estudio y nuestras comprensiones de ello derivadas orientan las hipótesis de construcción de las actividades y tareas para su concreción.

### Figura 1

### Malla curricular “Maestría en docencia para la educación básica. La construcción del conocimiento especializado: matemáticas y español”

| **Línea de formación** | **1er semestre** | | | **2º semestre** | | | **3er semestre** | | | **4º semestre** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Metodológica** | Investigación educativa I. | | | Investigación educativa II. | | | Metodología de la investigación | | | Seminario de Tesis. | | |
| | HBCA[1]: 2 | HTI: 3 | Créditos: 5 | HBCA: 2 | HTI: 3 | Créditos: 5 | HBCA: 2 | HTI: 3 | Créditos: 5 | HBCA: 2 | HTI: 3 | Créditos: 5 |
| **Saberes especializados** | MTSK: Número y operaciones básicas | | | Números racionales: procesos y prácticas en la construcción del MTSK | | | MTSK: geometría y medición | | | Pensamiento variacional y estocástico. | | |
| | HBCA: 4 | HTI: 3 | Créditos: 7 | HBCA: 4 | HTI: 3 | Créditos: 7 | HBCA: 4 | HTI: 3 | Créditos: 7 | HBCA: 4 | HTI: 3 | Créditos: 7 |
| | El lenguaje como fenómeno lingüístico, comunicativo y social | | | Procesos, enfoques, recursos y estrategias didácticas en el desarrollo de la alfabetización inicial. | | | Literacidad I: Procesos lectores y metacognitivos | | | Literacidad II: Los procesos básicos en la producción de textos escritos | | |
| | HBCA: 4 | HTI: 3 | Créditos: 7 | HBCA: 4 | HTI: 3 | Créditos: 7 | HBCA: 4 | HTI: 3 | Créditos: 7 | HBCA: 4 | HTI: 3 | Créditos: 7 |
| **Habilidades docentes transversales** | La aplicación de las TIC en la gestión escolar | | | Ambientes de aprendizaje mediados por las TIC | | | Procesamiento Cuantitativo y Cualitativo con el apoyo de recursos tecnológicos | | | Producción de textos académicos | | |
| | HBCA: 2 | HTI: 1 | Créditos: 3 | HBCA: 2 | HTI: 1 | Créditos: 3 | HBCA: 2 | HTI: 1 | Créditos: 3 | HBCA: 2 | HTI: 1 | Créditos: 3 |
| Subtotal | 12x16=192 | 10x16=160 | 22 | 12x16=192 | 10x16=160 | 22 | 12x16=192 | 10x16=160 | 22 | 12x16=192 | 10x16=160 | 22 |

En primer lugar, hemos de decir que un principio básico que la guía es la idea de que el profesor debe ser el centro de la atención si queremos lograr una transformación en su conocimiento; de manera explícita en el programa de maestría lo concebimos de la siguiente manera:

cuando hablamos del profesor como centro, lo asumimos en una doble dimensión: 1o Como sujeto que se forma institucionalmente en el programa de maestría, lo cual le ubica en una posición de aprendiz, a la vez que potencia su mirada como diseñador de situaciones didácticas para contribuir a la solución de los problemas de enseñanza previamente identificados en su práctica profesional y, 2º Como profesional comprometido quien debe potenciar los aprendizajes de otros, en este caso sus alumnos, quienes a su vez se colocan en el centro del debate educativo.

De igual manera, si el centro de la atención es el profesor como aprendiz, también recuperamos como una necesidad la resolución de los “problemas de enseñanza” que desde su ámbito profesional se le presentan, de tal manera que él los reconozca, los analice y diseñe alternativas didácticas para su atención. En este momento cobra sentido el papel de los formadores, sobre todo con una definición importante: asumimos que el estilo de hacer docencia debe ser el de un “maestro devolviente” (Lizarde, Hernández, y Zúñiga, 2017) pensado para provocar el compromiso de los estudiantes en su proceso formativo a través del diseño de actividades que anclen en sus expectativas formativas y contribuyan a la resolución de preguntas que ellos mismos formulan ante la búsqueda de alternativas de solución a los problemas de enseñanza que cotidianamente enfrentan.

Con estas ideas, el objetivo general de la maestría quedó enunciado de la siguiente manera: “Formar profesionales de la educación básica con un conocimiento especializado en dos campos del saber fundamentales: español y matemáticas, capaces de lograr un desempeño competente en su práctica docente, y con herramientas metodológicas de la investigación educativa que posibiliten su transformación, articulándolas con el diseño de recursos innovadores derivados de las propuestas de las TIC, para contribuir a resolver las problemáticas educativas de la región y del país”.

En el caso específico de los cursos de matemáticas, la intención principal la estamos poniendo en la idea de relacionar los dominios matemático y didáctico para resolver los problemas de enseñanza identificados en su práctica docente profesional dentro de los diferentes campos de las matemáticas: número y operaciones básicas, números racionales, geometría y medición y pensamiento variacional y estocástico, lo cual le permitirá construir su conocimiento especializado como profesor de matemáticas.

Evidentemente ello nos obliga al diseño de tareas para la construcción de los elementos de cada uno de los subdominios del MTSK, sobre todo porque, el desafío de la construcción de lo que es contextualmente viable pasa por nuestras propias concepciones y dominios de conocimiento, haciendo que ello se restrinja a las hipótesis de lo posible y lo pertinente, sin perder de vista las sugerencias específicas derivadas de las consideraciones del modelo MTSK.

## MTSK en acto. Algunos resultados a un año de implementación de la maestría.

La construcción de tareas formativas, con la intención de concretar los dominios y subdominios del MTSK, demanda una habilidad cuando menos en una triple dimensión: a) precisar el campo de conocimiento que cada subdominio plantea y delimitar lo que se puede abordar tanto en las sesiones de clase como de manera autónoma por los profesores/estudiantes; b) diseñar o seleccionar tareas congruentes para cubrir el subdominio que se quiere atender; y c) cuidar que la articulación entre tareas y actividades contribuya a la integración de los diferentes subdominios para la configuración del conocimiento especializado de los profesores que enseñarán matemáticas. En tanto la primera dimensión está teóricamente resuelta desde los planteamientos del modelo, excepto en la delimitación de lo que temporalmente podemos abordar, en los márgenes del desarrollo de la maestría; a continuación, vamos a ejemplificar la manera como hemos ido desarrollando las otras dos dimensiones, con evidencias y resultados desde su aplicación práctica.

### *Tipos de tareas formativas y su incidencia en la transformación de las concepciones y prácticas de los profesores.*

Considerando los planteamientos de (Smith y Stein, 1998) en el diseño de las tareas siempre hemos pensado en que éstas impliquen una alta demanda cognitiva, en la línea del "Doing Mathematics", de tal manera que al resolverlas y analizarlas se tome conciencia de que también pudieron haberse planteado con otro nivel de demanda cognitiva (Memorization, Procedures without Connections, Procedures with Connections), así como las consecuencias para su aprendizaje y enseñanza de cada forma de plantearla.

En tanto nuestro interés está puesto en la concreción de los dominios y subdominios del modelo MTSK, vamos a ejemplificarlos usando evidencias obtenidas del curso "Números racionales: procesos y prácticas en la construcción del MTSK", correspondiente al segundo semestre de la maestría.

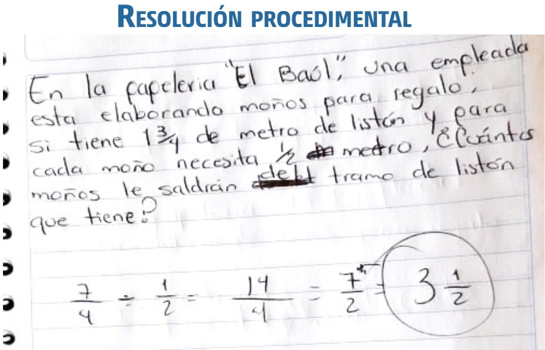
a) En las sesiones de clase: "haciendo matemáticas" con división de fracciones.

Una de las tareas que hemos visto que imprime cierta complejidad es la invención de problemas a partir de una expresión matemática; en este caso la consigna que se les planteó a los profesores fue que, a partir de la siguiente expresión matemática recuperada de Ma (2010, pág. 71) diseñaran un problema matemático que le diera sentido.

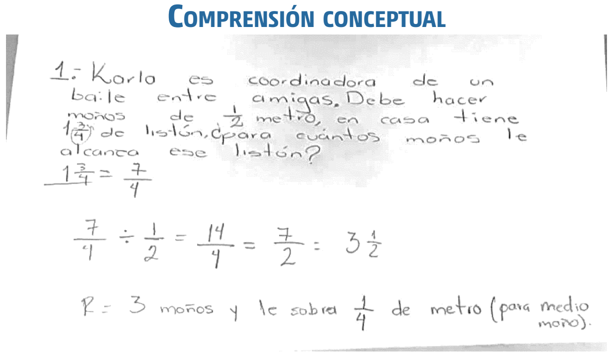
En un primer momento, para el diseño de los problemas, los profesores manifestaron su desconcierto y apreciaron las dificultades que implica, en tanto "la división por fracciones, la operación más complicada, con los números más complejos, se puede considerar un tema en la cima de la aritmética" (Ma, 2010, pág. 71); adicional a ello las decisiones a tomar tienen que ver con: KoT= saben/recuerdan cómo se resuelve una división de fracciones; KFLM= qué tipo de problema y contexto es factible en el diseño y cuáles problemas de aprendizaje puede generar; KMT= el profesor/estudiante resuelve problemas, en tal sentido en esta situación/clase de la maestría, se les está demandando que ellos sean diseñadores de problemas, con lo cual hay un giro conceptual en su rol en ese momento, pero se recupera su papel como docente y se le sitúa en la necesidad de resolver un problema de la enseñanza, es decir, el diseño y análisis de problemas matemáticos para la enseñanza.

Ante la situación planteada, lo que llama la atención es que prácticamente todos los profesores utilizaron el modelo "medida" (Ma, 2010) en el sentido de ¿Cuántos ½ metros hay en algo que mide 1 ¾ metros de largo?, a partir de contextos "cotidianos", por ejemplo, elaboración de moños, litros de jugo para llenar recipientes de ½ litro, terreno que se fracciona en lotes de ½ hectárea, pero sin salirse del mismo modelo medida en su planteamiento. Las dos producciones siguientes son ilustrativas al respecto; se incluyen ambas porque, aunque es prácticamente el mismo problema, en la producción 2 hay evidencia de una construcción mayor del significado del resultado, cuando afirma "3 moños y le sobra ¼ de metro (para medio moño)".

**Producción 1**
**Resolución procedimental**




**Producción 2**
**Comprensión conceptual**



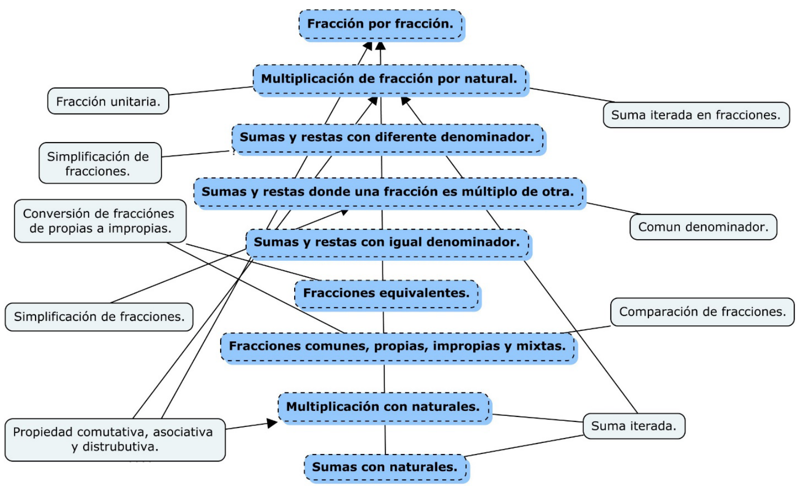
Posterior al diseño de los problemas se les pidió que leyeran el texto de (Ma, 2010), con la clara intencionalidad de "extender" sus conocimientos y analizar con profundidad los 3 modelos que ella propone para la división por fracciones, así como los diferentes procedimientos para resolverla (productos cruzados, multiplicar por su recíproco, común denominador, mantener el valor del cociente, etc.). El desarrollo de esta actividad contribuyó en la transformación de las concepciones y prácticas de los profesores sobre todo porque se avanza de la comprensión procedimental hacia la conceptual del tema y se reconoce la amplitud con que debe trabajarse al final de la escuela primaria.

b) Elaboración de mapas conceptuales síntesis del paquete de conocimientos.

Otra de las tareas que hemos observado que contribuye en la construcción del MTSK de los profesores, específicamente en el subdominio KSM, es la relativa a la elaboración de mapas conceptuales, en los cuales sintetizan el "paquete de conocimientos" (Ma, 2010) sobre diversos temas. Siguiendo con el tema de fracciones la Figura 2 es un ejemplo de cómo han logrado elaborarlos los profesores: en el centro se aprecian las conexiones de simplificación y complejización (según la dirección de la lectura). Al ser los primeros intentos aún requieren precisiones, por ejemplo, determinar las partes clave del proceso y definir su importancia para su tratamiento didáctico; el asunto es que aunque conectar un tema que se enseñará con temas relacionados puede ser la intención espontánea de cualquier educador, un paquete de conocimientos totalmente desarrollado y bien organizado acerca de un tema, es el resultado de un estudio deliberado y estamos en proceso de concretarlo (Véase Lizarde, 2016 y Ma, 2010; para una mayor explicación del proceso de su construcción).

**FIGURA 2**

**EJEMPLO DE "PAQUETE DE CONOCIMIENTOS"**




c) KMT, revisión teórica para fundamentar las decisiones que subyacen a su actuación práctica.

En los profesores en servicio no está arraigada la teorización como parte de su conocimiento especializado, ante ello y bajo la consideración de que "para tener una representación pedagógicamente poderosa de un tema, un profesor debe primero tener una comprensión exhaustiva de éste" (Ma, 2010, pág. 104), durante el desarrollo del curso de la maestría les hemos propuesto lecturas de diversos autores especializados en el tema (Freudhental, Kieren, Strefland, Llinares, Carrillo, Ma, Julia Centeno, Alicia Ávila, David Block, Brousseau, Fandiño, etc.); sin embargo, al estar incidiendo en la construcción de su KMT, lo que nos interesa no es tanto que hagan la lectura, consideramos más importante el uso de ella en dos dimensiones: la construcción de lecciones y planes de clase, así como su uso como "lentes conceptuales" que les permitan comprender lo que sucede en sus clases. En el siguiente apartado de esta comunicación abordaremos el uso de la teoría en el diseño de una lección de clase; el fragmento que recuperamos a continuación es un ejemplo de cómo una maestra de educación infantil (preescolar en la terminología de México) empieza a "naturalizar" conceptos para hablar sobre lo que acontece en su práctica docente e incluso recupera a un autor clásico en el tema de fracciones:

... Salvador Llinares Ciscar y Ma. Victoria Sánchez García (1997) proponen que el primer contacto puede ser intuitivo en los niños (relación parte-todo, medios, tercios), lo cual fue lo que se desarrolló en la sesión, (...) proponen también procesos básicos de repartir y dividir y situaciones donde los niños solucionen mediante la división, el ordenamiento y la medición. Aquí se obvia la importancia del trabajo con los paquetes de conocimiento, las propuestas de intervención pueden ser muy diversas, pero con el manejo de estos paquetes se puedan organizar y secuenciar la manera en la que se va desarrollando el tema con los alumnos y de esta manera tener resultados óptimos. (Fragmento del ensayo de análisis de GC[1])

## Diseño y análisis de lecciones como estrategia de reconocimiento del MTSK construido.

En la medida que sostenemos un enfoque de la maestría, centrado en la construcción de alternativas de solución a "problemas de enseñanza" que los profesores enfrentan en su práctica profesional, una tarea que hemos planteado para avanzar en la construcción del MTSK, es el diseño de lecciones, su aplicación y posterior análisis.

El proceso de desarrollo de esta tarea es el siguiente: a) El formador de profesores diseña una lección para trabajar la interpretación parte-todo de las fracciones; se resuelve en clase y se analiza su estructura y la claridad de los planteamientos; b) A partir de lo anterior, cada profesor hace un diseño de lección poniendo en juego los diferentes subdominios del MTSK, cuidando que sea congruente con su grado escolar en que trabaja (bajo la consideración que será aplicada y analizada) y con un contenido elegido en función de algún problema de enseñanza que se le haya presentado (por ejemplo, quienes trabajan con 6º grado de primaria eligieron multiplicación de fracciones); c) Se hace un análisis entre pares (con la orientación del formador) del diseño elaborado, se plantean sugerencias de correcciones y se rediseña la lección; d) En un momento oportuno se aplica en su grupo de trabajo y se hace una videograbación de la clase; e) elaboran un análisis de la clase grabada, usando como marco conceptual el MTSK, valoran sus resultados y detectan nuevos problemas de enseñanza que serán analizados en sesiones de la maestría, para estar en condiciones de hacer nuevos diseños de clase que permitan atender las problemáticas identificadas.

En las ilustraciones 1 y 2 recuperamos la lección diseñada por "MME" y algunos fragmentos del análisis que él mismo realizó, como evidencia del tipo de comprensiones que paulatinamente van desarrollando nuestros estudiantes de la maestría.

## Conclusiones

El diseño y selección de tareas específicas para la construcción del MTSK en un programa de maestría profesionalizante cobra sentido en la medida en que la gestión del formador logra devolver la responsabilidad a los estudiantes y ellos se comprometen en

1 Usamos las letras GC o MME (en los siguientes párrafos) para identificar a los profesores de los cuales recuperamos evidencias o producciones

**Ilustración 1**
**Lección diseñada**

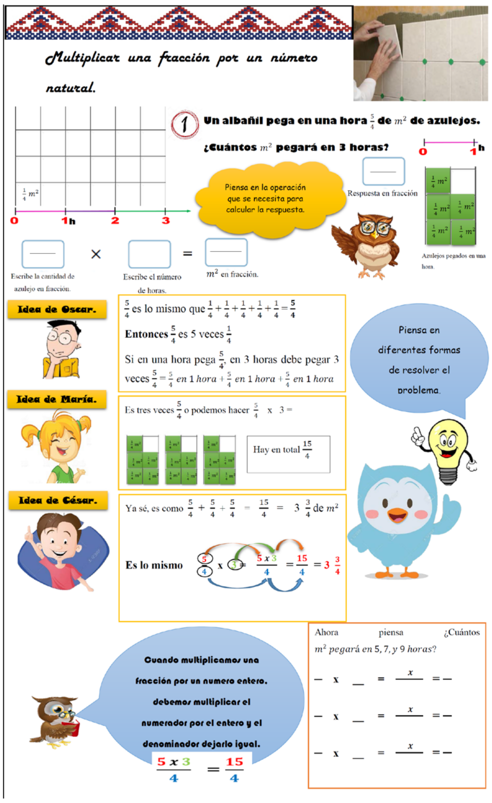
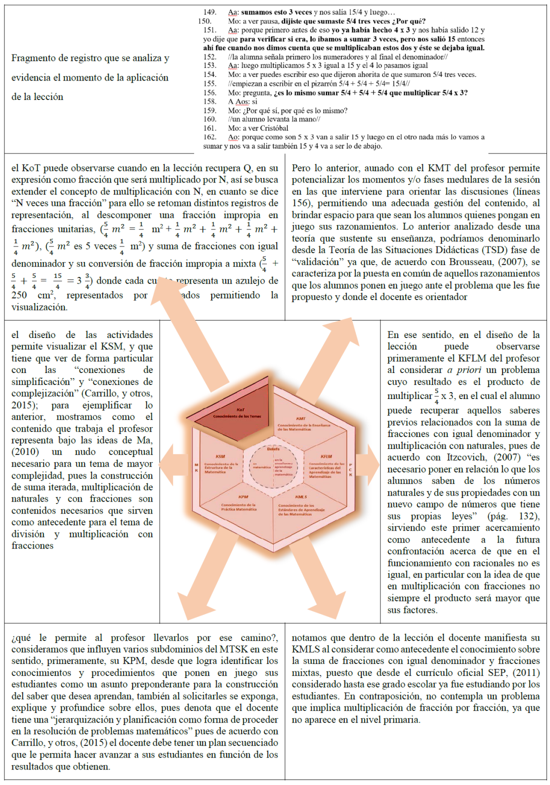



**Ilustración 2**
**Fragmentos de análisis**



su realización; las evidencias que hemos presentado dan cuenta de algunos momentos que consideramos coyunturales en la construcción del MTSK: comprensión exhaustiva y dominio conceptual del tema al resolver tareas matemáticas y diseñar problemas a partir de una expresión matemática (KoT); elaboración de paquetes de conocimiento (KSM y KMLS); fundamentación teórica (nutre al KMT); diseño, aplicación y análisis de lecciones (articulación de todos los subdominios y uso del MTSK como modelo analítico para el autoreconocimiento de los avances en su concreción). El camino empieza a trazarse como un horizonte aún en exploración, sin embargo las evidencias concretas en cada sesión de clase, por ejemplo cuando escuchamos expresiones del tipo “la elaboración de paquetes de conocimiento me permite tener mayor claridad de qué hacer en mis clases” o “no sabía que había tantos significados y formas de hacer en este campo de las fracciones” e incluso “creo que nuestras prácticas se parecen más a las de los norteamericanos que a las de los chinos (como reflexión ante la lectura de Liping Ma)”, nos indican que hay un avance en el reconocimiento de la necesidad del cambio, pero sobre todo que la discusión informada a partir del marco teórico MTSK (su estudio intrínseco y su utilidad analítica-investigativa) comienzan a incidir en los escenarios microgenéticos con potencialidad de transformación sociogenética.

## Referencias

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., y Montes, M. Á. (2014). Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Huelva: Universidad de Huelva publicaciones.

Carrillo, J., Flores, E., Climent, N., Contreras, L., Aguilar, Á., Escudero, D., y Montes, M. (2013). Investigación sobre el profesor de matemáticas en la Universidad de Huelva

(España). En C. Dolores Flores, M. García González, J. Hernández, y L. Sosa, Matemática educativa. La formación de profesores (págs. 97-112). México: Díaz de Santos.
Lizarde, E. (2016). La construcción del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) desde el escenario normalista. Entre maestros 16 (57), 82 - 93.
Lizarde, E. (2019). Análisis de los planes de estudio (1997, 2012 y 2018) para la formación docente inicial en México desde el modelo MTSK. Conferencia interamericana de educación matemática (págs. 1-8). Medellín: (en prensa).
Lizarde, E., Hernández, F., y Zúñiga, J. (2017). “Maestro devolviente”: La gestión didáctica en la construcción del MTSK de los docentes en formación. Memoria electrónica del congreso nacional de investigación educativa, 1-14.
Ma, L. (2010). Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales. La comprensión de las matemáticas fundamentales que tienen los profesores en China y los EE.UU. Chile: Academia chilena de ciencias.
Quiroga, F., & Gamboa, M. (2017). Contribución del MTSK en la elaboración del plan de formación de profesores de matemática. En J. Carrillo, y L. Contreras, Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III jornadas del seminario de investigación de didáctica de la matemática de la Universidad de Huelva (págs. 125-130). Huelva: CGSE.
Ramírez, M., Joglar, N., y Muñoz-Catalán, M. (2017). Una propuesta colaborativa para enriquecer la formación matemática inicial y continua de maestros de infantil. En J. Carrillo, y L. Contreras, Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del seminario de investigación en didáctica de la matemáica de la Universidad de Huelva (págs. 102-107). Huelva: CG. SE.
Retamozo, M. (2013). Los horizontes de Hugo Zemelman. Revista Latinoamericana de metodología de las ciencias sociales 3(2), 1-3.
Smith, M. S., y Stein, M. K. (1998). Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. Mathematics Teaching in the Middle School 3, 344-350.

# Apuntando influencias del dominio afectivo en el MTSK. Una ejemplificación con KMT

Mª. Isabel Pascual
José Marbán
Ana Maroto
Joaquín Fernández-Gago
María García

## Resumen

Uno de los retos planteados en la agenda del SIDM es el estudio del dominio afectivo como parte del MTSK del profesor de matemáticas, debido a que hacerlo permitirá comprender su conocimiento y su actividad docente con mayor profundidad. El objetivo de nuestra investigación es el de identificar, a través de un sencillo análisis documental, posibles puntos de conexión entre los dominios de conocimiento matemático y didáctico con los distintos componentes del dominio afectivo. Para ello, proponemos la reorganización del núcleo de las creencias dentro del modelo con base en los aportes que se hacen desde el campo de los afectos y mostramos, a modo de ejemplo, una propuesta de relaciones con el subdominio de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT).

## Palabras clave

Dominio afectivo, MTSK, profesor, matemáticas.

## Abstract

One of the challenges on the agenda of the SIDM has been the study of the affective domain as part of the MTSK of the mathematics teacher, because doing so will allow us to understand their knowledge and their teaching activity in greater depth. The objective of our research is to identify by means of a simple document analysis potential points of connection between the domains of mathematical and didactic knowledge with the different components of the affective domain. For this, we propose the reorganization of the core of the beliefs within the model based on the contributions made from the affect field and we show, as an example, a proposal of relations with the knowledge subdomain of the teaching of the Math (KMT).

## Keywords

Affective domain, MTSK, teacher, mathematics.

Pascual, Mª. I., Marbán, J., Maroto, A., Fernández-Gago, J. y García Mª. (2019). Apuntando influencias del dominio afectivo en el MTSK. Una ejemplificación con KMT. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (167-174). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Introducción

Los trabajos de las últimas décadas sobre el papel de los afectos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas nos ofrecen una visión poliédrica y compleja sobre la cuestión, tanto desde un punto de vista conceptual como aplicado. La relevancia de este tipo de investigaciones queda recogida por Hannula (2015, p. 269) al afirmar que:

> *En primer lugar, la investigación en afecto relacionado con educación matemática es relevante cuando se identifica cuáles de los muchos componentes afectivos del individuo son las más importantes que sustentan su visión de las matemáticas. Como educador, me encantaría saber qué conjunto de componentes afectivos es tal que, cuestionado y cambiado, produciría una reacción en cadena de cambios a largo plazo en la visión de la matemática de las personas. En segundo lugar, sería importante identificar cuáles de los componentes afectivos pueden ser cambiados y cómo.*

Por otra parte, el análisis de la práctica docente se ha focalizado, desde hace más de cuatro décadas con los trabajos de Shulman (1986, 1987), en el conocimiento que subyace a las decisiones que toma el profesor con respecto a la enseñanza de las matemáticas en distintos niveles educativos. De esta forma, numerosos grupos de investigación (Ball, Thames y Phelps, 2008; Carrillo et al., 2018; Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep, 2009; entre otros) han dirigido sus esfuerzos a estructurar el conocimiento del profesor desde la base diferenciadora del conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido.

Así, el estudio de los afectos y el estudio del conocimiento del profesor se han ido desarrollando en paralelo pero, a nuestro juicio, es aún necesario que encuentren sólidos puntos de encuentro. El objetivo de nuestro trabajo responde a esta problemática y pretendemos, tomando como referencia el dominio afectivo en el sentido planteado por McLeod (1992), realizar una primera aproximación a las potenciales relaciones entre las dimensiones del dominio afectivo y el conocimiento especializado del profesorado de matemáticas. Para ello, tomaremos como base las investigaciones que se han realizado hasta ahora relacionando MTSK y creencias (Aguilar, 2016), MTSK y emociones (García y Pascual, 2016) junto con una primera muestra dentro de la extensa producción de investigaciones en relación con los distintos componentes del Dominio Afectivo.

## El dominio afectivo en los procesos de enseñanza y aprendizaje

La preocupación por los afectos en matemáticas llevó a McLeod (1992) a presentar el constructo *dominio afectivo* como una amalgama compleja de actitudes, creencias, emociones y valores, considerando una estructura en la que las creencias son elementos que influyen para que surjan emociones y en la que las actitudes se originan por repetidas reacciones emocionales. Tomaremos dichas componentes como dimensiones de estudio para realizar una primera exploración documental que permita vislumbrar posibles relaciones entre estos y el conocimiento especializado.

En el caso de las creencias, sabemos que estas influyen significativamente en la toma de decisiones respecto de las intenciones curriculares. En particular, la inclusión de las concepciones y creencias en MTSK, establecida por Carrillo y otros (2018) como el núcleo central del modelo, se justifica por la contribución de estas a la comprensión de la filosofía que hay tras las actuaciones de los propios docentes.

Atendiendo a la dimensión actitudinal de McLeod (1992), diferentes autores, basándose en principios propios de la Psicología Social, coinciden en señalar la multidimensionalidad del constructo, como un modelo tripartito, según el cual la actitud tiene tres componentes: afectiva, cognitiva y de comportamiento. Esto, llevado al campo de la Educación Matemática, permite entender la actitud por medio de tres componentes: disposición emocional hacia las matemáticas, conjunto de creencias relacionadas con las matemáticas y comportamiento relacionado a las matemáticas. Un primer ejemplo clarificador de cómo la actitud de un profesor influye en los conocimientos que usa en el aula puede verse en Fennema (1989).

Finalmente, si tenemos en cuenta ahora las propuestas de diferentes investigadores que, como Daskalogianni y Simpson (2000), definen actitud hacia las matemáticas como un modelo de creencias y emociones asociadas con esta disciplina, resulta inevitable atender la tercera dimensión del dominio afectivo planteado por McLeod, la dimensión emocional. Según García, Pascual, Carrillo y Martínez (2019, p.2) la relevancia de la consideración de las emociones en el proceso de enseñanza radica en que "profesor y estudiantes, poseen una gran carga emocional que media sus interacciones e incide en el proceso del aprendizaje". Hasta el momento, se han evidenciado las emociones de los profesores y las causas que las desencadenan poniendo el énfasis en el conocimiento del profesor (Coppola, et al, 2012; García y Martínez, 2016).

## Relevancia de los afectos en la formación de maestros

En los nuevos marcos formativos vinculados a la labor docente, sobre todo en el caso de la formación inicial, no es frecuente encontrar propuestas que den cuenta de la inclusión de los aspectos afectivos, si bien sí puede afirmarse que, en los últimos años, han crecido notablemente el número de investigaciones que centran su atención en el dominio afectivo matemático y en el papel que este juega en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Jenßen, Dunekacke, Eid & Blömeke, 2015).

Las creencias y teorías de los futuros maestros sobre qué son y cómo se enseñan las matemáticas tienen una repercusión tanto en aspectos cognitivos como afectivos de sus alumnos y en la relación de estos con las matemáticas (Bailey, 2014); los futuros docentes, en el desarrollo de su profesión, no solo van a exponer el currículo oficial, sino que sus creencias y formas de entender qué son y cómo se enseñan las matemáticas van a estar vigentes en todo momento (Barrantes y Blanco, 2004). Si tenemos en cuenta que, en gran medida, se tiende a enseñar como se ha sido enseñado (Jacobs y Durandt, 2017), el periodo de formación inicial docente juega un papel claramente relevante en los procesos propios ligados a enseñar matemáticas. En concreto, estudiantes de matemáticas confirman que un elemento importante para su desarrollo académico ha sido la forma en que sus maestros los han apoyado emocional y afectivamente (Sakiz, Pape y Hoy, 2012). Este apoyo del profesorado determina la percepción de eficacia matemática del alumnado y su gusto por las matemáticas, siendo este último un motor de esfuerzo e, indirectamente, de rendimiento escolar o académico.

Profundizando en el terreno de las emociones matemáticas, es la ansiedad matemática (Hannula, Liljedahl, Kaasila, y Rösken, 2007) de los futuros maestros uno de los temas recurrentes en los últimos trabajos de investigación en el ámbito del dominio afectivo matemático. Así, son numerosos los estudios que han encontrado que la ansiedad matemática es un fenómeno común entre los futuros docentes (Boyd, Foster, Smith y Boyd, 2014). Además, se ha constatado la influencia negativa que esta tiene sobre las actitudes hacia las matemáticas y sobre la autopercepción de competencia para la docencia de las matemáticas (Giles, Byrd y Bendolph, 2016).

Son también numerosos los trabajos que señalan que los futuros docentes que manifiestan tener buenas actitudes hacia las matemáticas suelen hacerlo hacia su enseñanza (Young-Loveridge, 2010).

Todos estos trabajos son tan solo una pequeña muestra, aunque significativa, del importante papel que tienen los factores afectivos en el conocimiento y el ejercicio profesional docente. A través de ellos quedan ya reflejadas algunas de las relaciones que el dominio afectivo del profesor tiene con su forma íntima de entender el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

A tenor de lo expuesto anteriormente, es posible justificar, en cierta medida, el énfasis que debe hacerse en considerar intervenciones de aula que modifiquen o permitan que evolucionen en sentido positivo los afectos hacia las matemáticas de los docentes, en particular de aquellos en formación, aceptando que un adecuado programa puede tener este efecto sobre los distintos componentes del dominio afectivo (Leavy, Hourigan y Carroll, 2017). Algunos ejemplos que avalan las afirmaciones previas son el trabajo de An, Ma y Caparro (2011), quienes consiguieron mejorar las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a través de una experiencia basada en la integración de la música y las matemáticas.

## Situación actual del dominio afectivo en el MTSK

La influencia de los afectos en los procesos de enseñanza-aprendizaje, y en la forma en la que el profesor construye y desarrolla su conocimiento, hace que la reflexión sobre la confluencia de estos dos campos de investigación sea necesaria. En este sentido, el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Carrillo et al., 2018) contempla desde su origen la inclusión de un dominio de creencias que influyen en cada uno de los subdominios de conocimiento especializado del profesor.

Las creencias -en matemáticas y en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas- se entienden desde la diferenciación de Ponte (1994) en el sentido de que son consideradas parte del conocimiento y, en consonancia con la idea de Pajares (1992), en tanto que se caracterizan por su componente cognitiva, afectiva y conductual. Se conciben como verdades personales no contrastadas de forma empírica y que se presentan con diferente grado de convicción. Desde los trabajos de Carrillo (1996) y Climent (2002) se distinguen las creencias sobre las matemáticas escolares de las creencias sobre el aprendizaje. No obstante, en las investigaciones que se han realizado usando MTSK, el dominio de las creencias ha sido uno de los menos explorados, aunque se han hecho avances en identificar relaciones entre estas y los subdominios de conocimiento. En esta línea, Aguilar (2016), en su investigación sobre el conocimiento especializado de una maestra sobre clasificación de figuras planas, evidencia cómo sus creencias sobre las matemáticas escolares, por ejemplo, influyen en cómo son las matemáticas que presenta en su aula, desde una aproximación constructiva y dinámica. Los resultados de Aguilar (2016) se extienden más allá de la influencia de las creencias sobre la matemática, incluyendo aspectos relacionados con las creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje que no pretendemos sintetizar aquí; más que eso, señalamos su investigación como un paso adelante en los trabajos que se han realizado desde el MTSK y que lo acercan hacia uno de los constructos del dominio afectivo. Sin embargo, no ha ocurrido lo mismo con el resto de los constructos. Nuestro trabajo pretende dar un paso más en el objetivo de intentar relacionar las creencias, emociones y actitudes del profesor con su conocimiento especializado, todo ello desde un análisis particular de los afectos en un docente de educación secundaria y desde las reflexiones teóricas que presentamos a partir del análisis documental de una pequeña muestra de investigaciones relevantes para el objetivo marcado. El carácter especializado del conocimiento que se encuentra en la base del MTSK, afecta tangencialmente a la consideración de los afectos.

Así, hasta ahora, se han identificado las relaciones del MTSK con parte del dominio afectivo a partir de la influencia que ejercen las creencias en los subdominios de conocimiento, pero entendemos que no es el único nexo que podemos encontrar. Carrillo *et al.* (2018), en su descripción del modelo de conocimiento especializado, enuncian la categoría *aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas,* dentro del subdominio *conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)*. Nótese que, como parte de un subdominio de conocimiento, los autores se refieren al conocimiento que tiene el profesor sobre los aspectos emocionales (o bajo nuestra óptica, afectivos) que influyen en la forma en la que los estudiantes aprenden. En adelante nos referiremos a las relaciones entre dominio afectivo y el MTSK en la forma en la que este último permea e influye en los subdominios de conocimiento.

## Relaciones entre dominio afectivo y MTSK

La investigación de Aguilar, Muñoz-Catalán, Carrillo y Rodríguez (2018), pone de manifiesto que el estudio de la relación entre creencias y MTSK sirve para poder comprender de manera más completa el conocimiento especializado puesto en acción; los autores siguen la organización que hasta el momento ha tenido el dominio de las creencias en el modelo MTSK, diferenciando creencias sobre la metodología, sobre las matemáticas escolares, sobre el aprendizaje, sobre el papel del alumno y sobre el papel del maestro. Nosotros nos serviremos de esta organización y mostraremos ejemplos de relación de otros constructos con el *conocimiento para la enseñanza de la matemática (KMT).*

Por otro lado, García y Pascual (2017) documentan el caso de un profesor novel de matemáticas de secundaria que experimentaba emociones de congoja, miedo y estrés al impartir las clases. Las autoras reportan que la situación desencadenante de las emociones del profesor tenía origen en el *conocimiento de los temas* (KoT), lo que señaló un indicio de relaciones entre KoT y emociones. Además, en su investigación con el mismo profesor, García, Pascual, Carrillo y Martínez (en prensa) añaden la relación existente entre el *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT) y las emociones que experimentaba el profesor: la congoja y la satisfacción. En este sentido, encontramos que las emociones pueden modular el desarrollo del conocimiento de forma similar a como lo hacen las creencias.

El caso citado anteriormente y nuestra profundización teórica basada en el análisis documental sobre la relevancia de considerar el dominio afectivo en la formación de maestros, han servido como punto de partida a nuestras reflexiones sobre cómo la reestructuración del núcleo del modelo podría permitirnos comprender de forma más completa el conocimiento del profesor. En este trabajo, presentamos una aproximación a las posibles relaciones de influencia que se podrían dar entre las distintas dimensiones del dominio afectivo y el *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)* (Tabla 1).

Hemos asumido la organización actual de las creencias en el modelo y añadimos elementos propios de las actitudes y las emociones, desarrollados de manera concreta para facilitar la comprensión de las relaciones. De esta forma, por ejemplo, el *Interés por conocer técnicas que detecten ansiedad matemática e inseguridad en los alumnos, y por conocer teorías de enseñanza* que den respuesta, supone un ejemplo de cómo las actitudes del profesor pueden facilitar el desarrollo de su conocimiento, y no un indicador propio del dominio afectivo en el sentido de los que se han desarrollado hasta ahora.

**Tabla 1**
**Caracterización de posibles relaciones entre Dominio Afectivo y KMT.**

| | | |
|---|---|---|
| **Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)** | **Actitudes** | *Interés* **por conocer técnicas que detecten ansiedad matemática e inseguridad en los alumnos y por conocer teorías de enseñanza que den respuesta.**<br>*Gusto* **por proponer actividades matemáticas que aproximen las matemáticas al alumno evitando rechazo hacia ellas.** |
| | **Emociones** | *Alegría, satisfacción, orgullo*, **al tener conocimiento de recursos y materiales virtuales, de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.**<br>*Tristeza, decepción, miedo, auto-reproche*, **al no tener conocimiento de recursos y materiales virtuales, y no tener conocimiento de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.** |
| | **Creencias** | *Sobre la actividad del aula:* **iniciar con definiciones, ejemplificar y repetir ejercicios.**<br>*Sobre la interacción con los estudiantes:* **Los estudiantes deben estar atentos cuando se explica.**<br>*Sobre el uso de materiales manipulativos:* **Los juegos y materiales manipulativos despiertan el interés por aprender.**<br>*Sobre el cumplimiento del currículum:* **Vale más que se comprendan los temas a que se cumpla el temario del currículum.** |

## Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo ha sido establecer una primera aproximación teórica a posibles relaciones entre diferentes dimensiones del dominio afectivo y el MTSK, sirviéndonos de una aproximación experimental y documental ejemplificada para el caso del KMT. Los resultados, limitados en su alcance y grado de profundidad, sistematicidad y representatividad del análisis documental realizado, están sujetos a nuevas investigaciones que profundicen en el objetivo. En este sentido, se abren diferentes líneas de investigación, destacando la que permite identificar qué elementos del dominio afectivo pueden formar parte del modelo de conocimiento especializado, siendo determinantes en cada uno de los subdominios. En este sentido, un subdominio como el KFLM podría resultar un campo interesante para dar continuidad al trabajo iniciado. Asimismo, creemos que puede ser interesante considerar otros marcos teóricos que incluyan constructos como la motivación, así como enfoques teóricos con diferentes perspectivas sobre las actitudes o que incorporen distinciones claras y operativas entre sentimientos y emociones. En el caso de la motivación, esta podría conectarse con el modelo MTSK en varios sentidos, bien porque el binomio autonomía-pertenencia de un profesor puede hacerle acceder a un determinado conocimiento o no, o bien porque los cambios en la motivación de un profesor están relacionados con la adopción de nuevas metas y creencias asociadas a estas metas.

## Referencias


Aguilar, A. (2016). El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de figuras planas: Un estudio de casos. Tesis doctoral, Universidad de Huelva.

Aguilar, A., Muñoz-Catalán, C., Carrillo, J., y Rodríguez, J. L. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas? *PNA*, *13*(1), 41-61.

An, S. A., Ma, T., y Capraro, M. M. (2011). Preservice teachers' beliefs and attitude about teaching and learning mathematics through music: An intervention study. *School Science and Mathematics*, *111*(5), 236-248.

Bailey, J. (2014). Mathematical Investigations for Supporting Pre-service Primary Teachers Repeating a Mathematics Education Course. *Australian Journal of Teacher Education*, *39*(2), 86-100.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407.

Barrantes, M., y Blanco, L. J. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *22*(2), 241-250.

Boyd, W., Foster, A., Smith, J., y Boyd, W. E. (2014). Feeling Good about Teaching Mathematics: Addressing Anxiety amongst Pre-Service Teachers. *Creative Education*, *5*, 207-217.

Carrillo, J. (1996). Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones. Tesis doctoral, Universidad de Sevilla.

Carrillo, J.; Contreras, L.C.; Climent, N.; Escudero-Ávila, D.; Flores-Medrano, E. y Montes, M. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, P., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, C. (2018) The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model, *Research in Mathematics Education*, *20* (3), 236-253.

Climent, N. (2002). El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática: un estudio de caso. Tesis doctoral, Universidad de Huelva.

Coppola, C., Di Martino, P., Pacelli, T., y Sabena, C. (2012). Primary teachers' affect: A crucial variable in the teaching of mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *17*(3–4), 101–118.

Daskalogianni, K., y Simpson, A. (200). Towards a definition of attitude: The relationship between the affective and the cognitive in pre-university students. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), Actas del 24 PME, Vol. 2 (pp. 217-224) Japón.

Fennema, E. (1989). The Study of Affect and Mathematics: A Proposed Generic Model for Research. En D. B. McLeod y V. M. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving. A new perspective* (pp.205-219). New York: Springer-Verlag.

García, M., y Martínez, G. (2016). Emociones en profesores de matemáticas: un estudio exploratorio". En J. A Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 247-252). España: SEIEM.

García, M., Pascual, M. I., Carrillo, J., y Martínez, G. (en prensa). El MTSK y las emociones del profesor de matemáticas. En *Aportes en la investigación matemática basados en la investigación* (pp. 100-120). México. BUAP.

García-González, M. S., y Pascual, M. I. (2017). De la congoja a la satisfacción: el conocimiento emocional del profesor de matemáticas. *IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech*, 8(15), 133-148.

Giles, R. M., Byrd, K. O., y Bendolph, A. (2016). An investigation of elementary preservice teachers' self-efficacy for teaching mathematics. *Cogent Education*, *3*(1), 1-11.

Hannula, M. S., Liljedahl, P., Kaasila, R., y Rösken, B. (2007). Researching relief of mathematics anxiety among pre-service elementary school teachers. In J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. P. Park, & D.-Y. Seo (Eds.), *Proceedings of 31st Annual Conference for the PME*, vol. 1 (pp. 153–156). Seoul, Korea.

Hannula, M. S. (2015). The relevance of Affective Systems and Social Factors: A Commentary. Towards a Participatory Approach to "Beliefs" in Mathematics Education. In B. Pepin y B. Roesken-Winter (Eds.). *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics Education. Exploring a mosaic of relationsships and interactions*, 269-281. New York, Springer.

Jacobs, G. J., y Durandt, R. (2017). Attitudes of Pre-Service Mathematics Teachers towards Modelling: A South African Inquiry. *Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education*, *13*(1), 61-84.

Jenßen, L., Dunekacke, S., Eid, M., y Blömeke, S. (2015). The relationship of mathematical competence and mathematics anxiety: An application of latent state-trait theory. *Zeitschrift für Psychologie*, *223*, 31–38.

Leavy, A., Hourigan, M., y Carroll, C. (2017). Exploring the Impact of Reform Mathematics on Entry-Level Pre-Service Primary Teachers Attitudes towards Mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15* (3), 509-526.

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* 575-596. New York: Macmillan.

Pajares, F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62* (39), 307-332.

Ponte (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J.P. Ponte y J.F. Matos (Eds.), *Actas del PME 18*, Vol. 1 (pp. 195-210). Lisboa

Rowland, T.; Turner, F.; Thwaites, A., y Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching: Reflecting on practice with the knowledge quartet*. London: Sage.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, *57*(1), 1-23.

Sakiz, G., Pape, S. J., y Hoy, A. W. (2012). Does perceived teacher affective support matter for middle school students in mathematics classrooms? *Journal of School Psychology, 50*(2), 235-255.

Young-Loveridge, J. (2010). Two Decades of Mathematics Education Reform in New Zealand: What Impact on the Attitudes of Teacher Education Students? *Mathematics Education Research Group of Australasia*, *33*, 3-7.

# Um olhar para o conhecimento matemático e as crenças sobre demonstração de um formador de professores

Marieli V. R. de Almeida
Silvania Couto
Miguel Ribeiro
José Carrillo

## Resumo

Neste artigo discutimos o conhecimento de um matemático que atua como formador de professores de matemática em uma universidade brasileira, considerando a perspectiva do Mathematics Teachers' Specialized Knowledge, com foco no conhecimento matemático e nas crenças do sujeito no âmbito das demonstrações. As informações analisadas fazem parte de um estudo de caso e são provenientes de entrevistas e gravações de aulas do formador em uma disciplina de Teoria dos Números. Entre os resultados, foram obtidas evidências de conhecimento da prática matemática, conhecimento da estrutura matemática e crenças do formador acerca da matemática e seu ensino.

## Palavras-chave

Mathematics teachers' specialized knowledge, matemático, formador, crenças, demonstração.

## Abstract

In this article we discuss the knowledge revealed by a mathematician who acts as a mathematics teacher educator in a Brazilian university, considering the perspective of Mathematics Teachers' Specialized Knowledge, focusing on mathematical knowledge and beliefs on proof. The information analyzed is part of a case study and comes from interviews and audio recordings of the educator's classes. Among the results, we obtained evidences of knowledge of mathematical practice, knowledge of mathematical structure and beliefs of the mathematics teacher educator about mathematics and its teaching.

## Keywords

Mathematics teachers' specialized knowledge, mathematician, mathematics teacher educator, beliefs, demonstrations.

V. R. de Almeida, M., Couto, S., Ribeiro, M. y Carrillo, J. (2019). Um olhar para o conhecimento matemático e as crenças sobre demonstração de um formador de professores. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (175-181). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Introdução

No contexto brasileiro, historicamente os cursos de licenciatura em matemática priorizam os conteúdos matemáticos em detrimento da formação de professores para a educação básica (Gomes, 2016). Desde o início, a função principal desses cursos era a preparação de matemáticos, enquanto a formação de professores ficava em segundo plano (Dias, Lando, e Freire, 2012). Para se tornar professor de matemática o estudante devia obter o diploma de bacharel nos três primeiros anos de curso e depois cursar um ano de disciplinas didáticas, modelo de formação que ficou conhecido como 3+1 (Moreira, 2012).

Ainda hoje nas universidades brasileiras, o responsável pela formação matemática, tanto para os cursos de bacharelado quanto para os cursos de licenciatura, costuma ser o departamento de matemática, no qual geralmente trabalham matemáticos e outros profissionais formados em áreas afins. Considerando-se que todos os cursos de licenciatura em matemática brasileiros devem incluir disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Fundamentos de Análise, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Geometria e Geometria Analítica (Parecer CNE/CES 1.302/2001), é inevitável considerar o papel fundamental dos matemáticos na formação inicial de professores.

Por outro lado, pode ser considerado como formador de professores de matemática qualquer pessoa envolvida na educação ou desenvolvimento de professores de matemática (Beswick & Goos, 2018). Considerando a importância do formador na formação inicial e continuada do professor de matemática, bem como o crescente interesse evidenciado nas pesquisas recentes por essa temática, em particular, pelo conhecimento do formador de professores de matemática, consideramos esse conhecimento especializado na perspectiva do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK (Carrillo-Yáñez et al., 2018).

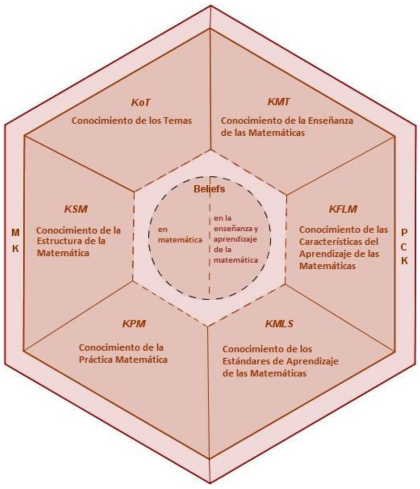
Nesse panorama buscamos discutir o conhecimento especializado de um matemático, que atua como formador de professores, em um curso de formação inicial de professores de matemática brasileiro. Em particular, buscamos compreender como o conhecimento matemático desse formador se relaciona com suas crenças.

## Referencial teórico e revisão de literatura

O MTSK é subdividido em três domínios, a saber, *Mathematical Knowledge*, *Pedagogical Content Knowledge* e *Beliefs* (Figura 1). No *Mathematical Knowledge* são considerados três subdomínios: *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) e *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM). Estes dois últimos subdomínios, em conjunto com as crenças do formador, serão nosso foco nesse artigo.

Considerando que no KPM o foco está mais no trabalho com a Matemática em si do que no processo de ensina-la (Carrillo-Yáñez et al., 2018) temos a hipótese de que esse subdomínio seja um ponto de partida interessante para a compreensão do conhecimento do formador que é também um matemático. O conhecimento do professor sobre essa prática

**FIGURA 1**
**MODELO MTSK**




inclui saber demonstrar, justificar, definir, fazer deduções e induções, fornecer exemplos e compreender o papel dos contra-exemplos.

No âmbito da prática matemática de demonstrar são consideradas as ideias de argumentação, justificação e validação, que possuem um mesmo caráter de convencimento (Flores-Medrano, 2016). Por sua vez, Delgado-Rebolledo e Zakaryan (2018) apontam indicadores do KPM de um professor universitário: conhecimento de formas de raciocinar, validar e proceder em matemática.

O KSM descreve o conhecimento do professor acerca de conexões entre itens matemáticos. Considerando a amplitude e profundidade do conhecimento do matemático, é esperado o estabelecimento de diversas conexões envolvendo conceitos matemáticos imbrincados nos cursos em que leciona. São consideradas nesse subdomínio conexões de simplificação, conexões de complexificação, conexões auxiliares e conexões transversais.

Por sua vez, as crenças podem ser entendidas como verdades pessoais, sustentadas individualmente e/ou coletivamente, derivadas da experiência ou do próprio pensamento, com um certo componente afetivo e valorativo, sobre o qual se pode ter diferentes graus de convicção (Montes, Carrillo, e Ribeiro, 2014).

A demonstração, por sua vez, é considerada um gênero do discurso matemático, um tipo de narrativa que deve respeitar convenções estabelecidas, e que geralmente inclui texto e pode empregar meios variados capazes de mediar visualmente as ideias matemáticas envolvidas (Cooper e Zaslavsky, 2017).

## METODOLOGIA

As informações aqui discutidas fazem parte de uma investigação mais ampla, que busca compreender o conhecimento especializado do formador de professores que ensina Teoria dos Números na licenciatura em Matemática. Para tanto, foi realizado um estudo de caso instrumental (Stake, 1995), com dois formadores, considerando gravações de aulas, entrevistas, planejamentos, avaliações e caderno de campo da pesquisadora.

Aqui apresentamos dados referentes a um desses sujeitos, Andre, graduado, mestre e doutor em matemática, com quatro anos de experiência, considerando uma entrevista inicial, realizada em março de 2018, no início do semestre letivo em que acompanhamos as aulas de Teoria dos Números desse formador. Foi realizada uma entrevista semiestruturada, contemplando questões que versaram sobre temas diversos, tais como a formação do sujeito, experiências, conhecimentos e crenças que pudessem influenciar sua prática na disciplina de Teoria dos Números. A entrevista individual é utilizada quando se deseja conhecer profundamente os significados e a visão do entrevistado, favorecendo a proximidade e por isso um maior controle da situação de entrevista por parte do pesquisador. Optou-se, nessa investigação, pela utilização de entrevista do tipo semiestruturada, na qual

> *[...] o pesquisador, pretendendo aprofundar-se sobre um fenômeno ou questão específica, organiza um roteiro de pontos a serem contemplados durante a entrevista, podendo de acordo com o desenvolvimento da entrevista, alterar a ordem dos mesmos e, inclusive, formular questões não previstas inicialmente. (Fiorentini e Lorenzato, 2006, p.121)*

As aulas de Andre foram acompanhadas pela pesquisadora durante todo o semestre e, assim como as entrevistas, foram gravadas em áudio para posterior transcrição. Nesse artigo, buscamos comparar informações obtidas na entrevista inicial e em uma das aulas de Andre, tendo por foco as demonstrações.

## Análise e discussão

Na entrevista inicial feita com Andre a prática matemática de demonstrar é abordada pelo sujeito em diversas passagens, por exemplo, ao discutir o que é uma demonstração e qual é o papel dela em suas aulas, ao discutir a possibilidade de abordar a demonstração de teoremas em uma prova oral, ao discutir o que significa dar a ideia de uma demonstração e quando fala sobre o papel das hipóteses em uma demonstração. No fragmento da entrevista a seguir Andre reflete sobre o que seria uma demonstração, evidenciando, ao mesmo tempo, seu conhecimento da prática matemática e suas crenças sobre a prática matemática de demonstrar.

> *[1] Pesquisadora: O que é uma demonstração para você?*
>
> *[2] Andre: Uma demonstração?*
>
> *[3] Pesquisadora: Isso.*
>
> *[4] Andre: É, um percurso onde aparecem utilizadas todas as coisas que aparecem na hipótese para chegar ao resultado requerido na tese. Por isso que é bem importante quando temos um enunciado entender perfeitamente tudo o que já sabemos, que chamamos de hipótese, e onde queremos chegar, que chamamos de tese. Então uma demonstração completa é uma conexão de processos lógicos... eu não sei se são as palavras certas, mas são as palavras melhores que eu posso achar agora. É... que utiliza tudo o que sabemos para chegar ao que queremos. Se você não utiliza alguma das hipóteses e ainda chega, significa duas coisas, ou que a sua demonstração está errada, ou que o seu enunciado não é ótimo. Significa que tem uma hipótese a mais que você podia tirar.*

No fragmento anterior [4] Andre expõe sua crença de que uma demonstração é um meio para se chegar a um resultado, ou "uma conexão de processos lógicos". Além disso o formador também demonstra um conhecimento sobre formas de validar um resultado em Matemática, utilizando todas as hipóteses para chegar na tese (KPM). No fragmento a seguir [6] Andre clarifica sua crença de que a demonstração é um resultado final, baseada em uma série de hipóteses e de que demonstrar significa chegar a um novo resultado; se o resultado não é demonstrado, será apenas decorado pelos estudantes. Dessa forma, Andre evidencia a crença de que a demonstração é o que dá a matemática um papel que não seja decorativo, é algo útil, fundamental. Andre evidencia, assim, um conhecimento sobre demonstração como uma forma de validação em matemática (KPM).

*[5] Pesquisadora: Qual é o papel da demonstração?*

*[6] Andre: O papel da demonstração... ajuda a fazer essas relações, porque uma demonstração eu falei, é juntar conhecimentos que já temos para relacionar entre eles e chegar a um novo resultado. Se eu não fizesse nenhuma demonstração, você é uma esponja, que... que decora... conhecimento.*

Em relação com a demonstração, que é uma prática matemática, também aparecem outros conhecimentos como as características de aprendizagem dos estudantes. Ao ser questionado sobre o que os estudantes precisam saber ao final da disciplina, Andre enfatiza teoremas e suas demonstrações, pontuando que dar uma ideia da demonstração é mais difícil do que reproduzi-la, considerando a necessidade de saber quais são seus pontos principais, além de saber como faze-la. Assim, Andre evidencia seu conhecimento sobre as dificuldades associadas com a demonstração em [8] e [10], bem como sobre características de aprendizagem dos estudantes [12].

*[7] Pesquisadora: O que os alunos precisam saber ao final da disciplina?*

*[8] Andre: Eu gostaria de, de... as coisas, eu poderia te dizer teoremas ã, teoremas específicos, mas eu gostaria que eles soubessem se mexer... Eu vou tentar montar uma prova para eles, para ver se eles sabem se mexer bastante e... nos... nos tópicos vistos em aula. Por exemplo, eu podia montar, dê uma ideia da demonstração desse resultado e demonstre como consequência que é isso. Dar uma ideia é mais complicado do que demonstrar de cor. Então...*

*[9] Pesquisadora: Por quê?*

*[10] Andre: Para dar uma ideia você tem que escolher o que tem que, o que quer escolher numa ideia de demonstração. Se você escreve uma demonstração com todo detalhe você não tem que... Se eu faço, se eu escrevo para você dar uma ideia da demonstração, isso significa que você tem que escolher quais acha que são os pontos principais da demonstração.*

*[11] Pesquisadora: Além de saber...*

*[12] Andre: Além de saber a demonstração. Então com uma pergunta que pode parecer mais simples eu estou pedindo mais trabalho.*

Quando questionado sobre os resultados mais importantes que os estudantes deveriam conhecer ao final do curso, Andre aponta o Teorema Chinês do Resto, o teorema de Euler e a Phi de Euler [14], justificando que tais resultados compreendem outros resultados abordados no curso [16], evidenciando a crença de que os resultados mais importantes na disciplina são aqueles que envolvem mais conhecimentos.

*[13] Pesquisadora: Se você tivesse que pensar em um ou dois resultados, que eles deveriam saber no final, quais você escolheria?*

*[14] Andre: Eu poderia dizer o Teorema chinês do resto ou o teorema de Euler, ou a Phi de Euler ou...*

*[15] Pesquisadora: Por que esses?*

*[16] Andre: Bom, o teorema chinês do resto por que no fundo, leva, é uma espécie de generalização de coisas que vimos, por que tem a matemática modular, então você tem que saber bem a matemática modular, se você sabe bem a matemática modular, vimos, repito uma vez mais, toda a divisibilidade está encaixada em matemática modular, significa que você sabe fazer sistemas lineares, mas de um jeito mais generalizado. Por que quando você resolve sistemas lineares são sempre nos números reais, a gente sabe fazer mais ou menos... teorema chinês do resto é sistemas lineares e matemática modular. Sim? [...].*

O formador estabelece conexões de simplificação (KSM) na medida em que olha para o Teorema Chinês do Resto e o identifica como uma generalização de outros tópicos vistos anteriormente na disciplina, como a matemática modular. Além disso Andre estabelece conexões de simplificação entre a matemática modular e a divisibilidade e também uma conexão de complexificação entre sistemas lineares e matemática modular.

Em sua sexta aula, ao demonstrar o Teorema Chinês do Resto, Andre se utiliza de vários conceitos discutidos anteriormente na disciplina, como divisibilidade, máximo divisor comum, congruências lineares e sistemas lineares, evidenciando as conexões já apresentadas na entrevista.

## Comentários finais

Ainda que outros subdomínios do conhecimento de Andre possam ser inferidos nos dados analisados, optamos nesse texto por discutir apenas os subdomínios *Knowledge of Practices in Mathematics* e *Knowledge of the Structure of Mathematics*, em conjunto com as crenças desse formador, em virtude do foco de análise escolhido.

Com relação as crenças do formador, Beswick e Goos (2018) apontam que, da mesma forma que comprovadamente as crenças do professor sobre a natureza da Matemática, seu ensino e aprendizagem, e sobre a capacidade dos alunos para aprender Matemática são importantes em sua prática, o mesmo acontece com o formador. Por isso, compreender o papel das crenças no trabalho dos formadores é tão importante quanto compreender seu conhecimento (Beswick e Goos, 2018).

Conforme apontam Delgado-Rebolledo e Zakaryan (2019), as investigações envolvendo o modelo MTSK tem apresentado escassas evidências sobre o KPM do professor de Matemática e suas relações com outros subdomínios do modelo. Considerando que Andre, além de estar exercendo o papel de formador, é também um matemático ensinando Teoria dos Números, trazemos evidências empíricas de relações entre seu conhecimento matemático e suas crenças.

Tais relações se dão, por exemplo, quando Andre manifesta sua crença de que um resultado deve ser demonstrado para ser aprendido pelos estudantes, caso contrário será apenas memorizado. Ao expor essa crença Andre evidencia conhecer a demonstração como uma forma de validação em matemática (Flores-Medrano, 2016).

Para além das relações entre o conhecimento matemático e as crenças sobre demonstração evidenciado por Andre na entrevista semiestruturada, cabe uma análise detalhada das demonstrações apresentadas pelo formador para os teoremas que ele considera centrais na disciplina de Teoria dos Números, procurando por outras possíveis relações.

## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## Referências

Beswick, K., y Goos, M. (2018). Mathematics teacher educator knowledge: What do we know and where to from here? *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*, 417–427.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M, y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*, *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253, doi: 10.1080/14794802.2018.1479981

Cooper, J., y Zaslavsky, O. (2017). A mathematics educator and a mathematician co-teaching mathematics – affordances for teacher education. In Dooley, T. & Gueudet, G. (Eds.). *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2025-2032). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education & ERME.

Delgado-Rebolledo, R., y Zakaryan, D. (2018). Knowledge of the Practice in Mathematics in University Teachers. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild, & N.M. Hogstad (Eds.), *Proceedings of the Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 393–402). Kristiansand, Norway: University of Agder and INDRUM.

Delgado-Rebolledo, R., y Zakaryan, D. (2019). Relationships Between the Knowledge of Practices in Mathematics and the Pedagogical Content Knowledge of a Mathematics Lecturer. International Journal of Science and Mathematics Education. doi: 10.1007/s10763-019-09977-0.

Dias, A. L. M., Lando, J. C., y Freire, I. A. (2012). Formação de professores na Bahia: os cursos de Matemática e de Didática da Faculdade de Filosofia (1943-1968). In: Ferreira, A. C.; Brito, A. J.; Miorim, M. A. *Histórias de formação de professores que ensinaram Matemática no Brasil* (pp. 115-135). Campinas: Ílion.

Fiorentini, D., y Lorenzato, S. (2006). *Investigações em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados.

Flores-Medrano, E. (2016). Conocimiento de la práctica matemática (KPM). En J. Carrillo, L. C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 30-34). SGSE: Huelva.

Gomes, M. L. M. (2016). Os 80 Anos do Primeiro Curso de Matemática Brasileiro: sentidos possíveis de uma comemoração acerca da formação de professores no Brasil. *Bolema*, Rio Claro (SP), *30*(55), 424-438.

Montes, M., Carrillo, J., y Ribeiro, C. M. (2014). Teachers' knowledge of infinity, and its role in classroom practice. In P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol, y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (vol. 4, pp. 234–241). Vancouver, Canadá: PME.

Moreira, P. C. (2012). 3+1 e suas (In)Variantes (Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática). *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *26*(44), 1137–1150. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000400003

Parecer CNE/CES 1.302/2001. (2001). Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Brasília, DF. Recuperado em 29 de abril de, 2019, de http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research.* (1st ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

# Conhecimento especializado de futuros professores ao atribuírem significado a respostas de alunos sobre paralelismo

Silvania Couto
Miguel Ribeiro
Marieli V. R de Almeida

## Resumo

Com a pesquisa aqui reportada visamos compreender o conhecimento revelado por futuros professores da Educação Infantil e Anos Iniciais sobre paralelismo ao atribuírem significado a produções de alunos. Para esse fim, analisamos as produções (escritas e orais) de 36 estudantes do 4º ano do curso de Pedagogia de uma universidade pública do Estado de São Paulo – Brasil, usando como referencial teórico o Mathematics Teacher´s Specialized Knowledge (MTSK). Como resultados, destacamos que de um modo geral os participantes demonstraram conhecer algumas definições para retas paralelas, bem como as propriedades e seus fundamentos, a exemplo da equidistância e a não concorrência entre elas.

## Palavras chave

Conhecimento especializado, paralelismo, futuros professores.

## Abstract

With this paper we inted to contribute to a broader understanding on prospective kindergarten and primary teachers' (PT) knowledge on parallelism when giving meaning to students' productions. With such aim, we gathered data from 36 PTs' (written productions and video recordings) at the 4th year of their program (out of five) from a public university in the State of São Paulo, Brazil, and analyse it accordingly the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) conceptualziation. As results, we emphasize PTs' knowledge on some definitions for parallel lines, as well as properties and their fundamentals, such as equidistance and non-competition between them.

## Keywords

Specialized knowledge, parallelism, future teachers.

Couto, S., Ribeiro, M. y de Almeida, M. V. R. (2019). Conhecimento especializado de futuros professores ao atribuirem significado a respostas de alunos sobre paralelismo. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (182-190). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Introdução

No contexto educacional brasileiro, os estudos sobre paralelismo são introduzidos no 4° ano do Ensino Fundamental (crianças de 9-11 anos), segundo preconizado pelos documentos oficiais balizadores (Brasil, 2018, 1997). Estes documentos atrelam o tema paralelismo a habilidades de "Descrever deslocamentos e localização de pessoas e de objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e representações como desenhos, mapas, planta baixa e croquis, empregando termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido, intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares (Brasil, 2018, p. 291).

Logo, percebe-se que a abordagem introdutória proposta é eminentemente intuitiva, objetivando uma construção gradual da conceitualização do tema em anos de ensino posteriores. Segundo Valente (2013), este tipo de abordagem (intuitiva) é influência direta dos estudos de Piaget, que em 1947 propõe uma adaptação da Geometria Elementar (ou Euclidiana) por algo mais próximo do processo evolutivo de noções do seu entorno, percorrido pelas crianças dessa faixa etária, voltada incialmente para o topológico. Esse contato inicial intuitivo com o tema, pode ser potencializado pelo estímulo ao uso da habilidade da visualização que se baseia "num conjunto de imagens, e mais globalmente, nas conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado" (Duval, 2012, p. 269).

Esse propósito coaduna com a compreensão de Gutierrez (1996), sobre a visualização "[...] atividade, seja mental, seja física, baseada no uso de elementos visuais ou espaciais para resolver problemas ou provar propriedades." ( p. 9). Desse modo, o uso da visualização poderá propiciar uma melhor base para a conceitualização de paralelismo como o estudo da posição relativa das retas, abrangendo duas ou mais retas ou retas e planos.

A aprendizagem do aluno sobre esse ou qualquer tema tem uma notória influência do conhecimento do professor, sendo esse seu elemento balizador (Ribeiro, 2011), por conseguinte, aumenta a necessidade de aprofundar estudos a respeito desse conhecimento e suas idiossincrasias. Assim, assumimos esse conhecimento do professor na perspectiva do *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* – MTSK (Carrillo et al., 2018), considerando esta conceitualização como lente teórica e metodológica de análise.

Com isso em mente, buscou-se neste trabalho melhor entender o conhecimento de futuros professores da Educação Infantil e Anos Iniciais sobre retas paralelas. Nesse intento, analisou-se as produções de futuros professores estudantes de Pedagogia que se encontravam no 4º ano de uma universidade pública do Estado de São Paulo, Brasil, ao resolverem uma tarefa formativa (Ribeiro, 2016) que teve por foco desenvolver o seu conhecimento sobre paralelismo. Aqui focamos a seguinte questão: *Que conhecimento especializado revelam futuros professores da Educação Infantil e Anos Iniciais sobre as definições e dificuldades de aprendizagem doa alunos sobre paralelismo ao atribuírem significado a respostas apresentadas a questões sobre esse tema pautadas na visualização?*

## Fundamentação teorica

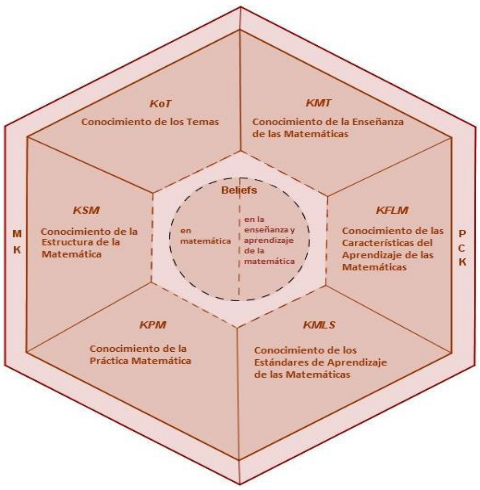
Tanto a Geometria Euclidiana quanto a Geometria Analítica, tomam como referência o plano para suas conceitualizações. A diferença é que a Geometria Analítica parte do plano cartesiano e por conseguinte, embasa-se na álgebra para propor definições e estabelecer propriedades, enquanto a Geometria Euclidiana, toma como ponto de partida o plano como elemento primitivo bidimensional. Em ambas as Geometrias, a habilidade da visualização constitui-se um recurso potente para compor conceitualizações (Duval, 2005).

A partir disso, configura o conhecimento do professor sobre paralelismo saber que algumas definições para retas paralelas são: retas equidistantes que têm um plano comum; retas que não se cruzam, tendo um mesmo plano que as contenha; retas que possuem o mesmo coeficiente angular; e retas que possuem  a mesma inclinação.

Nota-se que as duas primeiras definições têm dupla equivalência e são do escopo da Geometria Euclidiana, enquanto as duas seguintes, embora também tenham dupla equivalência, são do escopo da Geometria Analítica. Além disso, para a compreensão das duas definições baseadas na Geometria Euclidiana, faz-se necessário uma imagem mental (Duval, 2012, 2005) que conduza ao entendimento de que o comportamento observado em um segmento da reta estende-se por toda ela, pois as retas são elementos de comprimento infinito. Já as duas embasadas na Geometria Analítica demandam a compreensão prévia de temas matemáticos correlatos como ângulo e tangente, mas nada impede o uso da visualização, quer por meios físicos, quer pela imagem mental para melhor compreender porque terem a mesma inclinação implica em serem paralelas (Gutierrez, 1996).

Isso posto, ressalta-se que o *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK (Carrillo et al., 2018), conceitualiza o conhecimento do professor como um recurso indispensável a sua prática e o seu caráter especializado decorre do fato de todo seu conhecimento matemático, diferente de outras áreas que utilizam a matemática, ser direcionado em prol da formação da base para a aprendizagem matemática do aluno. Constitui-se de dois domínios: o *Mathematical Knowledge* (MK), que se refere ao conhecimento matemático do professor cujo nível de aprofundamento é maior do que se discutirá com os seus alunos, e o *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), cujo foco são aspectos do ensino que propiciam a aprendizagem e perpassando a ambos, temos as crenças e as concepções do professor. Esse conglomerado é o que norteia sua prática (Figura 1).

**Figura 1**
**Modelo MTSK**




Fonte: Carrillo et al. (2018, p. 241)

Com o intuito de melhor entender a especialização do conhecimento do Professor que ensina matemática (PEM) direcionando o foco sobre as discussões, esse modelo teórico subdivide cada domínio em três. Ressaltamos que não há uma hierarquização entre os seus domínios ou entre seus subdomínios. Assim, temos para o MK o *Knowledge of Topics* (KoT), o *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) e o *Knowledge of the Practice of Mathematics* (KPM). E temos para o PCK o *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM), o *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT) e o *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS). Ressaltamos ainda que cada um desses subdomínios possui categorias que são elementos balizadores para a análise.

Como o foco pretendido tem por área a Educação Matemática, trataremos sobre o tema matemático paralelismo, entretanto, como o contexto de pesquisa envolve sujeitos no final da sua formação inicial, e sabedores do papel fundamental do conhecimento do professor para a aprendizagem do aluno (Ribeiro, 2011), entendemos como crucial melhor entender o que sabem sobre a aprendizagem do aluno. Somando-se a isso, nosso espaço limitado para discorrer sobre a pesquisa nos obriga a eleger subdomínios que melhor habilitam a responder a questão proposta, por isso a análise centra-se nos subdomínios *KoT* e *KFLM*.

O KoT é um dos subdomínios do MK que foca no conteúdo matemático propriamente dito em um nível de aprofundamento maior do que virá a ser discutido com o aluno. Para esse fim, inclui-se nesse subdomínio quatro categorias: procedimentos; definições, propriedades e seus fundamentos; registros de representação; e fenomenologia e aplicações. Nesse trabalho, focamos na categoria *definições, propriedades e seus fundamentos*. Compõe este subdomínio (e desta categoria) um conhecimento de que duas ou mais retas são paralelas quando: têm um plano em comum e não são concorrentes; são equidistantes, reconhecendo que não se cruzarem tendo um plano comum, implica em terem a mesma distância em toda a sua extensão; possuem o mesmo coeficiente angular (equivale a dizer que têm a mesma inclinação e vice-versa).

Já o KFLM é um dos subdomínios do PCK que se refere ao conhecimento do professor quanto ao conteúdo matemático e a interação do aluno com esse conteúdo. Constitui-se de quatro categorias: teorias da aprendizagem, pontos fortes e fracos na aprendizagem, maneiras que os alunos interagem com o conteúdo e aspectos emocionais de aprender matemática. Aqui focamos em *pontos fortes e fracos na aprendizagem* e *maneiras que os alunos interagem com o conteúdo*.

Assim o conhecimento de que na exploração do tema paralelismo entre retas o aluno poderá se deter em aspectos físicos da visualização utilizando régua para medir a distância entre as retas em lugar de verificar as informações fornecidas e usar isso como elemento para discussão, evidencia esse subdomínio ante a categoria *maneiras que os alunos interagem com o conteúdo.* Quanto a categoria *pontos fortes e fracos na aprendizagem* é evidenciada ao professor revelar saber que pela abstração demandada pelo estudo das retas, os alunos terão dificuldade em entender que o comportamento observado no desenho se estende ao infinito, mas que o estímulo à visualização poderá compensar isso.

## Contexto e método

Apresenta-se aqui um recorte de uma pesquisa maior que objetiva ampliar a compreensão sobre o conhecimento de futuros professores da Educação Infantil e Anos Iniciais sobre o tema paralelismo, tendo por base a visualização. As informações aqui analisadas foram coletadas a partir das produções resultantes da implementação de uma tarefa formativa implementada em uma turma de 4° ano do curso de Pedagogia de uma universidade pública de São Paulo, Brasil, no decurso da única disciplina explicitamente do âmbito da Educação Matemática (60 horas), em que a primeira autora atuou como professora assistente, através do Programa de Estágio Docente (PED). As informações coletadas referem-se as produções de 36 futuros professores que trabalharam em grupos de 4.

A tarefa constituiu-se de três partes complementares que objetivavam aceder e desenvolver o conhecimento especializado desses futuros professores. A Parte I da tarefa fazia a prospecção do seu conhecimento sobre o tema, ajudando-lhes a construir suas conceitualizações através das discussões em grupo e reflexões plenárias. A Parte II os convidava a refletir sobre o ensino sobre a perspectiva da inclusão de alunos cegos e não cegos, através de uma simulação de um ambiente de aula que congregava alunos nessas condições. Já a Parte III os convidava assumir a postura de professores e atribuir significado a produções escritas de alunos, dando-lhes um *feedback construtivo.*

Sua dinamização e coleta consistiu na entrega de uma parte da tarefa por vez a cada um dos pequenos grupos, que a discutiam para apresentar uma resolução aos problemas propostos. A parte seguinte era entregue apenas depois da conclusão da anterior por todos os grupos. Cada grupo teve as discussões geradoras das produções escritas registradas por meio de uma câmera de vídeo exclusiva, para possibilitar o entendimento do que fundamentou as produções escritas. Após todos os grupos concluírem a Parte III da tarefa, fez-se uma discussão plenária de toda a tarefa, direcionada por sua projeção no quadro.

Aqui focamo-nos em uma das questões da Parte III (Figura 2), desenhada com o intuito de fomentar discussões quanto a dois aspectos distintos da conceitualização de paralelismo entre retas, um pautado apenas na definição segundo a Geometria Analítica, e outro pautado na Geometria Euclidiana.

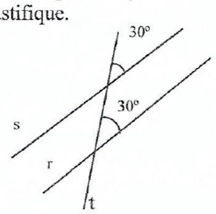
**Figura 2**
**Item 3. a) da parte III da tarefa**

**Parte III**

A professora Nadja implementou na sua turma do 4º ano, que tem três alunos cegos, uma tarefa relacionada com o paralelismo e perpendicularismo. Abaixo encontram-se algumas produções dos alunos. Para cada uma delas relate, justificando, se estão matematicamente corretas, e forneça um *feedback* construtivo para cada um dos alunos que considere terem respondido de forma não completamente correta (não se restringindo a "parabéns você acertou" ou "você conseguirá na próxima"):

3. As representações abaixo podem ser relacionadas com paralelismo? E perdendicularismo? Justifique.

a)




**Carla (aluna cega):** *"s" e "r" são paralelas porque têm a mesma inclinação de 30º e possuem o mesmo coeficiente angular*

**Alessandra:** *As retas "r" e "s" mantêm a mesma distância entre si em todo seu comprimento e não têm nenhum ponto em comum, por isso são paralelas.*

Fonte: Elaborado para a pesquisa

Com esse objetivo em mente, na sua elaboração, elegeu-se como resolução dos alunos, junto a tarefa, produções que careciam de coesão, coerência e completude. Desse modo, na primeira resposta (Carla) tem-se problemas de coesão, uma vez que terem a mesma inclinação implica em terem o mesmo coeficiente angular, enquanto na segunda (Alessandra) tem-se problemas de coerência matemática pois quando afirma que são paralelas por não terem nenhum ponto em comum exclui-se a possibilidade de retas coincidentes serem paralelas, além disso, tem problemas de completude pois não há alusão a terem um plano em comum.

No processo de análise plotou-se em um quadro toda produção escrita previamente escaneada, separando item a item junto com a transcrição do vídeo das discussões que a fomentaram. Assim, analisamos as informações coletadas sob a luz do MTSK, tendo focado a atenção no que se refere a evidências de KoT e KFLM. Faz-se a discussão dos resultados tratando de modo conjunto as evidências de cada um dos subdomínios por meio das categorias de análise listadas a seguir.

*Apontando os erros*: nesta categoria, discute-se os indicadores do conhecimento dos futuros professores voltados para as definições, as propriedades e os fundamentos do paralelismo entre retas.

*Fazendo assim*: aqui foca-se nos indicadores que sinalizam para o conhecimento desses futuros professores quanto às formas de interação dos alunos com o tema paralelismo e as fortalezas e dificuldades desses alunos em apropriar-se do tema em apreço.

## Análise e discussões

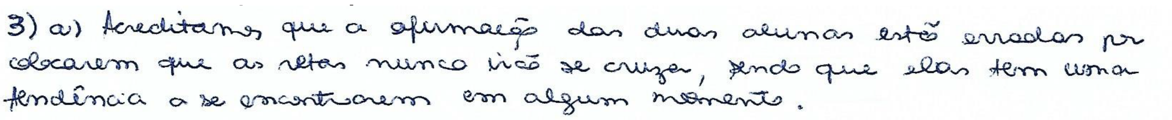
Entende-se que das produções observadas podem emergir a presença de outros subdomínios além dos listados aqui, porém, devido ao espaço disponível para apresentação e o foco pretendido para a análise, destacou-se o que se sobressaiu.

### *Apontando os erros*

Nas produções escritas ficou evidente que os futuros professores têm algum conhecimento quanto as definições envolvidas no conceito de paralelismo. Dos nove grupos participantes, seis sustentaram a ideia de que ambas as respostas estavam certas, um asseverou que a resposta de Carla estava errada, um assegurou que a resposta de Alessandra precisava de elementos da resposta de Carla para ser completa e um foi taxativo em afirmar que ambas as respostas estavam erradas. Na Figura 3, trazemos a produção do grupo que afirmou que ambas as respostas estavam erradas.

**Figura 3**

**Produção escrita dos futuros professores**



3) a) acreditamos que a afirmação das duas alunas estão erradas por colocarem que as retas nunca irão se cruzar, sendo que elas tem uma tendência a se encontrarem em algum momento.

Das discussões desse grupo gravadas em vídeo, vem o seguinte excerto do diálogo que sucedeu a leitura do enunciado da questão em tela:

> *Vitória[1]: Não. Porque aqui ela tá mais... sei lá, dá a entender que aqui ela está mais afastada do que aqui (apontando para a extremidade inferior e superior do desenho, respectivamente), parece que elas estão tipo (sinaliza com as mãos a ideia de afastamento).*
>
> *Vitória: Mede aí... ou então estou enxergando muita coisa bisonha.*

1 Todos os nomes são fictícios.

*Ana: zero a um... é menos (enquanto usa a régua para medir a distância entre as retas).*

*Ana: Então elas vão se cruzar em algum momento, então a Alessandra está errada.*

*Vitória: Mas realmente, ela não tem nenhum ponto em comum aqui (apontando para o desenho). Se é para considerar o que está aqui...*

*Ana: Mas, independente disso, ela vai se cruzar mais para a frente (usando as mãos para dar a ideia de continuidade da reta).*

*Vitória: Mas, aqui ela pode estar errada também... a de cima (referindo-se a Carla), porque ela falou que é uma inclinação de trinta, tudo bem, só que tipo essa inclinação... (apontando para o desenho e a distância entre as retas na parte superior do desenho).*

Notamos que fizeram uso da visualização e deram mais valor as informações visuais mensuráveis que as escritas, pautando suas suposições na medição da distância entre as retas [3]. Com isso, fizeram o que Gutierrez (1996) chama de atividade física sobre elementos visuais, para concluírem: "Então elas vão se cruzar em algum momento (...)" e "Mas, aqui ela pode estar errada também... a de cima (referindo-se a Carla)"[4 e 7]. Isso levou a resolução proposta para o problema: "(...) a afirmação das duas alunas estão erradas por colocarem que as retas nunca irão se cruzar (...)"(Figura 3). Essa afirmativa em conjunto com o expresso em [7], dá a evidência de saberem que as retas são paralelas quando não se cruzam em nenhum ponto ou, noutra perspectiva, quando têm a mesma inclinação (KoT: *definições*), seu equívoco foi desconsiderarem, quando foram discutir e resolver o item em questão, o fato de que o escrito sobrepõe-se ao pictográfico, pois as resoluções de ambas as alunas estão parcialmente corretas, carecendo em questões de coerência, coesão e completude.

## *Fazendo assim*

Nas produções escritas dos nove grupos, não encontramos evidências do conhecimento desses futuros professores com respeito ao que se refere ao subdomíno *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM). Entretanto, notamos indícios desse subdomínio em algumas discussões fomentadoras das produções escritas. Dentre os indícios encontrados, destacamos os que podemos extrair do excerto das discussões trazidas no subitem anterior.

Ao dizerem: "(...) dá a entender que aqui ela está mais afastada do que aqui (apontando para a extremidade inferior e superior do desenho, respectivamente) (...)" [1] e "Mede aí..." [2], parecem querer replicar a postura de seus futuros alunos. Isso, nos dá indícios de que os futuros professores sabem que quando há desenhos envolvidos os alunos prioritariamente optarão por pautar suas resoluções no que lhes é visível e se possível mensurável, fazendo sempre que possível uso de instrumentos de medida (KFLM: *maneiras que os alunos interagem com o conteúdo*).

Notamos ainda no mesmo excerto, ao afirmarem: "(...) ela não tem nenhum ponto em comum aqui (apontando para o desenho) (...)" [5], indícios do conhecimento desses futuros professores quanto ao subdomínio KFLM na categoria *pontos fortes e fracos da aprendizagem*, pois essa fala dá a ideia de saberem que é difícil para o aluno usar a habilidade da visualização para compreender que quando se estuda a posição relativa de uma reta, este estudo não se restringe apenas ao que é representado de forma pictórica, mas estende-se até o infinito.

## Comentários Finais

De um modo geral, observou-se que os futuros professores têm um conhecimento especializado sobre o tema paralelismo, sabendo que duas ou mais retas são consideradas paralelas quando não se cruzam, ou noutra perspectiva quando têm a mesma inclinação (KoT: definições). Há ainda indícios desse conhecimento especializado ao saberem que é difícil para o aluno compreender que quando se estuda o comportamento da reta, não se restringe apenas ao que é desenhado, mas estende-se ao infinito (KFLM: *pontos fortes e fracos na aprendizagem*), bem como de saberem que quando há desenhos eles darão prioridade ao visual e mensurável (KFLM: *maneiras que os alunos interagem com o conteúdo*).

Entretanto, nenhum dos nove grupos fez qualquer alusão aos problemas de coesão, coerência e completude matemáticas, propositalmente inseridos na tarefa. Como foi solicitado que atribuíssem significado as respostas dos alunos, esperava-se que mencionassem que a resposta de Carla era redundante (coesão) e que Alessandra deveria tomar cuidado com sua afirmação pois ela exclui retas coincidentes (coerência), além disso deveriam afirmar que falta mencionar que as retas precisam ter um ponto em comum (completude).

Portanto, os futuros professores revelaram ter conhecimento especializado sobre o tema quanto ao KoT, mas precisaríamos investigar melhor seu KFLM. Além disso, poderíamos investigar o seu conhecimento especializado no âmbito das conexões entre o paralelismo e outros temas matemáticos, como tangentes e coeficiente angular, pois, embora tais conteúdos não componham o escopo do que deve ser discutido com os alunos nos anos de ensino em que atuam, quanto mais profundo e amplo o conhecimento especializado do professor sobre o tema a ser discutido, maiores serão as oportunidades de aprendizagens dos seus alunos (Ribeiro, 2011).

## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001"/ "This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001.

## Referencias

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília-DF: Ministério da Educação.

Brasil, S. de E. F. (1997). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasilia: MEC/SEF.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de L'apprentissage de la Géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, *10*, 5–53.

Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *7*(2), 266–297. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

Gutierrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry search of a framework: *L. Puig e A. Gutiérrez (eds), Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathemamatics Education*, *1*(20), 3–19.

Ribeiro, M. (2011). A importância do conhecimento do conteúdo matemático na prática letiva de uma professora: discutindo um modelo de análise. *Zetetiké*, *19*(35), 71–102.
Ribeiro, M. (2016). Tareas para alumnos y tareas para la formación: discutiendo el conocimiento especializado del profesor y del formador de profesores de matemáticas. *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemá tica*, 31–39. Valparaíso: Chile.
Valente, W. R. (2013). Que geometria ensinar? Uma breve história da redefinição do conhecimento elementar matemático para crianças. *Pro-Posições*, *24*(1), 159–178.

# Concepciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en estudiantes universitarios

Álvaro Aguilar-González
J. Barbé
Lorena Espinoza
Laura Muñiz-Rodríguez
Luis J. Rodríguez-Muñiz

## Resumen

En este trabajo se presentan los resultados iniciales de un estudio realizado con estudiantes de la Universidad de Oviedo en el que se utiliza una adaptación del instrumento CEAM, de Concepciones sobre la Enseñanza y Aprendizaje (E-A) de las Matemáticas para conocer cuáles son las concepciones sobre E-A entre el alumnado universitario de diferentes perfiles formativos. Los resultados indican que el CEAM es un instrumento que puede ser utilizado también cuando se aplica a individuos que no necesariamente van a ser docentes.

## Palabras clave

Aprendizaje, didáctica, enseñanza, matemáticas, práctica educativa.

## Abstract

In this work the preliminary results of a study developed with students of the University of Oviedo are presented. In the study, the instrument of Conceptions on Teaching and Learning Mathematics (CEAM, in the Spanish acronym) is adapted to find out these conceptions among undergraduate students from different degrees. Results show that CEAM is a suitable instrument to be applied even on a population which is not necessarily trained for becoming teachers.

## Keywords

Didactics, educational practice, learning, mathematics, teaching.

Aguilar-González, A., Barbé, J., Espinoza, L., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2019). Concepciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en estudiantes universitarios. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (191-200). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Introducción

Para entender la caracterización del conocimiento que se pone en juego en la práctica de un profesor de matemáticas resulta necesario analizar las concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y su relación con la caracterización de dicho conocimiento (Aguilar, Muñoz-Catalán, y Carrillo, 2019). A este respecto, existen diversos enfoques por parte de los investigadores sobre cómo se consideran las creencias o concepciones de los profesores. Algunos investigadores las conciben como una parte del Conocimiento Didáctico del Contenido de los docentes (Ball, 1990; Fennema y Franke, 1992), mientras que otros hacen una distinción explícita entre el conocimiento y las creencias (Thompson, 1984, 1992).

La importancia de las concepciones avala el objetivo del estudio que aquí se presenta: conocer las concepciones sobre la E-A de las matemáticas entre el alumnado universitario de diferentes perfiles formativos utilizando para ello una adaptación del instrumento de CEAM y comprobar, al mismo tiempo, la idoneidad del instrumento para ser aplicado a una población no necesariamente encaminada al futuro docente. En colaboración con investigadores del Centro Félix Klein de la Universidad de Santiago de Chile, en el seno del grupo de investigación MERG (Mathematics Education Research Group) de la Universidad de Oviedo, haciendo uso de la base teórica presentada en Carrillo (1998), de la que se derivó el instrumento de análisis, y de los resultados obtenidos por Contreras (1999), decidimos considerar las creencias como un elemento cercano a las concepciones, careciendo de sentido realizar una distinción entre ambas, tal y como afirman Philipp (2007), Maasepp y Bobis (2015), y Zoitsakos, Zachariades y Sakonidis (2015). Lo contrario no aporta beneficios significativos para la comprensión de la naturaleza del conocimiento del profesor de matemáticas, ya que tanto las creencias como las concepciones están vinculadas de la misma manera al conocimiento. Este posicionamiento nos permite abordar el estudio de ambas construcciones, así como las relaciones entre ellas. Las concepciones son un elemento diferente del conocimiento, pero íntimamente ligado a él de tal manera que permea el conocimiento que el profesor tiene en cada uno de los subdominios. El trabajo se estructura como sigue: en primer lugar, se presenta un marco teórico sobre el instrumento de CEAM, a partir del cual se diseña el instrumento de recogida de datos; en segundo lugar, se describe el diseño metodológico y se aporta información sobre la población y la muestra, y la recogida y el análisis de datos; por último, se presentan tanto los resultados como las conclusiones derivadas del estudio y las ideas para el futuro.

## Instrumento de CEAM

El instrumento de CEAM fue desarrollado por Climent (2005) a partir del instrumento para el análisis de las concepciones del profesor sobre la enseñanza de las matemáticas propuesto por Carrillo (1998), que muestra su potencial para analizar el conocimiento del profesor en Secundaria. Este instrumento respeta la distinción de las cuatro tendencias didácticas, sirviendo como indicadores generales sus abreviaturas: tradicional (TR), tecnológica (TE), espontaneísta (E), e investigativa (I), y las agrupa en las categorías: metodología, concepción de la matemática escolar, concepción del aprendizaje, papel del alumno, y papel del maestro.

En el inicio del modelo MTSK (Mathematics Teachers' Specialised Knowledge), las concepciones se situaron en el centro del modelo y se señaló que eran un elemento que impregna el conocimiento (Carrillo et al., 2018). Este instrumento se desarrolló a partir de aspectos característicos de las concepciones del maestro de Primaria respecto de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, tomando en consideración investigaciones previas tanto de maestros en formación, como en ejercicio. En el aporte que hacen al modelo MTSK, entendemos que, si aceptamos que las creencias permean, filtran, o condicionan el conocimiento (o su puesta en práctica), su consideración completa la comprensión de dicho conocimiento (Montes, 2016).

Dado el límite de extensión, este trabajo se limita a presentar los descriptores más característicos de cada tendencia en las categorías utilizadas. En primer lugar, en la tendencia tradicional (TR), la metodología se entiende como la ejercitación repetitiva, el papel del maestro se limita principalmente a dar las pautas en el aula, la matemática escolar se centra en los conceptos y las reglas, el proceso de aprendizaje es deductivo (regla - aplicación), y el aprendizaje es un proceso individual. Respecto a la tendencia tecnológica (TE), encontramos que la metodología es la ejercitación reproductiva de tareas, el maestro da las pautas poniendo énfasis en que los alumnos comprendan, se muestra interés por los conceptos y las reglas, los procedimientos locales y la lógica de la asignatura, los procesos de aprendizaje son inductivos simulados (por el maestro) y deductivos, y el aprendizaje también es un proceso individual. En la tendencia espontaneísta (E), la metodología se centra en el activismo, el maestro propone las actividades, promoviendo la participación de los alumnos, y teniendo en cuenta las actitudes y los procedimientos generales, el proceso de aprendizaje es inductivo y se realiza en un proceso social. Finalmente, la tendencia investigativa (I) se caracteriza por la resolución de situaciones problemáticas, el maestro propone investigaciones y apoya la reflexión y el trabajo autónomo del alumno, además, interesan los conceptos, los procedimientos y las actitudes; El proceso de aprendizaje es inductivo-deductivo y se da de manera social e individual.

Dada la naturaleza del instrumento señalado, su inserción junto al modelo MTSK puede resultar beneficiosa para la comprensión del conocimiento del profesor, tal y como se ha podido comprobar en el análisis del conocimiento especializado de una maestra (Aguilar, 2016). Estas relaciones se materializan en los *gráficos de relaciones internas MTSK* en los que se pone de relieve que las principales categorías del instrumento de CEAM sirven para comprender las relaciones de conocimiento manifestadas.

## Metodología

### *Población y muestra*

La población de este estudio la conforman estudiantes de los Grados en Maestro/a en Educación Primaria, en Matemáticas y en Psicología en la Universidad de Oviedo. Mediante un muestreo intencional no aleatorio, se obtuvieron 247 encuestas completadas que configuran la muestra, distribuidos en 170 de Educación Primaria (2º y 3º curso), 43 de Matemáticas (1º curso) y 34 de Psicología (3º curso). En el caso del Grado en Matemáticas, se incluyen también estudiantes del plan conjunto de enseñanzas oficiales (doble grado) en Matemáticas y en Física, si bien son alumnos que cursan ambos grados, por lo tanto, metodológicamente se incluyen en el Grado en Matemáticas.

La elección de estas titulaciones radica en que tanto el grupo MERG como el Centro Félix Klein estamos involucrados en un proyecto de evaluación de profesorado en activo en el cual participarán como evaluadores estudiantes con formación en cada uno de estos tres grados. Por lo tanto, tiene interés la determinación de cuáles son sus concepciones sobre la E-A y, como paso previo, comprobar si las podemos determinar mediante una adaptación del CEAM.

Cabe recordar que para ser docente de matemáticas los itinerarios dependen del nivel educativo al que se acceda, ya sea desde el Grado en Maestro/a en Educación Primaria (para la enseñanza en Primaria), o desde el Grado en Matemáticas (entre otros) más un Máster profesionalizante en Formación del Profesorado de un año de duración (para la enseñanza en Secundaria). En el caso del Grado en Matemáticas, este enfoque doble, con itinerarios formativos muy diferentes, impide una profundización en los aspectos dedicados a la didáctica de la matemática y obliga a una aproximación más general a la adquisición de competencias (Muñiz-Rodríguez, 2017). Es más, estudios recientes (RSME, 2019), señalan que la ocupación de los matemáticos en tareas docentes no llega al 35% de la ocupación total, es decir, aunque sigue habiendo muchos matemáticos que se dedican a la profesión docente, la mayoría se dedican a otras actividades. Asimismo, en el caso del Grado en Psicología, la versatilidad de los graduados hace que, aunque haya una especialidad vinculada a la psicología educativa, la mayoría de los graduados trabajen en otros ambientes. Con el Grado en Maestro/a en Educación Primaria, ocurre justo lo contrario, que la mayor parte de los egresados se dedica a la profesión docente. Por lo tanto, contamos con tres perfiles muy diferenciados, donde no hay un objetivo común de llegar a ser docente y, en los casos de Matemáticas y Psicología, ni siquiera es el mayoritario.

## *Instrumento, recogida y análisis de datos*

Los participantes debían responder a un cuestionario que incluía algunas preguntas sobre su perfil (titulación, experiencia docente), además de 35 ítems sobre concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, a los cuales debían reaccionar utilizando una escala Likert que varía de 1 (muy en desacuerdo) a 5 (muy de acuerdo). La clasificación por categorías de cada ítem se puede encontrar en Aguilar (2016).

**Tabla 1**
**Ítems sobre las Concepciones en la Enseñanza y Aprendizaje de Matemáticas.**

| |
|---|
| 1. La actividad matemática en el aula debe incluir la caracterización de ejercicios-tipo |
| 2. El profesorado debe ofrecer a su alumnado la oportunidad de investigar para adquirir conocimientos |
| 3. ¿Crees que la fuente de información en un aula debe ser el profesorado? |
| 4. ¿Crees que la fuente de información en un aula debe ser el libro de texto? |
| 5. ¿Deben de existir diferentes niveles de actividades para que el alumnado tenga la oportunidad de trabajar de manera individual? |
| 6. ¿Piensas que, una vez establecidos, los objetivos de aprendizaje pueden ser modificados por el profesorado? |
| 7. Se debe seguir la programación curricular establecida |
| 8. ¿Crees que es importante que el alumnado adquiera conceptos, procedimientos y reglas matemáticas? |
| 9. La finalidad de las asignaturas se basa en el desarrollo de pensamiento que permita al alumnado organizar, interpretar y comprender la realidad que le rodea |

| |
|---|
| 10. ¿Crees que el alumnado debe enfrentarse a situaciones problemáticas para las que no tiene respuesta de antemano? |
| 11. ¿Crees que seguir el libro de texto es una técnica apropiada por parte del profesorado? |
| 12. ¿Es adecuado usar fuentes de información como internet, situaciones cotidianas, experiencias, etc., en el aula? |
| 13. El profesorado debe fijar un nivel en el aula y enseñar al alumnado de acuerdo con este nivel |
| 14. El profesor debe modificar la propuesta organizativa de una clase si se detecta que hay diferentes intereses o niveles entre el alumnado |
| 15. ¿La argumentación matemática y el fomento de actitudes deben tener la misma importancia que la adquisición de conceptos y reglas matemáticas? |
| 16. ¿Piensas que es importante estudiar en la clase contextos distintos al de las matemáticas? |
| 17. Para aprender matemáticas hay que observar regularidades que permiten conjeturar, comprobar e intentar establecer una generalización |
| 18. ¿Crees que es importante que el profesorado transmita los conocimientos en el aula? |
| 19. ¿Piensas que el profesorado debe ser quien tenga la mayor importancia en el aula? |
| 20. Cuando el alumnado trabaja de manera individual, se favorece el aprendizaje |
| 21. El profesorado ideal conoce los intereses de su alumnado y los toma en consideración |
| 22. La actitud del alumnado hacia el aprendizaje puede ser modificada |
| 23. El aprendizaje de técnicas matemáticas desarrolla en el alumnado destrezas que pueden ser usadas en su medio social |
| 24. ¿Crees que el alumnado debe ser partícipe del diseño de la programación didáctica? |
| 25. El alumnado aprende porque ha realizado un proceso de enseñanza/aprendizaje completo y es consciente de él |
| 26. Es necesario que el alumnado busque respuestas a determinados interrogantes |
| 27. Es importante hacer consciente al alumnado de qué hace y para qué lo hace cuando está aprendiendo |
| 28. ¿Crees que el alumnado debe mantener una actitud crítica ante las informaciones que aparecen en el aula? |
| 29. El alumnado tiene que buscar fuentes de información alternativas a las utilizadas en el aula |
| 30. El libro de texto refleja los contenidos por los que el profesorado debe guiarse |
| 31. ¿Crees que se debe provocar curiosidad en el proceso de aprendizaje? |
| 32. El profesorado ideal debe validar las ideas que surgen en el aula |
| 33. ¿Piensas que el profesorado siempre debe dar la información correcta? |
| 34. El profesorado debe ir a clase previamente informado sobre las características del alumnado |
| 35. El profesorado ideal plantea preguntas para las que no se tienen respuestas a priori |

Estos ítems (Tabla 1) se diseñaron a partir del instrumento de CEAM (Climent, 2005). Dado que este instrumento había sido concebido para profesores en ejercicio y adaptado también para profesores en formación, la posibilidad de usarlo con estudiantes de Psicología o Matemáticas (sujetos que no necesariamente se van a dedicar a la profesión docente) requirió eliminar cuestiones relacionadas directamente con la profesión.

La validación del instrumento se realizó mediante discusiones entre los investigadores y se sometió también a un juicio de expertos, incluyendo a los miembros del grupo SIDM, autores del instrumento original. Se analizaron las preguntas que ya existían, manteniéndose sin alteración algunas, modificando ligeramente otras, y finalmente introduciendo alguna nueva. Además, se calculó el coeficiente alfa de Cronbach (0.76) cuyo valor aporta consistencia al instrumento.

El cuestionario se diseñó y distribuyó mediante Google Forms®. El posterior análisis de datos se llevó a cabo utilizando el software SPSS®, versión 24.2.

## Resultados

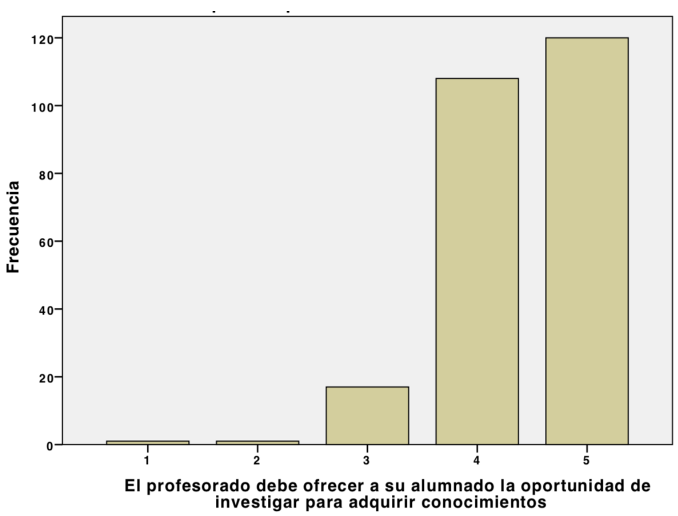
### Descripción de la muestra

El 70.9% de los encuestados (175) no declara tener experiencia docente en matemáticas a ningún nivel (formar o no formal), mientras que de los 72 que sí la tienen, prácticamente todos declaran haber dado clases particulares de matemáticas, por períodos de meses o, como mucho, dos años. Además, sólo 26 de los encuestados (un 10.5%) declara haber comenzado otros estudios con anterioridad a los que ahora mismo realiza (no repitiéndose ningún grado en más de dos casos). Ello respalda la idoneidad de la muestra para aplicar el CEAM a personas sin experiencia docente o sin expectativas de llegar a serlo.

### *Resultados del cuestionario*

En primer lugar, incluimos un análisis descriptivo de los valores de los ítems sobre las concepciones, para, posteriormente, comentar en detalle los resultados que consideramos más relevantes. En general, los niveles de acuerdo en la puntuación de los ítems fueron altos, con modas que llegan a alcanzar el máximo valor (ítems 2, 12, 21, 27 y 31), y siempre mayores o iguales a 3 con la excepción del ítem 19. Las medianas son también altas y tienen un gran nivel de correspondencia con las modas, lo que da idea de la consistencia de las respuestas. Se alcanzan medianas de 5 en algunos ítems (12, 21, 27 y 31). Los valores medios también están próximos a las medianas, aunque considerando la desviación típica se aprecian ítems con respuestas más dispersas (1, 13, 19 y 33). En general, los ítems ligados a la tendencia tradicional o tecnológica reciben valores medios inferiores a aquellos relacionados con las tendencias espontaneísta e investigativa.

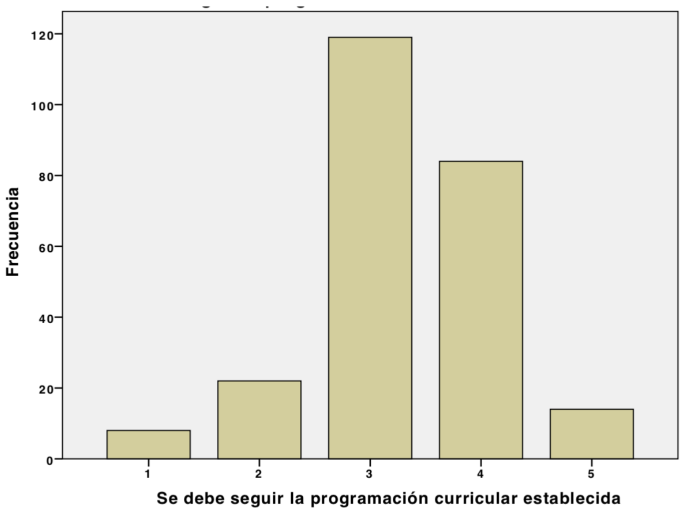
**Figura 1**
**Distribución de resultados del ítem 2**



Las respuestas a algunos de los ítems han llamado nuestra atención de forma particular. Por ejemplo, el ítem 2 (“El profesorado debe ofrecer a su alumnado la oportunidad de investigar para adquirir conocimientos”) ofrece un alto grado de acuerdo, con un 80% de los encuestados que se manifiestan “de acuerdo” o “muy de acuerdo”, como se aprecia en la Figura 1.

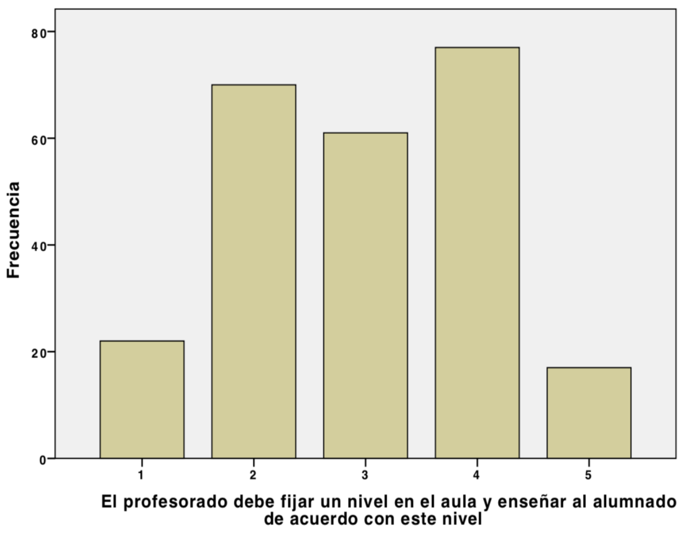
Otros ítems presentan una distribución más simétrica, como el ítem 7 (“Se debe seguir una programación curricular establecida”), que se reproduce en la Figura 2, o el ítem 13 (“El profesorado debe fijar un nivel en el aula y enseñar al alumnado de acuerdo con este nivel”), que se recoge en la Figura 3.

**Figura 2**
**Distribución de resultados del ítem 7**




Finalmente, mostramos los resultados del ítem 19 (“¿Piensas que el profesorado debe ser quien tenga la mayor importancia en el aula?”), que fue el que menor grado de acuerdo consiguió. Se observa (Figura 4) que, aunque la mayoría están en desacuerdo, hay varias respuestas que están de acuerdo incluso muy de acuerdo con la afirmación.

**Figura 3**
**Distribución de resultados del ítem 13**



Al realizar un test de Kruskal-Wallis, se han encontrado diferencias significativas debidas a la titulación de origen de los estudiantes en los valores medianos de los ítems 1, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 13,14, 18, 19, 22, 30, 33 y 34, es decir en un 42.8% de los ítems.

## Discusión y conclusiones

Los resultados anteriores sugieren una tendencia más espontaneísta o investigativa de las concepciones sobre la E-A de las matemáticas en estudiantes universitarios con diferentes perfiles formativos. Dentro de estas tendencias, se observa cierta variación entre las categorías consideradas: metodología, concepción de la matemática escolar, concepción del aprendizaje, papel del alumno, y papel del maestro. Lo anterior sugiere analizar con mayor detalle los datos para determinar una clasificación por tendencias de grupos de estudiantes y analizar si existen o no diferencias significativas entre sus perfiles formativos. Tal y como se ha comentado, la elección de las titulaciones que conforman la muestra radica en la participación de sujetos con estos perfiles formativos en un proyecto de evaluación de la práctica docente. Analizar si existen diferencias en las concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas entre los estudiantes universitarios de diferentes titulaciones nos permitirá averiguar si existe algún tipo de sesgo entre los evaluadores determinado por su perfil académico.

**Figura 4**
**Distribución de resultados del ítem 19**


Por lo tanto, como conclusiones del estudio señalamos, en primer lugar, que hemos utilizado una adaptación del instrumento CEAM para obtener una imagen global de las concepciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en estudiantes universitarios de diferentes perfiles y, en segundo lugar, que esta aplicación evidencia la robustez del instrumento de CEAM en la determinación de las concepciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en sujetos que, a priori, no van a ser docentes o no tienen por qué llegar a serlo.

Con la vinculación del instrumento de CEAM al modelo MTSK hemos conseguido utilizar dos instrumentos de análisis para intentar esclarecer aquello integrado y complejo del propio conocimiento, y puesto que es algo que no es único del profesor de matemáticas, es oportuno investigarlo también en otros perfiles. De este modo, pretendemos, en el futuro, combinar el análisis de la evaluación docente, con un análisis de los evaluadores de la misma, que parta de una visión no tan profesionalizada (i.e., cuando el observador o evaluador es un profesor en formación o profesor en ejercicio) sino que aporte también la visión del discente, es decir, cómo valora una clase de matemáticas un alumno que la recibe, sin que necesariamente esté siendo formado para llegar a ser docente de matemáticas. Consideramos que, ya que algunas investigaciones en MTSK ponen de relieve que la parte central (creencias), incluye también otros descriptores del dominio afectivo como son las emociones epistémicas y la identidad del profesor (Gómez-Chacón, García-González, Carmona, Fernández-Gago, 2017), el estudio de las creencias en el modelo MTSK es un campo vivo, abierto y que estudios como el que vamos a llevar a cabo, combinados con la aplicación de este instrumento, pueden contribuir a clarificar este campo.

## Referencias


Aguilar, A. (2016). *El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas* (Tesis doctoral). Universidad de Huelva, Huelva, España.

Aguilar, A., Muñoz-Catalán, C., y Carrillo, J. (2019). An example of connections between the mathematics teachers' conceptions and specialised knowledge. *EURASIA. Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(2), 1-15.

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. J*ournal for Research in Mathematics Education, 21*, 132-144.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*. DOI 10.1080/14794802.2018.1479981.

Climent, N. (2005). *The professional development of the Primary teacher regarding the teaching of mathematics. A case study* (Tesis doctoral). Michigan: Proquest Michigan University.

Contreras, L. C. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problema.* Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Fennema, E., y Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and Its Impact. En D. A. Grouws (Eds.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 147-164). Reston, Virginia: NCTM.

Gómez-Chacón, I. Ma, García-González, M., Carmona, K. y Fernández-Gago, J. (2017). El dominio afectivo en el MTSK. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 26-28). Huelva: CGSE.

Maasepp, B., y Bobis, J. (2015). Prospective primary teachers' beliefs about mathematics. *Mathematics Teacher Education and Development, 16*(2), 89-107.

Montes, M. A. (2016). Las creencias en MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 55-59). SGSE: Huelva.

Muñiz-Rodríguez, L. (2017). *Initial education of future secondary mathematics teachers in Spain* (Tesis doctoral). Universidad de Oviedo, Oviedo, España.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 1*, 257-315.

RSME (Real Sociedad Matemática Española). (2019). *Boletín de la RSME*, *619*.

Thompson, A. G. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 105-127.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York, NY: Macmillan.

Zoitsakos, S., Zachariades, T., y Sakonidis. C. (2015). Secondary mathematics teachers' content knowledge for teaching in two contexts: Interpreting versus managing didactically students' understandings. En K. Krainer, y N. Vondrová (Eds.), *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3296-3302), Prague, Czech Republic.

# Conhecimento, conhecimento especializado e cultura: reflexões conceituais

Renato D. G. L. Ribeiro
José Carrillo

## Resumo

O modelo do conhecimento especializado do professor de matemática (MTSK) adota entendimentos do que vem a ser conhecimento e conhecimento especializado e essas definições têm se mostrado operativas e eficazes nas análises realizadas. Ao consideramos o modelo em contextos ou objetivos que não foram explorados anteriormente precisaremos ser capazes de analisar a coerência entre distintos referenciais teóricos para garantir a eficácia da pesquisa. Exploramos algumas interações teóricas que se relacionam ou têm potencial de se relacionar com aspectos culturais e apresentamos uma proposta de interpretação do conhecimento especializado, assumindo que é um estilo de saber (style of knowing) e enxergando-o como o vínculo entre conhecimento e a cultura.

## Palavras-chave

Conhecimento, conhecimento especializado, cultura, etnomatemática, modelo dos campos semânticos.

## Abstract

The mathematics teacher's specialised knowledge model (MTSK) adopts understandings of what is knowledge and specialised knowledge and these definitions have been shown operative and effective in the analyses carried out. When we consider the model in contexts or objectives that were not previously considered we will need to be able to analyse the coherence between different theoretical references to guarantee the effectiveness of the research. We explore some theoretical interactions that relate or have potential to relate to cultural aspects and present a proposal for the interpretation of specialised knowledge, assuming that it is a style of knowing and seeing it as the link between knowledge and culture.

## Keywords

Knowledge, specialized knowledge, culture, ethnomathematics, model of semantic fields.

Ribeiro, R. D. G. L. y Carrillo, J. (2019). Conhecimento, conhecimento especializado e cultura: reflexões conceituais. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (201-209). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Conceituações diversas

O modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK) adota, obviamente, um entendimento do que vem a ser *conhecimento especializado* e, por sua vez, um entendimento para *conhecimento.* Tais definições são coerentes com os trabalhos desenvolvidos sobre o tema, especialmente no âmbito do SIDM – *Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática* – da Universidade de Huelva, na Espanha. No entanto, à medida que a utilização do modelo extrapola a aplicação inicialmente idealizada e se aproxima de outros referenciais teóricos, devemos nos certificar se esses referenciais, entre si, continuam a ser consistentes. Com a finalidade de apoiar estudos posteriores que busquem a uma melhor compreensão acerca do conhecimento especializado do professor de matemática que se relaciona com aspectos culturais dos estudantes, este trabalho procura refletir criticamente sobre a definição de conhecimento adotada, especialmente quando confrontada com outras visões sobre o que vem a ser conhecimento ou que se referem ao conhecimento.

Montes et al. (2014) apontam que a literatura que se relaciona com os modelos de conhecimento do professor de modo geral dão pouca ênfase em apresentar posicionamentos epistemológicos no que se refere ao conhecimento e, da mesma forma, assim se apresentam muitos trabalhos que valorizam aspectos socioculturais e evidenciam questões sobre o conhecimento.

A abordagem aqui adotada foi de explorar alguns trabalhos em Educação Matemática que têm a preocupação de conceituar cultura e/ou conhecimento e que ainda não foram discutidos em trabalhos sobre o conhecimento especializado e evidenciar similaridades ou possíveis divergências com os entendimentos sobre *conhecimento* e *conhecimento especializado* expressos em investigações que consideram o MTSK. Finalizamos com uma proposta de compreender o conhecimento especializado como o vínculo entre conhecimento e cultura.

## Natureza do conhecimento para o MTSK

O principal debate sobre a natureza do conhecimento em trabalhos sobre o MTSK pode ser encontrado em Montes et al (2014). Aqui apresentamos uma breve compilação de alguns elementos ali discutidos sem a pretensão de sermos exaustivos e com a preocupação de resgatarmos o essencial à presente discussão.

Para servir de base para o MTSK, os autores adotam uma definição de conhecimento previamente apresentada por Schoenfeld (2011) e, de fato, tal definição passou a ser referência para trabalhos posteriores sobre o tema (Escudero-Ávila, 2015; Liñan-Garcia, 2017; Montes, 2015; Vasco-Mora, 2015). Para o pesquisador, o conhecimento de um indivíduo é “a informação que tem potencialmente disponível para usar para resolver problemas, alcançar metas, ou desenvolver qualquer tarefa” (Schoenfeld, 2011, p.25).

Para os trabalhos que exploram o MTSK tal definição tem sido eficaz e eficiente, mas precisamos ter certeza que continuará a ser operativa quando for relacionada a outras perspectivas, em especial em relação a linhas de pesquisa que consideram aspectos culturais, tanto na própria criação daquilo que chamamos de Matemática, quanto na sua influência no ensino e na aprendizagem.

Montes e colegas prosseguem analisando de forma pormenorizada a definição de conhecimento de Schoenfeld e destacam alguns termos essenciais. Entendem que a expressão "informação disponível" é ampla suficiente para "abarcar ações, compreensões de diferentes tipos (...) e é adaptável a diferentes situações" (Montes et al., 2014, p.10) e que a expressão "para usar" determina que o conhecimento não é toda e qualquer informação disponível, mas somente aquelas cujo uso tenha sentido para os desafios e tarefas a desempenhar. E nesta direção, a ideia de conhecimento especializado se refere a conhecimentos para tarefas específicas, no caso a profissão de docente de Matemática. E, além disso, concordam com Schoenfeld ao admitir que o problema da verdade do conhecimento é distinto da natureza do conhecimento, ou seja, o conhecimento não precisa ser "correto" para ser assim reconhecido.

## Natureza do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática

Um grupo de pesquisadores preocupados em compreender o conhecimento do professor, mas que trabalham em diferentes linhas de investigação, promoveram um estudo conjunto para tentar responder, dentre outras coisas, o que produz o caráter especializado do conhecimento. Para isso, Scheiner et al. (2019) consideraram diversos estudos que versam sobre o conhecimento do professor e constataram uma diversidade de conceituações e orientações acerca do tema, muitas vezes assumidos implicitamente, e propuseram deixá-los explícitos.

Nesta análise verificaram os pontos centrais dessas diversas propostas, identificando os pontos críticos principais e, além disso, apresentaram pontos de vista alternativos que convergem para o entendimento de que a especialização do conhecimento do professor de matemática não é um tipo de conhecimento, mas um *estilo de saber (style of knowing)*, e o que os autores chamam por saber se refere ao processo pelo qual resulta em um conhecimento e não a um acúmulo de conhecimentos. Em outras palavras, o caráter especializado do conhecimento se relaciona não somente com "o que" se conhece, mas também com "como" se conhece e com "como e em que" contexto se usa. Esta proposta de considerar o conhecimento especializado como um processo é decorrente da abordagem adotada que procurava dispensar referenciais externos para defini-lo, evitar uma abordagem reducionista enfatizando a linha epistemológica relativa ao conhecimento do professor de matemática e transformadora, ressaltando as interações complexas do conhecimento e internas a uma estrutura dinâmica (Scheiner et al., 2019).

## Artefatos e Mentefatos

A partir de uma conceituação de cultura, D'Ambrosio (1986) discute a relação entre ensino de Matemática e nos ajuda a entender sobre porque a aquisição de conhecimentos influencia diretamente na hierarquização de comportamentos, que os define como individual, social e cultural. Para o autor, o comportamento cultural

> *dá origem por um lado às artes e às técnicas como manifestações do fazer, incorporando à realidade artefatos e, por outro lado, as idéias, tais como religião, valores, filosofias, ideologias e ciência como manifestações do saber, que se incorporam à*

> *realidade na forma de "mentefatos". São essas formas que se incorporam à realidade, os artefatos e os mentefatos que resultam da ação, e que ao se incorporarem à realidade, vêm modificá-la. Aí se situa a tecnologia, como síntese de artefatos e de mentefatos. (D'Ambrosio, 1986, p. 47)*

Em trabalho mais recente, D'Ambrosio apresenta uma modificação sobre o que entende sobre mentefatos e afirma que são "as abstrações, o imaginário, as ilusões e desilusões, sonhos e crenças, mesmo a ficção, que pertencem à mente de cada indivíduo" (D'Ambrosio, 2018, p. 202).

Considera-se que o primeiro uso do termo foi feito por Julian Huxley, que defendeu que a cultura consistia em um "corpo compartilhado ou compartilhável de construções materiais, mentais e sociais (´artefatos, mentefatos e sociofatos´) criadas por indivíduos humanos vivendo em sociedade (Huxley, 1955, p. 10) e, de forma mais precisa, descreveu os mentefatos como as construções mentais que "realizam funções intelectuais, estéticas, espirituais, éticas ou psicológicas" (p. 17).

Robert Aunger (2002) também utiliza o termo *mentefatos* para designar as criações humanas que não são físicas, como as crenças, valores e ideias. Aunger aponta que a tentativa de conceituar a cultura somente obtém um alto grau de consenso entre os pesquisadores ao reconhecer que a cultura consiste em 'coisas da nossa cabeça', ou seja, os mentefatos. E o termo vem ganhando espaço também na psicologia cognitiva com as propostas de classificações de mentefatos realizadas por De Zubiría (1998), embora o autor se aproprie do termo e se afaste do debate originário relacionado à cultura.

Comparando o que dizem podemos assumir que, na verdade, os mentefatos propriamente ditos não são incorporados à realidade, mas sim a manifestação desses mentefatos com gestos, palavras e ações que são acrescentados à realidade que, segundo D'Ambrosio (2018), são sociofatos. Ou seja, na verdade, essas representações dos mentefatos atuam sobre o mundo da mesma forma que os artefatos.

## O conhecimento para o Modelo dos Campos Semânticos

O Modelo dos Campos Semânticos (MCS), desenvolvido por Rômulo Lins, estabelece de forma clara um entendimento do que vem a ser conhecimento, tendo como uma das intenções distinguir conhecimentos. Por exemplo, é capaz de descrever as diferenças entre a afirmação de uma criança que diz que 5+7=7+5 da de um professor de Matemática que diz que 5+7=7+5. Não estamos interessados aqui em descrever o MCS, mas tão somente resgatar o que é conhecimento para o MCS para, em seguida, evidenciar similaridades e discrepâncias entre outras formas de conceber o conhecimento.

Para Lins, o conhecimento "consiste em uma crença-afirmação (o sujeito enuncia algo em que acredita) junto com uma justificação (aquilo que o sujeito entende como lhe autorizando a dizer o que diz)" (Lins, 2012, p. 12).

Sendo que justificação:

> *Não é justificativa. Não é explicação para o que digo. Não é algum tipo de conexão lógica com coisas sabidas. É apenas o que o sujeito do conhecimento (aquele que o produz, o enuncia) acredita que o autoriza a dizer o que diz. (Lins, 2012, p. 21)*

Assim, a afirmação 5+7=7+5 é um conhecimento diferente quando dita por uma criança ou por um professor de Matemática, visto que o professor tem justificações diferentes das que a criança pode apresentar.

## Interconexão Conhecimento-Cultura

Nas últimas décadas uma diversidade de estudos em Educação Matemática considera a cultura sob diferentes enfoques. Alguns a colocam com um papel central e outros, apesar de não atribuírem tanta importância, a apresentam como essencial. Criam-se diversas áreas de pesquisa que questionam a própria Matemática como um *corpus* de conhecimentos livre de aspectos culturais e, assim sendo, colaboram significativamente para reinterpretar o ensino de Matemática.

Appelbaum e Stathophoulou (2016) analisam essa diversidade e afirmam que poucas investigações analisam a questão cultural dos alunos como sendo uma multiplicidade de culturas, sendo que a tendência é colocar o rótulo de "cultura" como algo único, pelo menos para um determinado grupo. Isso colabora para os autores sugerirem que é necessário, diante de tantas conceituações sobre cultura, entender melhor o que se entende por cultura e pensar alternativas à cultura como um papel central na educação matemática.

Os autores não apresentam uma definição precisa de conhecimento, mas dizem "que o conhecimento é relacionado à experiência em mundos culturais e sociais, e que o conhecimento passa por sistemas sociais e culturais e instituições por meio de normas, valores, convenções e práticas. Ao mesmo tempo essas normas, valores, convenções e práticas socializadoras passam por estruturas de realidade e ideologia associadas com o conhecimento" (Appelbaum e Stathopoulou, 2016, p. 337). E complementam propondo um repensar sobre o papel da cultura em relação ao conhecimento, argumentando que a cultura não deve ser vista como um contexto para o conhecimento, assim como o conhecimento não deve ser visto como um contexto para a cultura. Por fim adotam o conceito de cultura apresentado por Clifford Geertz. Para Geertz a cultura é um "padrão de significados historicamente transmitidos incorporados em símbolos, um sistema de concepções herdadas expressas em formas simbólicas por meio dos quais os homens comunicam, perpetuam e desenvolvem, em relação à vida, seu conhecimento e suas atitudes" (Geertz, 1992, p. 88).

## Uma Síntese

Acima apresentamos algumas conceituações e reflexões sobre os termos *conhecimento*, *conhecimento especializado* e *cultura*. Sabemos que essas conceituações não apresentam pontos de vista que podem ser equiparados, e não é nossa intenção equipará-los. Desejamos aqui expor as bases do marco teórico do MTSK à luz de algumas outras produções em Educação Matemática que ainda não foram relacionadas ao modelo de modo a explicitar conexões e verificar correlações de ideias que parecem apontar em uma mesma direção.

Consideramos que o Modelo dos Campos Semânticos (MCS) traz ideias que são mais "distantes" do MTSK, no entanto, a conceituação que apresenta sobre conhecimento é perfeitamente coerente internamente ao MCS. Ressaltamos o que, a nosso ver, é a principal diferença: para o MCS o conhecimento é somente aquilo que se enuncia e simplesmente não existe fora disso, enquanto para o MTSK, que utiliza a proposta de Schoenfeld (2011), se refere a uma informação que um indivíduo possui e potencialmente pode utilizar. Pois bem, o conhecimento para o MCS se torna, portanto, completamente operativo já que o observador sempre tem acesso direto ao conhecimento, que são as próprias palavras verbalizadas, enquanto o conhecimento para Schoenfeld é uma informação para usar, mas que não necessariamente precisa ser usada, ou seja, nem sempre é identificada por quem observa. Além disso, poderíamos supor que o que foi verbalizado não coincide perfeitamente com as informações usadas para que aquilo fosse dito, ou seja, o que foi expresso em palavras é uma síntese do que foi mobilizado pelo indivíduo na hora de falar. Dessa forma temos mais um caso em que continuamos sem ter acesso direto ao conhecimento do indivíduo. O MCS, por outro lado, não considera o que não é enunciado como conhecimento, embora Lins (2012) faça a ressalva que acredita ser possível enunciar algo para si mesmo.

Em relação a essas informações que o sujeito tem, mas não acessíveis a um observador, o mentefato se constitui como uma boa descrição. Os mentefatos já são frutos da criação humana e, portanto, se fazem disponíveis para serem usados para resolver problemas, alcançar metas ou desempenhar uma tarefa, que são as condições apresentadas por Schoenfeld. No entanto, equiparar o mentefato a uma informação é algo que ainda precisa ser melhor debatido e, por esse motivo, talvez seja apressado dizer que o mentefato é consistente com a definição adotada de conhecimento. Ao interpretarmos o conhecimento do professor utilizando o MTSK, estamos na verdade considerando as representações desses mentefatos, ou seja, os "artefatos sociais", ou sociofatos, que são isentos de uma forma física. Pressupomos que a análise desses sociofatos nos ajude a esboçar os mentefatos do sujeito da pesquisa, embora necessitemos admitir que os mentefatos são, na verdade, inacessíveis.

Voltemos agora nossa atenção ao caráter especializado do conhecimento. O MCS e os mentefatos, sem uma discussão mais profunda, não colaboram diretamente para um repensar dessa especialização. No entanto, aqui destacamos o caráter de interdependência entre conhecimento e cultura proposto por Appelbaum e Stathopoulou (2016). Para eles, a cultura se refere a uma comunicação de significados por meio de símbolos, que pode ser a linguagem, e que desenvolvem os conhecimentos e atitudes. Retomamos aqui o ciclo realidade-reflexão-ação-realidade apresentado por D'Ambrosio (1986) que caminha no mesmo sentido do conceito de cultura de Geertz (1992), no entanto Geertz não explicita que a própria cultura é influenciada pelo desenvolvimento do conhecimento, embora essa ideia pemeie sua obra. Afirmar que o conhecimento depende da cultura e que a cultura depende do conhecimento implica que uma das coisas não pode existir sem a outra.

Retomando a proposta de Scheiner et al. (2019) em que a chave para compreender o que produz a especialização do conhecimento do professor de Matemática não consiste somente em descrever "o que" o professor conhece, mas em "como" ele conhece e "como usa" esse conhecimento, e sintetizam que a especialização não é um tipo de conhecimento, mas um processo que produz o conhecimento, vemos relação direta com a conceituação de cultura adotada por Appelbaum e Stathopoulou (2016). Para esses autores, o conhecimento é resultado da cultura tanto quanto a cultura é resultado do conhecimento, ou seja, há uma conexão permanente entre conhecimento e cultura.

Considerando essa interconexão sugerimos que o caráter especializado do conhecimento pode ser interpretado como a própria conexão com o aspecto cultural em questão (Figura 1), que neste caso seria a "cultura do professor de Matemática" e não o conceito abstrato de cultura. Desta forma, como nos referimos à cultura em que o professor de Matemática está inserido, garantimos o aspecto intrínseco requerido por Scheiner et al. (2019).

**Figura 1**

**Conhecimento especializado como conexão**


Podemos ilustrar com um exemplo: ao ensinar soma de frações o professor percebe que muitos estudantes estão cometendo o erro de somar os numeradores entre si e também os denominadores, então este professor começa adquirir uma série de conhecimentos relacionados com esse fato que costuma acontecer em suas aulas, e começa a criar maneiras de explicar aos alunos tanto algoritmos eficazes como de mostrar o porquê daquela forma não ser correta, e tudo isso passa a compor o rol de conhecimentos do professor. Por exemplo, o professor argumenta que se aquele procedimento fosse válido, então e percebe que esse exemplo é eficaz para que seus alunos, além de ficarem convencidos de que aquele algoritmo não funciona, costumam se lembrar mais facilmente que não podem fazer daquele jeito. Essas novas coisas que o professor conhece só passaram a ser conhecidas por ele porque está imerso em um ambiente que possui uma dinâmica social própria (cultura), além disso o ajudam a resolver os problemas que ele enfrenta nesta mesma dinâmica e, portanto, assumem um caráter especializado.

Entendemos que essa visão torna possível estabelecer relações diretas e interpretar o próprio conhecimento especializado a estudos que valorizam o papel da cultura na construção do conhecimento do indivíduo.

## Considerações Finais

As investigações acerca do conhecimento especializado do professor de matemática carregam pressupostos e conceitos que figuram em seu marco teórico e, no entanto, esses pressupostos e conceitos também estão presentes em pesquisas em Educação Matemática que possuem outras preocupações. Embora seja necessário celebrar tamanha diversidade na área, também é necessário que a comunidade acadêmica busque uma unidade e uma compreensão mútua e respeitosa dos desafios e metas que cada um enfrenta e busca alcançar. Atenção especial merecem os conceitos mais gerais.

Ao desejarmos compreender e interpretar o conhecimento que o professor mobiliza, reconhecemos que o MTSK se constitui como uma ferramenta dentre muitas outras nesta tarefa e nos parece desejável que os pesquisadores empenhados nela possam influenciar outros pesquisadores de outras perspectivas, assim como ser influenciados por eles. Se os pressupostos, porém, forem contraditórios, então estaremos diante de uma barreira praticamente intransponível para essa influência mútua.

Neste sentido, o presente trabalho busca estabelecer relações entre alguns dos pressupostos do MTSK com perspectivas de trabalho em outras linhas e com pressupostos não necessariamente idênticos, para que seja possível vislumbrarmos quando esses trabalhos percorrem caminhos em um mesmo sentido, embora em trajetórias paralelas.

Resgatamos uma conceituação de conhecimento construída por Lins (2012) e destacamos em quais pontos esta conceituação se distingue da de Schoenfeld (2011) e alguns pontos em que se aproximam. Essa comparação, que não tem como objetivo escolher uma melhor, permite que enxerguemos com maior nitidez as potencialidades de cada definição.

A ideia de que o conhecimento é uma informação que alguém possui e que tem algumas características, mas que não deixa de ser uma informação, pode ser operativa e nos satisfazer em nossas análises. No entanto, a palavra informação também nos traz a ideia de um caráter estático, de um registro que pode ou não ser usado – ferramenta – e isso afasta a individualidade do sujeito diante desta informação e o processo criativo do conhecimento como parte do conhecimento. D'Ambrosio (1986) e Aunger (2002) exploram a questão sugerindo que da mesma forma que criamos objetos ou outras coisas, que chamamos de artefatos, há também as criações mentais, os pensares. Para isso, por analogia aos artefatos, atribuem o nome de mentefatos. Poderíamos considerar os mentefatos como conhecimento?

Por último, exploramos a ideia de conhecimento especializado que é dependente da ideia de conhecimento. Para isso consideramos a recente análise de Scheiner et al. (2019) que após um estudo detalhado da diversidade de trabalhos que procuram compreender e interpretar o conhecimento do professor de Matemática se empenham em estabelecer uma convergência de alguns pontos de vista alternativos às análises mais comuns sobre o tema. Dentre as conclusões, afirmam que a especialização do conhecimento não deve ser entendida como "o quê" os professores sabem, mas "como" os professores sabem e para isso dão o nome de *style of knowing*, que aqui traduzimos por estilo de saber. Considerando o que dizem Appelbaum e Stathopoulou (2016) em que há uma interconexão entre conhecimento e cultura, percebemos que esses autores também falam sobre um processo que resulta em um conhecimento sobre algo específico. Assim, aqui sugerimos que o próprio conhecimento especializado pode ser identificado com esse processo, estabelecendo-o como o próprio vínculo entre os conceitos.

Acreditamos que as reflexões aqui realizadas são significativas para apoiar trabalhos futuros que planejem relacionar o MTSK com outras áreas previamente não associadas com seu referencial teórico, em especial quando relacionadas a aspectos culturais.

## Agradecimientos

Este trabalho foi realizado com o apoio do IFSP – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, e do Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades (Referencia RTI2018-096547-B-I00)

## Referencias

Appelbaum, P., e Stathopoulou, C. (2016). Critical Issues in Culture and Mathematics Learning. En L. D. English, e D. Kirshner, *Handbook of International Research in Mathematics Education* (3 ed.), 336-358. New York: Routledge.

Aunger, R. (2002). *The eletric meme: a new theory of how we think.* York & London: Free Press.

De Zubiría, M. (1998*). Pedagogías del siglo XXI: Mentefactos I. El arte de pensar para enseñar y de enseñar para pensar.* Bogotá: Fundación Alberto Merani.

D'Ambrosio, U. (1986). *Da realidade à ação: reflexão sobre Educação Matemática* (6ª ed.). São Paulo: Summus.

D'Ambrosio, U. (2018). Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. *Estudos Avançados, 32*(94), 189-204.

Escudero-Ávila, D. I. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria.* Tese de doutorado. Huelva, España: Universidade de Huelva.

Geertz, C. (1992). *La interpretación de las culturas.* (A. L. Bixio, Trans.) Barcelona: Gedisa.

Huxley, J. (1955). Evolution, Cultural and Biological. *Yearbook of anthropology*, 2-25.

Liñán-García, M. D. M. (2017). *Conocimiento Especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria.* Tese de doutorado. Huelva, Espanha: Universidade de Huelva.

Lins, R. C. (2012). O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações. In C. L. Angelo, E. P. Barbosa, J. R. Santos, S. C. Dantas, e V. C. Oliveira, *Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história.* São Paulo: Midiograf.

Montes, M. Á. (2015). *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del infinito : un estudio de caso.* Tese de doutorado. Huelva, Espanha: Universidade de Huelva.

Montes, M., Flores-Medrano, E., Carmona, E., Huitrado, J. L., e Flores, P. (2014). Reflexiones sobre la naturaleza del conocimiento, las creencias y las concepciones. En J. Carrillo, L. C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano, e M. Á. Montes, *Un* *marco teórico para el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas.* Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., e Pino-Fan, L. R. (2019). What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(1), 153-172.

Schoenfeld, A. H. (2011). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications.* New York and London: Routledge.

Vasco-Mora, D. L. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de álgebra lineal: un estudio de casos en el nivel universitario.* Tese de doutorado. Huelva, Espanha: Universidade de Huelva.

# El uso de un vídeo de animación para promover conocimiento especializado sobre medida en estudiantes para maestro de Educación Infantil

Myriam Codes
Mª. Cinta Muñoz-Catalán

**Resumen**

Se analiza el potencial de un capítulo de una serie de dibujos animados para movilizar en el estudiante para maestro de Educación Infantil conocimiento especializado sobre el tema de medida de magnitudes. Se han identificado distintos momentos en los que se puede movilizar conocimiento sobre propiedades, procedimientos, definiciones y fenomenología de esta noción matemática. Además, se vislumbran situaciones en las que pueden emerger otros subdominios del conocimiento especializado de matemáticas del estudiante para maestro de Educación Infantil.

**Palabras clave**

Estudiante para maestro de Educación Infantil, medida de magnitudes, dibujos animados, conocimiento especializado del profesor de matemática (MTSK), conocimiento de los temas (KoT).

**Abstract**

The potential of a chapter of a series of cartoons is analyzed in order to show how this can trigger specialized knowledge on early childhood prospective teachers. Different moments have been identified in which knowledge about the properties, procedures, definitions and phenomenology of this mathematical notion can be triggered. In addition, there are glimpses of situations in which other sub-domains of the mathematics prospective teacher's specialized knowledge may emerge (early childhood prospective teacher).

**Keywords**

Student for kindergarten teacher, magnitude measurement, cartoons, Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), Knowledge of Topics (KoT).

Codes, M. y Muñoz-Catalán, Mª. C. (2019). El uso de un vídeo de animación para promover conocimiento especializado sobre medida en estudiantes para maestro de Educación Infantil. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (201-209). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Introducción

La medida de magnitudes es un contenido relevante en Educación Infantil por ser uno de los contextos que dan sentido al número. Uno de los recursos de los que dispone actualmente el maestro para sus propuestas didácticas, es el de las tecnologías de la información y la comunicación (TICs) que protagonizan el nuevo modelo de sociedad actual en el que se ve inmerso el sistema educativo (Aguiar y Cuesta, 2009). Entre ellas, el uso de vídeos de dibujos animados en un aula de Educación Infantil es un recurso TIC factible de integrar en el currículo, como muestran algunos estudios (Llorent y Marín, 2014). Llevar a cabo esta integración requiere, entre otras acciones, "usar las tecnologías para planificar estrategias para facilitar la construcción del aprender" (Sánchez, 2002, p. 2). El papel del maestro es esencial como mediador entre el uso lúdico del vídeo y su transformación en recurso del aula, de modo que él es el responsable de proporcionarle el valor educativo que puede alcanzar (Guzmán, 2011).

En esta comunicación empleamos el uso del vídeo de dibujos animados en la formación de maestros con una doble finalidad. Por un lado, como ejemplo de recurso didáctico ligado a las TICs que el estudiante para maestro de Educación Infantil (EPMI) debe conocer en su formación y, por otro lado, como herramienta para fomentar el desarrollo de su conocimiento especializado. En este trabajo nos centramos en el uso de vídeos de dibujos animados para describir el conocimiento especializado sobre la magnitud y la medida que puede movilizar un EPMI cuando visiona un episodio de la serie animada Peg+Gato y reflexiona para su uso didáctico. Presentamos un primer avance en la línea del conocimiento especializado del maestro de Educación Infantil sobre una noción matemática, en la que nos fijaremos principalmente en el conocimiento especializado de los temas que se puede movilizar en este contexto, siguiendo el aporte de Liñán (2017) sobre el conocimiento evocado por las oportunidades emergentes, en este caso, con el visionado de un episodio de Peg+Gato.

## Marco teórico

A partir del trabajo de Ball, Thames y Phelps (2008) en el que se distingue un conocimiento especializado del profesor de matemáticas para la enseñanza de esta ciencia, el modelo MTSK nos proporciona una herramienta eficaz para describir ese conocimiento (Muñoz-Catalán, et al., 2015). En él se distinguen dos grandes dominios de conocimiento, el matemático (MK) y el didáctico del contenido (PCK), además del núcleo de las creencias que afectan a todos los ámbitos del conocimiento.

Dentro del dominio del conocimiento del contenido matemático, se distinguen tres subdominios que versan sobre: el conocimiento de los temas (KoT), entendiendo por temas todo lo relativo a las definiciones, propiedades, procedimiento, fenomenología, fundamentos y modos de representación de cualquier noción matemática; el conocimiento de la práctica matemática (KPM), concerniente a aquellas formas de hacer y proceder propias de la matemáticas, como las relativas a la definición, la demostración o la resolución de problemas; y el conocimiento de la estructura matemática (KSM), que abarca los distintos tipos de conexiones que se establecen entre las nociones matemáticas: transversales, auxiliares o de complejización o simplificación.

En este trabajo se han empleado las categorías del subdominio de conocimiento de los temas (KoT) como herramienta para analizar las oportunidades que brinda el visionado de un capítulo de dibujos animados para movilizar este subdominio del conocimiento matemático especializado para la enseñanza.

## Método

Para responder a la pregunta qué conocimiento especializado sobre la magnitud y la medida puede movilizar un EPMI cuando visiona un episodio de Peg+Gato y reflexiona sobre su uso didáctico, se analizó la trascripción del capítulo “El problema del tesoro enterrado” obtenida de la web de Clan TV de TVE en abril de 2018. Esta serie la protagonizan una niña y su gato, que se ven inmersos en aventuras en las que se les plantean situaciones problemáticas que resuelven con ayuda de la matemática. Beltrán-Pellicer (2017) describe con detalle características técnicas de la serie y justifica la elección de este capítulo para trabajar la noción de magnitud y medida.

En el capítulo del problema del tesoro enterrado, Peg y Gato utilizan un mapa para encontrar un tesoro. Junto con el mapa, tienen una regla para medir, proceso que Gato desconoce y al que le enseña Peg indicando unos sencillos pasos que debe reiterar. En un momento determinado, la regla se pierde y Peg emplea a Gato como instrumento de medida, ya que la regla y él medían la misma cantidad de longitud. Siguiendo las pistas, y reiterando el proceso de medir con la unidad de medida que proporciona la altura de Gato, logran encontrar el tesoro. El capítulo finaliza con una canción que sintetiza algunas de las ideas sobre medida que se han mostrado a lo largo del capítulo.

El análisis de la trascripción se ha desarrollado en dos fases respaldadas por la teoría fundamentada y atendiendo a la sensibilidad teórica de las investigadoras (Strauss y Corbin, 1994). En primer lugar, cada una, individualmente, seleccionó aquellas intervenciones en las que reconocía situaciones propicias para movilizar conocimiento especializado sobre la medida de magnitudes. En una segunda fase, se matizaron las coincidencias y se discutieron las diferencias hasta llegar a un consenso, que es el análisis que se presenta en esta comunicación. En él solo se han marcado aquellas situaciones en las que emerge, de manera más o menos explícita, contenido matemático especializado sobre la noción de medida de magnitudes.

Se han considerado las categorías del subdominio de conocimiento de los temas (KoT) del modelo MTSK (Muñoz-Catalán, et al., 2015) para describir el conocimiento hallado por las investigadoras en las conversaciones de los protagonistas. En la tabla 1 se muestran los códigos que se han asignado al conocimiento de las investigadoras sobre la medida de magnitudes, que es el que se puede encontrar en manuales de formación de maestro de Educación Infantil, como Castro y Castro (2016), Chamorro (2005) o Muñoz-Catalán y Carrillo (2018). Las letras F, Pc, Pp y D corresponden, respectivamente, a las categorías del subdominio KoT: Fenomenología y aplicaciones, Procedimientos, Propiedades y Definición (Muñoz-Catalán, et al., 2015).

**Tabla 1**
**Codificación de las acciones asociadas a las categorías del subdominio KoT**

| | |
|---|---|
| Saber que la magnitud longitud es uno de los fenómenos en cuyo contexto surge la medida. | KoT-F1 |
| Saber que medir es una de las prácticas matemáticas ligadas a contextos físicos en los que la matemática es una herramienta eficaz. | KoT-F2 |
| Saber que para medir hay que iterar la unidad de medida tantas veces como quepa en la cantidad de magnitud. | KoT-Pc1 |
| Saber que por comparación directa se puede conocer si dos cantidades de longitud son iguales. | KoT-Pc2 |
| Saber cómo ha de colocarse la unidad de medida para realizar las marcas sucesivas necesarias para completar la medición de una longitud. | KoT-Pc3 |
| Saber que el uso de instrumentos cuya cantidad de magnitud -en este caso la longitud- es igual, no varía el resultado de la medición -equivalencia de unidades de medida-. | KoT-Pc4 |
| Saber que una de las unidades de medida que se pueden emplear son las antropomórficas. | KoT-Pc5 |
| Saber que el proceso de medición debe ser preciso para que el resultado sea la medida real, y que la medición precisa no acarea errores. | KoT-Pc6 |
| Saber que la iteración de una unidad es una idea clave de la medida. | KoT-F1 |
| Saber que medir conlleva contar; esto muestra una cualidad de la medida como cardinal del conjunto formado por tantas unidades de medida, como veces cabe la unidad en el objeto medido (definiciones). | KoT-D1 |
| Saber qué características debe tener un objeto para que se pueda emplear como unidad de medida de magnitud longitud | KoT-Pp1 |
| Saber que la iteración de una unidad es una idea clave de la medida. | KoT-Pp2 |
| Saber que una cualidad de la magnitud longitud es que puede medir una dimensión o una distancia -el menor “espacio” existente- entre dos puntos. | KoT-Pp3 |
| Saber que el resultado de una medida conlleva un número acompañado de una unidad de medida. | KoT-Pp4 |
| Saber que “ser tan alto como” es la consecuencia de medir lo mismo. | KoT-Pp5 |
| Saber que la cantidad de magnitud de un objeto permanece invariante ante cambios de posición o forma -principio de conservación de la magnitud-. | KoT-Pp6 |
| Saber que, si un objeto mide la misma cantidad que un segundo objeto, y este a su vez mide lo mismo que un tercer objeto, entonces el primer objeto y el tercero miden la misma cantidad -propiedad transitiva-. | KoT-Pp7 |

## Análisis y resultados

Desde el comienzo del capítulo se advierten distintos elementos del conocimiento del contenido relativos al conocimiento de los temas, subdominio del modelo en el que centramos el análisis. Los primeros elementos están ligados a las categorías de fenomenología, procedimientos y propiedades. Para facilitar la lectura, se han etiquetado las partes de la trascripción en las que nos apoyamos para sugerir el conocimiento que se puede movilizar y se han agrupado en escenas para organizar el análisis.

*Peg: Soy Peg y este es Gato. Y no os lo vais a creer, pero en algún lugar de esta isla desierta hay ¡un tesoro enterrado! (…) Y tenemos las herramientas adecuadas para encontrarlo. Nuestro amigo Ramón nos dio este mapa. Y una regla de medir para ayudarnos (KoT-F1).*

*Gato: Es tan alta como yo (KoT-Pc2).*

*Peg: Es perfectamente recta, lo que significa que es ideal para medir cosas (KoT-Pp1).*

*(…)*

*Peg: El mapa nos dirá exactamente a dónde tendemos que ir para encontrar el tesoro. Esto es el árbol de plátanos donde estamos ahora. El mapa dice que tenemos que ir a: 1, 2, 3, 4, 5 marcas a lo largo de la orilla hasta una gran roca donde nos encontraremos con nuestra siguiente pista (KoT-D1).*

*Gato: Cinco marcas. Pero si solo tenemos una regla.*

*Peg: No necesitamos 5 reglas para llegar, Gato. Mediremos el camino solo con esta regla (KoT-Pp2).*

Etiquetamos como KoT-F1 a saber que la magnitud longitud es uno de los fenómenos en cuyo contexto surge la medida, por lo que la intervención de Peg promueve conocimiento de la categoría fenomenología y aplicaciones. Seguidamente interviene Gato mientras se pone al lado de la regla comparando su altura con ella, por lo que consideramos que promueve un conocimiento de la categoría procedimientos, relativo a saber que por comparación directa se puede conocer si dos cantidades de longitud son iguales (KoT-Pc2). A continuación, Peg destaca una característica de la regla, promoviendo el conocimiento sobre las propiedades o características que debe tener un objeto para que se pueda emplear como unidad de medida de la magnitud longitud (KoT-Pp1).

Más adelante, en las dos intervenciones de Peg, esta continúa con un elemento clave en la medida: la idea de iteración. Por un lado, aparece implícita en el conteo de las cinco marcas, con el que se moviliza saber que medir conlleva contar (KoT-D1), y la relación del resultado de la medición con el cardinal del conjunto formado por tantas unidades de medida, como veces cabe la unidad en el objeto medido. Por otro lado, la propiedad de la regla (instrumento y unidad de medida) como elemento suficiente para realizar la medición nos sugiere que se pueda movilizar el conocimiento de la iteración de una unidad como idea clave de la medida de magnitudes, propiedad etiquetada con KoT-Pp2.

A lo largo del capítulo se seguirá este esquema, en el que Peg es la que aporta la información que puede movilizar el conocimiento de los temas, en este caso, de la medida.

Más adelante, en el curso de una canción, Peg enseña a Gato cómo se mide, aportando oportunidades para movilizar conocimiento sobre propiedades y procedimientos de la medida. Comienza y finaliza esta escena con una oportunidad para movilizar conocimiento sobre el procedimiento de medir:

*Peg: (cantando) Aprenderemos cómo hay que medir. Pon la regla en el suelo, justo aquí (KoT-Pc6). Tiene que estar firme, no se ha de doblar (KoT-Pp1). El extremo del final hay que marcar (KoT-Pc1). La distancia del árbol a la marca en la arena es lo que mide la regla (KoT-Pp3).*

*Gato: He pillado la idea.*

*Peg: Todo lo que tenemos que hacer es seguir repitiendo exactamente lo mismo hasta que hagamos 5 marcas en la arena (KoT-Pc1).*

*Gato: Qué fácil.*

*Peg: Bastante. Tenemos que hacerlo con mucho cuidado para no cometer ningún error (KoT-Pc6).*

*Peg: Pon la regla en la línea, y marca el borde bien (KoT-Pc6). Ya van 2. ¡Ja! Hazlo otra vez (KoT-Pc1). Pon la regla en la línea, y marca el borde bien (KoT-Pc6). Ya van 3. ¡Ja! Hazlo otra vez (KoT-Pc1).*

La escena de la canción comienza potenciando la movilización de conocimiento relacionado con la precisión requerida para que le medida sea exacta, procedimiento que no acarreará errores (KoT-Pc6). Seguidamente, de nuevo se potencia la movilización de conocimiento sobre las propiedades o características que debe tener un objeto para que se pueda emplear como unidad de medida de la magnitud longitud (KoT-Pp1), en este caso refiriéndose a la rectitud de la regla al indicar que debe "estar firme" y seguidamente insistiendo con la negación del antónimo "doblar".

Posteriormente, la categoría cuyo conocimiento potencialmente se moviliza desde la dimensión del modelo *cómo se hace*, (Carrillo et al., 2018) es la correspondiente al procedimiento ligado a saber cómo ha de colocarse la unidad de medida para realizar las marcas sucesivas, etiquetado en la primera intervención de PEG con KoT-Pc3. En la explicación de Peg destaca la característica de este procedimiento de la precisión requerida para que la medida sea exacta ("justo aquí"), cuestión que se repite en otros momentos del capítulo de la serie animada. A continuación, la cualidad de la magnitud longitud que señala Peg moviliza conocimiento sobre la dualidad de la magnitud longitud en cuanto a que puede referirse a una dimensión, como en el caso de la altura de Gato, o una distancia -el menor "espacio" existente- entre dos puntos. Etiquetamos esta intervención con la que se moviliza conocimiento de una propiedad con KoT-Pp3.

Finamente, antes de cantar el estribillo en el que se alternan las nociones marcadas con KoT-Pc6 y KoT-Pc1, se repiten los momentos en los que se puede movilizar conocimiento ligado a saber que para medir hay que iterar la unidad de medida tantas veces como quepa en la cantidad de magnitud a medir (KoT-Pc1) y a la necesidad de la precisión para no cometer errores (KoT-Pc6).

Antes de finalizar la canción, y con ella el camino que les llevará a la segunda pista, ocurre un accidente y una ola se lleva la regla, por lo que se han de enfrentar a una situación problema cuya solución está en las propiedades y procedimientos del tema que pone en juego Peg:

*Gato: (...) Medíamos lo mismo. ¿No? (KoT-Pp5).*

*Peg: Eso es. Tú y la regla medíais exactamente lo mismo.*

*Gato: Lo sé, lo sé.*

*Peg: Y como la altura es la misma estando de pie y tumbado (KoT-Pp6), no necesitamos la regla para seguir midiendo el camino hasta el tesoro. Podemos usar tu cuerpo. (KoT-Pc4 y*

*Gato: ¿Mi cuerpo?*

La intervención de Peg es consecuencia de la descripción de Gato con la que se puede movilizar saber que "ser tan alto como" es una consecuencia de "medir lo mismo que" (KoT-Pp5). En ella (la intervención de Peg), se puede movilizar saber que la cantidad de magnitud de un objeto permanece invariante ante cambios de posición o forma -principio de conservación de la magnitud-, conocimiento ligado a una propiedad de la medida (KoT-Pp6), y también conocimiento de dos procedimientos: saber que el uso de instrumentos cuya cantidad de magnitud es igual no varía el resultado de la medición (KoT-Pc4), y saber que una de las unidades de medida que se pueden emplear son las antropomórficas (KoT-Pc5), en este caso, el cuerpo es el de Gato.

La extrañeza de Gato se disipa cuando comprueba que, efectivamente, pueden ejecutar la medición empleando como unidad de medida su propio cuerpo, en vez de la regla. Después de alcanzar varias pistas, Peg introduce adjuntar al número resultante del conteo la unidad de medida.

*Peg: Pon la regla en la línea, y como el mapa indica, medimos 8 gatos (KoT-Pp4). A la roca del gorila.*

Esta afirmación de Peg pone en juego saber que el resultado de una medida conlleva un número acompañado de una unidad de medida, movilizando así conocimiento sobre la práctica de medir.

A partir de aquí, se repiten intervenciones en las que se vuelve a potenciar la movilización de dimensiones del conocimiento que ya han aparecido, como el relacionado con la precisión requerida en el proceso de medición para que la medida no acarree errores:

*Peg: Este debe de ser el sitio exacto donde está enterrado el tesoro. (KoT-Pc6)*

O el principio de conservación de la medida, que de nuevo tiene como protagonista a Gato. Llevada por la prisa para terminar, Peg tumba a Gato boca arriba y boca abajo, alternativamente, haciendo el cambio con premura.

*Peg: Midamos rápido; marcar y voltear. 1.*

*Gato: ¿El sol dónde está? (KoT-Pp6)*

*Peg: Marcar y voltear, 2.*

*Gato: Tengo arena en la boca. (Tose)*

Esta vez, el conocimiento del principio de conservación de la medida está relacionado con la invariancia de la cantidad de magnitud ante cambios de posición, la de Gato al cambiar de estar boca arriba a boca abajo.

Antes de finalizar el capítulo con una canción en la que a Peg y Gato se unen a sus amigos para poner letra a una canción que corea alguna de las ideas sobre la medida de magnitudes que se han trabajado en el capítulo, una intervención de Gato potencia la movilización de conocimiento sobre la medida como práctica matemática:

*Peg: Ya que seguimos las direcciones del mapa y medimos nuestro camino hasta aquí, finalmente vamos a encontrar nuestro tesoro.*

*Gato: Las mates sirven para medir. (KoT-F2)*

Con esta afirmación, por un lado, Gato moviliza conocimiento del tema relacionado con la fenomenología, concretamente con saber que medir es un procedimiento ligado a contextos físicos en los que la matemática es una herramienta eficaz.

## Conclusiones

A través del análisis de la trascripción de un capítulo de la serie de dibujos animados Peg + Gato hemos encontrado numerosos momentos en los que la trama, en boca de los personajes protagonistas, enuncia realidades que pueden movilizar en el maestro conocimiento relacionado con la noción de medida de magnitudes. Concretamente, conocimiento sobre propiedades, procedimientos, definiciones y fenomenología de esta noción matemática.

Todos estos elementos del conocimiento de la noción de medida forman parte de los contenidos que se trabajan en Educación Infantil y se pueden leer en los manuales de formación del maestro de Educación Infantil más empleados en España, como Chamorro (2005), Castro y Castro (2016) o Muñoz-Catalán y Carrillo (2018). Por ello, consideramos que la visualización de este capítulo es un buen instrumento para la enseñanza y el aprendizaje de los futuros maestros, no solo por el contenido matemático, sino por el uso del recurso del vídeo de dibujos animados como herramienta para la transposición didáctica, tanto en el aula de Educación Infantil, como en la de EPMI.

Aunque hemos centrado el foco de atención solo en el conocimiento del contenido matemático ligado al conocimiento de los temas, es necesario un estudio más profundo para esclarecer los episodios en los que además de KoT, se puede movilizar conocimiento de otros subdominios, tanto del conocimiento matemático como del conocimiento didáctico del contenido. Por ejemplo, cuando Peg dice "tenemos que ir a: 1, 2, 3, 4, 5 marcas a lo largo de la orilla", hemos señalado que se puede movilizar conocimiento de la definición del proceso de medida, pero también se puede poner en juego saber cuál es el papel del conteo en este proceso, y con ello la conexión auxiliar existente entre ambos que pertenece al subdominio del conocimiento de la estructura matemática (KSM). Análogamente, cuando Peg voltea a Gato con premura y este apunta "¿El sol dónde está?", hemos señalado que se puede movilizar conocimiento sobre la propiedad de la invariancia de la cantidad de magnitud bajo cambios en la posición (KoT propiedades), pero también consideramos que se puede plantear esta cuestión porque se sepa que, según Piaget, una de las fases de aprendizaje de la magnitud es la conservación de la misma, y con ello se anticipa una posible dificultad de los alumnos como consecuencia de su etapa de evolución, lo cual corresponde a conocimiento de las características del aprendizaje de la matemática (KFLM), concretamente vinculado con teorías de aprendizaje.

En esta comunicación nos hemos centramos en el conocimiento sobre medida de magnitudes que se puede movilizar con el visionado de un capítulo de dibujos animados diseñado ad hoc, pero el capítulo incluye también algunos guiños a otros contenidos relacionados con la medida que quedan pendientes de analizar en próximas investigaciones.

## Referencias


Aguiar, M. V., y Cuesta, H. (2009). Importancia de trabajar las tic en Educación Infantil a través de métodos como la webquest. *Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación, 34*, 81-94.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. doi:10.1177/0022487108324554

Beltrán-Pellicer, P. (2017). Análisis inicial de Peg+Gato y su tratamiento de la medida. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 6*(2), 72–79. Disponible en http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/view/39/35

Carrillo-Yañez, J., Climent, N, Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro,M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018) The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model, *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253, DOI: 10.1080/14794802.2018.1479981

Castro, E., y Castro, E. (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil*. Madrid: Pirámide.

Chamorro, M. C. (Coord.) (2005). *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil*. Madrid: Paraninfo.

Guzmán, M. (2011). El vídeo como recurso didáctico en Educación Infantil. *Pedagogía Magna, 10*, 132–139.

Liñán, M. M. (2017). Conocimiento Especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria. Tesis doctoral. Universidad de Huelva. Disponible en http://hdl.handle.net/10272/14230

Llorent, V. J., y Marín, V. (2014). La integración de los dibujos animados en el currículo de Educación Infantil. Una propuesta teórica. REICE. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 12*(1), 73-82. Disponible en: http://www.rinace.net/reice/ numeros/arts/vol12num1/art5.pdf

Muñoz-Catalán, M. C., y Carrillo, J. (Coords.). 2018. *Didáctica de las matemáticas para maestros de Educación Infantil*. Madrid: Paraninfo.

Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. A., y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la RSME, 18*(3), 589–605.

Sánchez, J. H. (2002). Integración Curricular de las TICs: Conceptos e Ideas. En M. Llamas, M. J. Fernández Iglesias, L. E. Anido (Eds.). *6 Congreso Iberoamericano, 4 Simposio Internacional de Informática Educativa, 7 Taller Internacional de Software Educativo*. Vigo, España: Universidade de Vigo, Servizo de Publicacións.

Strauss, A., y Corbin, J. (1994). Grounded Theory Methodology: An overview. En N.K. Denzin, y Y. Lincoln, (Eds) *Handbook of qualitative research* (pp. 273- 285). Thousand Oaks, C.A.: Sage.

# El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en Educación Infantil para la enseñanza de geometría

Ana Escudero-Domínguez
Dinazar Escudero-Ávila
Álvaro Aguilar-González
Diana Vasco-Mora

## Resumen

Con la finalidad de identificar y caracterizar el conocimiento que el profesor de matemáticas pone en juego al abordar la enseñanza de los cuerpos geométricos en Educación Infantil usamos el modelo analítico de conocimiento profesional Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK). Mostramos además la potencialidad de los constructos *evidencia*, indicio y *oportunidad* como instrumentos para la investigación al respecto del conocimiento profesional del profesor. Nuestra intención es proporcionar ejemplos en los que se ponga de manifiesto la potencialidad de estas herramientas metodológicas específicas para estructurar el análisis. Los resultados muestran la profundidad de los conocimientos matemáticos implicados, así como la relación de estos con elementos del conocimiento didáctico del contenido.

## Palabras clave

Educación Infantil, MTSK, cuerpos geométricos, instrumentos, ejemplos

## Abstract

In order to identify and characterize the knowledge that the mathematics teacher puts into play when dealing with the subject of geometric bodies in Early Childhood Education we use the analytical model of professional knowledge Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK). We also show the potentiality of the constructs of evidence, indication and opportunity as instruments for research on the teacher's professional knowledge. Our intention is to provide a series of real examples that show the potential of these specific methodological tools to structure the analysis. The results show the depth of the mathematical knowledge involved, as well as the relationship of these with elements of didactic content knowledge.

## Keywords

Early Childhood Education, MTSK, geometric bodies, instruments, examples

Escudero-Domínguez, A., Escudero-Ávila, D., Aguilar-González, A., y Vasco-Mora, D. (2019). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en educación infantil para la enseñanza de geometría . En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (219-227). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Introducción

En las últimas décadas, se ha venido realizando un trabajo significativo en el campo de la investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas en diferentes niveles de escolaridad. Sin embargo, se reconoce la poca producción de estudios sobre el conocimiento del profesor de Educación Infantil (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2016). Castro y Castro (2016) señalan que esto podría deberse a la extendida creencia de que las matemáticas que se aprenden en la etapa de Educación Infantil son muy sencillas y que, por tanto, cualquiera puede enseñarlas. Sin embargo, la investigación en Educación Matemática ha proporcionado *evidencias* de que las matemáticas que se trabajan en Educación Infantil engloban ideas profundas (Perry y Dockett, 2002) por la repercusión de estas en la construcción de contenidos matemáticos posteriores.

En esta comunicación nos enfocamos en caracterizar el conocimiento profesional de un profesor de Educación Infantil a la luz del modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo et al., 2018) en el cual se distingue entre conocimiento matemático, didáctico matemático y creencias sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje. Para esto, presentaremos las herramientas metodológicas que nos permitieron, primero, identificar y, después, profundizar en ese conocimiento especializado.

## Marco teórico

### *El MTSK como modelo analítico*

El modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) se considera una propuesta teórica y herramienta metodológica que permite estudiar al profesor de matemáticas en su práctica docente (Carrillo, Montes, Contreras y Climent, 2017). El MTSK está compuesto por tres dominios: *Conocimiento Matemático*, *Conocimiento Didáctico del Contenido* y *creencias/concepciones del profesor sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje*, vistas estas últimas como elementos que permean en la construcción del conocimiento y tienen un impacto directo en la forma en que este es puesto en práctica por los profesores. Los dos primeros dominios se subdividen en tres subdominios de conocimiento y cada uno de estos cuenta, a su vez, con categorías que ayudan a la identificación y caracterización de conocimientos que pertenecen a cada subdominio, que tomaremos de la propuesta adoptada por el Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (SIDM, 2016).

### *Características específicas del conocimiento profesional del profesor de Educación Infantil*

Una de las principales características de la práctica profesional del profesor de Educación Infantil es que los contenidos escolares se plantean de forma lúdica, a través del juego, de la experimentación y de las actividades diarias (Wernberg, Larsson y Riesbeck, 2010), por lo que podemos decir que la enseñanza y el aprendizaje en esta etapa tiene lugar en entornos informales. Esta forma de trabajo puede generar que los profesores que tienen un conocimiento insuficiente sobre un determinado contenido tengan más dificultades para reconocer las características específicas que deben potenciar. Por otra parte, el docente de Educación infantil debe tener presente que se trata de una etapa generadora de lenguaje. Boaler y Greeno (2000) argumentan que los discentes necesitan tener posibilidades para usar su propio lenguaje, teniendo *oportunidades* para pensar por sí mismos, para realizar sus propias interpretaciones y tomar sus propias decisiones. En esta etapa es por demás importante mantener un equilibrio entre el juego, la utilización de un lenguaje informal o hasta incorrecto por parte de los estudiantes y las características matemáticas específicas que se pretenden establecer como bases para el aprendizaje.

La geometría es una parte elemental de los contenidos básicos de formación matemática y, por tanto, es importante que se trabaje desde las primeras edades, ya que es fundamental para que los niños logren comprender el espacio en el que se mueven (Clements, 2004). Sin embargo, parece que se le otorga menos importancia que a otros bloques de contenidos, siendo el más tratado números, lo cual se confirma en estudios como los de Corrales, Sanduay, Rodríguez, Malik y Poblete (2001). Lorenzato (1995) además afirma que muchos profesores son reacios a trabajar geometría, ya que la consideran difícil y esto les causa inseguridad en su enseñanza.

## Metodología

Pretendemos mostrar al lector ejemplos concretos y reales del conocimiento profesional del profesor de Educación Infantil. Además, se muestra el uso y beneficio que tienen una serie de herramientas metodológicas para el análisis de éste, ya que el conocimiento especializado requiere de un análisis minucioso del tipo de conocimiento y de las características específicas de este para poder organizarlo y describirlo dentro de cada subdominio del MTSK.

El diseño de investigación consiste en un estudio de caso instrumental (Stake, 2005). Se trata de un estudio de caso único donde nuestro informante es Javier, un profesor en activo con más de 10 años de experiencia en el área de Educación Infantil, comprometido con mejorar la enseñanza de las matemáticas. Partimos de un paradigma interpretativo de investigación (Bassey, 1999) y de manera natural consideramos pertinente realizar una investigación de carácter cualitativo, intentando comprender, descubrir e interpretar parte de la realidad de profesores de Educación Infantil.

El método de recolección de los datos fue la observación no participante. En este trabajo se ha tomado parte de una sesión en un aula de Educación Infantil de 4 años. En la sesión que analizamos, Javier insiste en remarcar las imágenes de alguna de las caras de ciertos cuerpos geométricos que tiene en madera, de una forma distinta a la que habitualmente ha utilizado en otras clases (la estampación), es decir, mediante la representación en la pizarra de estas figuras planas.

El análisis de los datos se realizó sobre la base de la transcripción de la sesión, aplicando un enfoque interpretativo (Kvale, 1996) en el que se busca comprender y caracterizar los datos desde la lente del modelo MTSK. Además de utilizar la división de subdominios y categorías que proporciona este modelo (SIDM, 2016) como herramienta metodológica, utilizamos también los constructos: *evidencias, indicios* y *oportunidades1* de conocimien-

1 Hemos decido resaltar con un formato diferente cada constructo para hacer más sencilla la asociación de los datos con su respectiva categorización, por lo que una *evidencia* de conocimiento aparecerá en negrita cursiva, un indicio o una oportunidad de conocimiento en cursiva.

tos (Flores-Medrano, 2015) los cuales ayudan a generar un proceso cíclico de análisis en el cual se refina la información para dar certeza a la caracterización. *Evidencia* es cuando la unidad de información representa una prueba contundente del conocimiento del profesor enmarcado en una o varias categorías de los subdominios del MTSK, *indicio* es cuando la unidad de información nos indica o alude a una determinada categoría de un subdominio del MTSK, pero hace falta seguir indagando para que sea una *evidencia* y *oportunidad* cuando a través de la unidad de información se puede crear un entorno para preguntar al profesor sobre un tema específico que nos indique su conocimiento especializado.

## Resultados

A continuación, presentamos los resultados del análisis de distintos episodios (Ribeiro, Monteiro y Carrillo, 2009) de una sesión de clase, a través de los cuales hemos identificado y caracterizado el conocimiento especializado de Javier empleando el modelo analítico MTSK. Mostramos algunos extractos de la trascripción que permiten hacer visible una *evidencia*, *indicio* y/u *oportunidad* de conocimiento que hemos ubicado dentro de un subdominio del MTSK.

*P (Profesor) [Extracto1]: Hoy vamos a hacer como si hiciéramos las estampaciones, pero en vez de hacerlo con la pintura, lo vamos a hacer nosotros en la pizarra, que es más divertido, aunque es más difícil.*

*P [Extracto2]: Cojo un prisma [del material manipulativo] y lo estampo por aquí [señalando una de las bases del prisma] ¿Qué me quedaría?*

*E (Estudiante) 8: Un cuadrado*

*P: [dibuja en la pizarra un cuadrado] Y si lo estampo por aquí [señalando la cara rectangular] ¿Qué me quedaría?*

*E1: Un triángulo*

*P: [se muestra sorprendido] ¿Cómo?*

*Es (Varios estudiantes): Un rectángulo*

*P: [dibuja en la pizarra un rectángulo]*

*P [Extracto3]: [señalando el cuadrado pintado en la pizarra] Sus lados ¿Cómo eran?*

*E8: Todos iguales*

*P: ¿Los del rectángulo? ¿Son todos iguales?*

*Es: Sí*

*P: ¿Éste es igual que éste? [señala sobre el rectángulo pintado en la pizarra]*

*Es: No*

*P:¿Éste es más largo o más corto? […]En el cuadrado son todos iguales [señalando el cuadrado]. En el rectángulo no [señalando el rectángulo]*

*P [Extracto4]: [Dibuja en la pizarra un triángulo equilátero] Vamos a contar cuantos lados tiene el triángulo*

*Es: Tres*

*P: Tiene 3*

*E14: Son todos iguales [refiriéndose a la longitud de los lados]*

*P: Sí, es verdad, son todos iguales, pero puedo ponerlos distintos... [Dibuja en la pizarra un triángulo isósceles]. En este triángulo ¿Son todos iguales?*

*Es: No*

*P [Extracto5]: [Tiene dibujados en la pizarra un cuadrado, un rectángulo, un círculo y un triángulo. Los señala] Se llaman formas planas*

*E7: Como aquel [señalando un prisma]*

*P: No, pero ese no es plano. Cuando está en forma plana, lo tenemos en la pizarra o en un papel y lo que vemos es el rectángulo, el triángulo, el cuadrado y el círculo. Cuando lo podemos coger con las manos, lo podemos tocar. Se llama tridimensional. ¡Qué difícil! [Refiriéndose a la palabra tridimensional]*

En el Extracto 1 (línea 1) se muestra un fragmento de transcripción en el cual se manifiesta que el profesor *conoce dos estrategias didácticas para trabajar el paso de las figuras de 3d a 2d, la estampación y la representación en la pizarra de alguna cara del cuerpo geométrico trabajado,* lo cual se ubicaría en el subdominio de la enseñanza de las matemáticas (KMT). Este extracto nos permite además reconocer una *oportunidad* para indagar acerca de *lo que conoce el profesor acerca de la potencialidad y pertinencia didáctica y matemática que puede tener esa secuencia estratégica,* es decir, en qué momento y con qué objetivo se aplica cada una de estas estrategias, además de reconocer los posibles beneficios o dificultades que podrán presentarse con ellas y así tener una visión más profunda de su KMT. Asimismo, cuando el profesor menciona la dificultad de la representación en la pizarra con respecto a la estampación, surge además la posibilidad de indagar sobre *lo que sabe acerca de los efectos que tiene en los estudiantes el complejizar una tarea con el pretexto de retomar su participación,* lo cual podría ubicarse en el subdominio de las características del aprendizaje (KFLM).

En el Extracto 2 (líneas 2-8) se encuentran *evidencias* de que el profesor *conoce distintos elementos que componen algunos cuerpos geométricos ya que es capaz de descomponerlos en figuras planas*, lo cual se ubicaría en el subdominio de los temas (KoT). En este extracto además se han podido reconocer algunos indicios de que el docente *conoce que el lenguaje matemático preciso es efectivo para promover el conocimiento geométrico,* lo cual podría ubicarse en el subdominio de prácticas matemáticas (KPM) y sobre cómo la elección que realiza el profesor *manifiesta una intención específica en la que reconoce que el utilizar el material manipulativo y generar la estampación de las caras es más potente que hacerlo de forma abstracta, mediante el recuerdo o imagen mental que tengan de ésta,* lo cual podría ubicarse en el subdominio de la enseñanza (KMT). Además, cuando el profesor utiliza una estrategia diferente a la habitual y emplea el material manipulativo como herramienta para que el alumnado observe las caras a representar, surge la *oportunidad* de indagar sobre este uso didáctico del material, es decir, de si el profesor tiene *conocimientos sobre las características matemáticas que tiene, en concreto, este material como recurso para la enseñanza de las figuras planas,* y así poder tener una visión más profunda de su KMT. Por otro lado, podemos decir que *esta elección del material muestra un indicio de conocimiento que le permite anticipar una posible dificultad de los estudiantes para representar las figuras a través de imágenes mentale*s. Del mismo modo, al enfatizar que era una respuesta errónea podemos decir que el profesor muestra un indicio de que *conoce que los alumnos tienen dificultad para proporcionar nombres de figuras y cuerpos geométricos,* que podrían ubicarse en el subdominio de las características de aprendizaje (KFLM).

En el Extracto 3 (líneas 9-15) identificamos una *evidencia* de que el profesor *conoce que la longitud de los lados es una propiedad de las figuras planas,* lo que se ubica en el subdominio de los temas (KoT). Por otra parte, se considera que el docente *conoce que el comparar distintas figuras geométricas resalta las propiedades de cada una de ellas,* ubicado en el subdominio de prácticas matemáticas (KPM). Se muestra también un fragmento de transcripción en el cual se identifica otra *evidencia* de que *conoce que el establecer relaciones entre distintas figuras geométricas es una estrategia*, que ubicamos en el subdominio de la enseñanza (KMT). Asimismo, podemos decir que *conoce que los alumnos tienen dificultad cuando tienen que diferenciar entre cuadrado y rectángulo*, ubicado en el subdominio de las características de aprendizaje (KFLM). Además, en este extracto se convierte en *evidencia* uno de los indicios tratados en el extracto 2 ya que aquí podemos decir que *conoce que los alumnos tienen dificultad para proporcionar nombres de figuras geométricas* (KFLM).

En el Extracto 4 (líneas 16-21) se muestra un fragmento de transcripción en el cual se identifica otra *evidencia* de que el profesor *conoce que existen diferentes tipos de triángulos*, lo que ubicamos dentro del subdominio de conocimiento de los temas (KoT). Este extracto nos permite, además, reconocer una *oportunidad* para indagar acerca del *uso de estos dos tipos de triángulo que nos permite explorar su conocimiento del tema respecto a todos los tipos de triángulos que existen* (KoT). Por otro lado, nos parece evidente que *conoce el uso de contraejemplos para indicar que no todas las longitudes de los lados de un triángulo tienen por qué ser iguales*, lo que ubicamos dentro del subdominio de prácticas matemáticas (KPM).

En el Extracto 5 (líneas 22-24) se identifica una *evidencia* de que el profesor *conoce que las figuras empleadas se pueden agrupar en dos dimensiones (formas planas) o en tres dimensiones (cuerpos geométricos)*, lo que se ubica en el subdominio de conocimiento de los temas (KoT). El uso de los ejemplos promovidos por el profesor en su aula nos brinda la *oportunidad* para profundizar en si *todos los cuerpos geométricos están compuestos por figuras planas*, lo que nos permitiría obtener una visión más profunda de su KoT. Este extracto nos permite reconocer algunos indicios como que el *profesor al agrupar en dos grandes dimensiones y asignarle un lenguaje matemático preciso parece promover el conocimiento geométrico*, lo que podría ubicarse dentro del subdominio de las prácticas matemáticas (KPM). También *que los ejemplos que el profesor utiliza para mostrar las figuras planas parten del material tridimensional del que dispone, lo que indica que el profesor piensa que son ejemplos potentes*, lo que ubicamos en el subdominio de la enseñanza (KMT). Además, *al comentar que la palabra "tridimensional" es una palabra difícil para el alumnado se muestran indicios de que se trata de un concepto demasiado complejo para este nivel educativo, por lo que podemos considerar que acepta el concepto "forma plana" como contenido para este curso*, lo que podría ubicarse dentro del subdominio de los estándares de aprendizaje (KMLS).

## Conclusiones

La investigación en las matemáticas de la etapa de Educación Infantil es un tema en auge (Clements y Sarama, 2014; Charalambous y Pitta-Pantazi, 2016). El profesor tiene un papel muy importante en esta labor y, por lo tanto, éste debe conocer y entender profundamente las matemáticas que enseña (Alsina, 2016).

Existen algunos estudios donde investigadores observan, analizan y evalúan la enseñanza de las matemáticas de los profesores de Educación Infantil (e.g. Hundeland, Erfjord, y Carlsen, 2017; Palmér y Björklund, 2017). En este trabajo hemos caracterizado el conocimiento especializado de un profesor de Educación Infantil mediante la utilización de distintas herramientas metodológicas que nos han permitido, primero, identificar y, después, profundizar en ese conocimiento especializado. El uso de las dos herramientas metodológicas simultáneamente ha servido para comprender mejor el conocimiento especializado de este profesor de Educación Infantil y nos ha dado la posibilidad a nosotros como investigadores, además de los subdominios, de establecer una jerarquía entre *evidencia*, indicio y *oportunidad*. Asimismo, hemos de comentar que en los episodios analizados no hemos logrado explotar estas herramientas como pretendíamos, ya que solo hemos podido ver cómo un indicio se convierte en *evidencia*, pero no cómo se descarta ni cómo una *oportunidad* se convierte en indicio o *evidencia*.

Este estudio pone de relieve la especificidad del conocimiento del profesor de matemáticas incluso en la etapa de Educación Infantil, ya que el conocimiento del profesor para enseñar geometría es diferente al conocimiento del profesor requerido para enseñar números (Muñoz-catalán et al., en prensa). Ligado a lo anterior, podemos afirmar que existen menos estudios acerca del conocimiento del profesor de matemáticas de esta etapa sobre la enseñanza de la geometría que con respecto a números, ya que este bloque de contenidos ocupa un lugar secundario en la mayoría de las aulas (Lorenzato, 1995).

Este análisis muestra un avance sobre la caracterización del conocimiento del profesor de Educación Infantil. Este refleja *evidencias* e indicios de la mayoría de los subdominios de conocimiento, excepto de conocimiento de la estructura de la matemática (KSM), ya que éste requiere de preguntas y objetivos específicos que no suelen presentarse en el salón de clase (Escudero-Ávila et al., 2017). Sin embargo, el conocimiento de los temas (KoT) es el subdominio más hallado de la sesión analizada ya que estos se muestran de forma directa en las observaciones de aula, seguido del conocimiento de prácticas matemáticas (KPM), ya que este concede una función organizadora entre los conocimientos matemáticos y la forma de operarlos. Dentro del dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido, encontramos *evidencias* e indicios de los tres subdominios de conocimiento (KMT, KFLM y KMLS).

Como futura línea de trabajo proponemos realizar una indagación a través de otros instrumentos de recogida de información para albergar mayor información que nos permita refutar o confirmar estos indicios de conocimiento encontrados. Además, podemos tener presente las *oportunidad*es encontradas como *pretexto* para realizar más preguntas acerca de un determinado conocimiento, a fin de que nos puedan ofrecer mayor información sobre el MTSK del profesor.

## Referencias


Alsina, Á. (2016). Contribuciones de la investigación en educación matemática infantil para el diseño, gestión y evaluación de buenas prácticas. En A. Berciano, C. Fernández, T. Fernández, J. L. González, P. Hernández, A. Jiménez, J. A. Macías, F.J. Ruiz y M. T Sánchez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 19-38). Málaga, España: Universidad de Málaga.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham: Open university press.

Boaler, J., y Greeno, J. G. (2000). Identity, agency, and knowing in mathematics worlds. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning: International perspectives on mathematics education* (pp. 171-200). Westport, CT: Ablex Publishing.

Carrillo, J., Montes, M. A., Contreras, L. C., y Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 22*, 185-205.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model.

*Research in Mathematics Education.* DOI: https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Castro, E., y Castro, E. (Coords.) (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil*. Madrid: Pirámide.

Charalambous, C., y Pitta-Pantazi, D. (2016). Perspectives on Priority Mathematics Education: Unpacking and Understanding a Complex Relationship Linking Teacher Knowledge, Teaching, and Learning. In L.D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 19-59). New York, NY: Routledge.

Clements, D. H., y Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach* (2nd ed.). New York, NY: Routledge

Clements, D. H. (2004). Major themes and recommendations. In D.H., Clements, J. Sarama y A.-M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7-72). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Corrales, J., Sanduay, M., Rodríguez, G., Malik, C., y Poblete, A. (2001). "¿Es posible dotar de alguna dinámica a los conceptos de geometría y a las propiedades de las figuras en el aula?". *Revista Números, 48*, 13–24.

Escudero-Ávila, D., Vasco, D., y Aguilar-González, A. (2017). Relaciones entre los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (vol 1, pp. 109-116). Madrid, España: CIBEM. ISSN/ISBN: 978-84-945722-2-7.

Flores-Medrano, E. (2015). Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). Tesis de doctorado publicada en http:// http://rabida.uhu.es/handle/10272/11503.Huelva, España: Universidad de Huelva.

Hundeland, P. S., Erfjord, I., y Carlsen, M. (2017). A kindergarten teacher's revealed knowledge in orchestration of mathematical activities. In T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 10, February 1 – 5, 2017). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education y ERME.

Kilpatrick, J., y Spangler, D.A. (2016). Educating future mathematics education professors. In L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education (Third Edition)* (pp. 297-309). Londres: Rouletdge.

Lorenzato, S. (1995). Por que não ensinar Geometria? *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo, 3*(4), 3–13.

Muñoz-Catalán, M. C., Joglar, N., Ramírez, M., Escudero-Domínguez, A., Aguilar, A., y Ribeiro, M. (En prensa). La práctica de aula: una ventana para acceder al conocimiento especializado del profesor de educación infantil para enseñar matemáticas.

Palmér, H., y Björklund, C. (2017). How do preschool teachers characterize their own mathematics teaching in terms of design and content?, In T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceeding of the tenth congress of the European society for research in mathematics education* (CERME10, February 1-5, 2017) (pp. 1885-1892). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education y ERME.

Perry, B., y Dockett, S. (2002). Young children´s access to powerful mathematical ideas. In L.D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 81-112). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kvale, S. (1996). *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing*. Londres: SAGE.

Ribeiro, C. M., Monteiro, R., y Carrillo, J. (2009). ¿De qué nos informan los objetivos del profesor sobre su práctica? Análisis e influencia en la práctica de una maestra. En M. J. González, y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 415- 423). Santander: SEIEM

Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (2016). *Categorías del modelo MTSK*. Documento interno. Huelva: SIDM.
Stake, R. E. (2005). *Multiple Case Study Analysis*. New York: Guilford Press.
Wernberg, A., Larsson, K., y Riesbeck, E. (2010). Matematik iförskolan (Mathematics in preschool). In B. Riddersporre, y S. Persson (Eds.), *Utbildningsvetenskap för förskolan* (Educational sciences for preschool) (pp. 157–171). Stockholm, Sweden: Natur y Kultur.

# Transformación del conocimiento especializado de futuras profesoras de Primaria sobre división de fracciones

Macarena Valenzuela-Molina
Elisabeth Ramos-Rodríguez

## Resumen

Estudiamos la transformación del conocimiento especializado de futuras profesoras de Educación Primaria sobre división de fracciones. Desde el enfoque cualitativo-descriptivo se realiza un estudio de caso de un grupo de tres estudiantes que diseñan, reformulan e implementan tareas matemáticas dentro de un curso, donde reciben retroalimentaciones de sus pares y formadora y realizan un Análisis Didáctico del tema. Las futuras profesoras manifiestan cambio en su MTSK, iniciando su proceso con un problema sin sentido en el campo conceptual de la división de fracciones, para evolucionar a una estructura multiplicativa del tipo "isomorfismo de medida". Profundizar en los procesos donde se transforma el conocimiento especializado del docente desde su primera etapa formativa nos puede dar luces de cómo mejorar su formación.

## Palabras clave

Didáctica, matemática, formación docente, división, fracciones.

## Abstract

We study the transformation of specialized knowledge of future teachers of Primary Education on division of fractions. From the qualitative-descriptive approach, a case study is made of a group of three students who design, reformulate and implement mathematical tasks within a course, where they receive feedback from their peers and trainer and perform a Didactic Analysis of the subject. The future teachers manifest change in their MTSK, initiating their process with a meaningless problem in the conceptual field of division of fractions, to evolve to a multiplicative structure of the type "measurement isomorphism". To deepen in the processes where the specialized knowledge of the teacher becomes from its first formative stage can give us lights of how to improve its formation.

## Keywords

Didactics, math, teacher training, division, fractions

Valenzuela-Molina, M. y Ramos-Rodríguez, E. (2019). Transformación del conocimiento especializado de futuras profesoras de primaria sobre división de fracciones. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (228-238). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

## Introducción

Un campo importante de investigación en educación matemática es la formación inicial de maestros. Esto se evidencia en los diversos Handbook de educación de profesores de matemática a nivel internacional (Clements, Bishop, Keitel-Kreidt, Kilpatrick y Leung, 2013; English y Kirshner, 2015) y en el estudio TEDS-M (Estudio internacional sobre formación inicial en matemáticas de los maestros), que muestra la relevancia que se le ha dado en los últimos años a esta línea de investigación (Sanz y Martín, 2014).

El diseño de tareas para la división de fracciones es un escenario apto para diagnosticar el MTSK de los futuros profesores (FP) de Educación Primaria. Diversos estudios (Liñán, Barrera, y Infante, 2014; Ma, 2010) han detectado debilidades conceptuales y procedimentales en relación al conocimiento matemático y didáctico de FP sobre el tema. A partir de estos antecedentes y la dificultad en la comprensión de la división de fracciones (Blömeke, Suhl, y Kaiser, 2011; Ramos-Rodríguez, Reyes-Santander y Valenzuela-Molina, 2017), nuestro objetivo es estudiar la transformación del conocimiento especializado de FP de educación primaria sobre división de fracciones al diseñar, reformular e implementar tareas matemáticas dentro de un proceso formativo.

## Marco de referencia

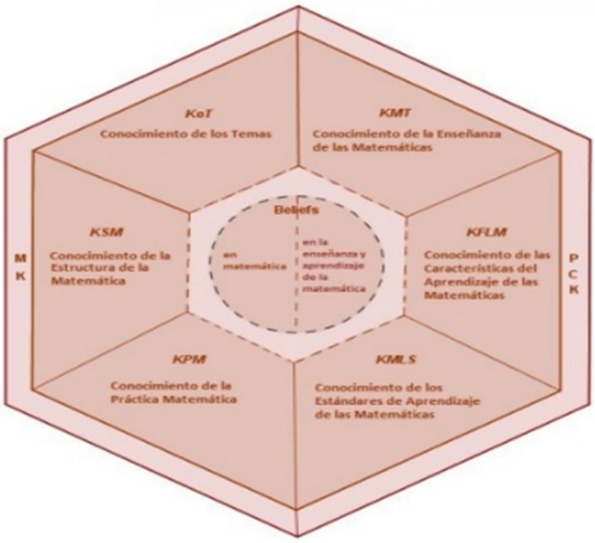
El estudio se ha basado principalmente en el Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK) y se ha indagado en el concepto de transformación de conocimiento que permite el desarrollo profesional de docentes en formación.

### *Conocimiento del profesor de matemática*

El origen del estudio del conocimiento que debieran tener los profesores surge a partir Shulman (1986), quien profundiza en el Conocimiento Didáctico del Contenido del profesor, entendiendo a este como un conjunto de saberes que todo profesor utiliza al enseñar un contenido disciplinar específico. Estos estudios, dan origen a diversos modelos de conocimiento del profesor, en este trabajo nos centramos en el modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) que surge desde el grupo SIDM de la Universidad de Huelva en España, liderado por José Carrillo, cuyo modelo se presenta a través de las componentes esquematizadas en la figura 1.

En esta figura se pueden visualizar dos grandes dominios: el conocimiento de la matemática (MK), el cual cumple un rol articulador de todo el modelo, y el conocimiento didáctico del contenido matemático (PCK), cuyo interés es profundizar en el contenido de la matemática, cuando hay una intención de enseñanza y aprendizaje. También aparecen en el centro de la figura, las creencias sobre la matemática, relacionándose con el MK, y las creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, relacionándose con el PCK

**Figura 1**
**Modelo MTSK (Carrillo et al., 2018)**




(Carrillo et al, 2018). Cada uno de los dominios del MTSK, se divide en tres sub-dominios que se distinguen a continuación.

El dominio del conocimiento de la matemática (MK) considera: a) conocimiento de los temas matemáticos (KoT), profundizando en la materia a enseñar y su nivel de organización y profundización; b) conocimiento de la estructura de la matemática (KSM), que contempla el conocimiento de distintos objetos matemáticos y las conexiones entre ellos; y c) conocimiento de la práctica matemática (KPM), definida “como aquella actividad matemática cuyo uso constituye un pilar en la creación matemática y que tiene un sustento lógico que nos permite abstraer reglas para esta” (Flores-Medrano, 2016, p. 30).

El dominio del conocimiento didáctico de la matemática (PCK) se compone de: a) conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), que caracteriza la enseñanza del contenido, teorías de enseñanza, recursos didácticos, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (Escudero, Contreras y Vasco, 2016); b) conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), como habilidades de análisis de producciones de los estudiantes, identificar dificultades y errores; y c) conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), enfocando el currículo, en un nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado para un tópico en un nivel.

## *Desarrollo profesional inicial a partir de la transformación de conocimiento*

Uno de los primeros acercamientos para identificar la transformación de conocimiento desde el MTSK fue realizado por Ribeiro (2010), quien investigó las prácticas de dos profesoras identificando lo que él llamó una “evolución de su conocimiento profesional”, en el sentido de “back to basics”, referido a no hacer las cosas como las hacía antes, sino que lograban tomar conciencia y readecuaban las prácticas. De esta manera concluye que existe un desarrollo profesional docente.

Otro estudio relevante en esta línea es la tesis doctoral de Flores-Medrano (2015), quien utiliza el concepto de “transformación de conocimiento” desde la postura de cómo conciliar un conocimiento con uno ya existente. En nuestro estudio, nos permitimos utilizar el concepto de “transformación” desde una postura similar, al considerar tareas en las cuales se evidencia un conocimiento inicial, el cual se va modificando de manera consciente y transformando en un nuevo conocimiento al rediseñarlas luego de discusiones y retroalimentaciones en un Estudio de Clases.

Desde otro ámbito ,consideramos la perspectiva sociocultural de Sfard (2008), entendiendo el aprendizaje como una transición gradual de lo que el individuo es capaz de hacer o conocer participando en el colectivo a ser capaz de hacerlo o conocerlo por sí mismo (Escudero, Gavilán y Sánchez-Matamoros, 2014), lo cual le permite hacer transformaciones que dan origen a nuevo conocimiento.

A partir de las ideas de Flores-Medrano (2015), Ribeiro (2010) y Sfard (2008), junto con la definición de trasformación que presenta la Real Academia Española (RAE), la que define el concepto de trasformación como hacer cambiar de forma a alguien o algo, transmutar algo en otra cosa, se sostiene como hipótesis que la "transformación del conocimiento del profesor" (o futuro profesor) se puede evidenciar cuando este manifiesta cambios graduales sobre lo que es capaz de hacer, o conocer participando en el colectivo, a conocerlo por sí mismo, a partir de agentes externos, tomando conciencia de lo nuevo o de los cambios que se generan para la readecuación de la práctica. En nuestro caso, sostenemos que las  FP evidencian transformación de su MTSK al manifestar en diferentes etapas de su formación, cambios en el diseño, rediseño e implementación de tareas matemáticas sobre un tema específico, con una toma de conciencia de los cambios implementados con el fin de lograr aprendizaje en sus estudiantes, lo cual evidencia además, un desarrollo de conocimiento especializado en matemática.

De acuerdo a estos cambios, que van en aumento en las acciones de los individuos y lo que lleva a la transformación en el conocimiento, determinamos que estos son progresivos tanto en ¿qué hacer?, y en el ¿cómo hacer?, son los manifestados por los individuos en diferentes momentos durante su vida y que los lleva a no hacer las cosas de la misma manera, al tomar conciencia de las transformaciones que van incorporando gradualmente en su quehacer docente con propósito de una mejora en la enseñanza o el aprendizaje. Una transformación del MTSK se pone de manifiesto cuando los profesores van reestructurando su conocimiento especializado de tal manera de ir avanzando desde un MTSK inicial a un MTSK lo más idóneo, es decir una reestructuración del anterior. Cabe destacar que no nos referimos a un MTSK final pues este siempre está en constante transformación.

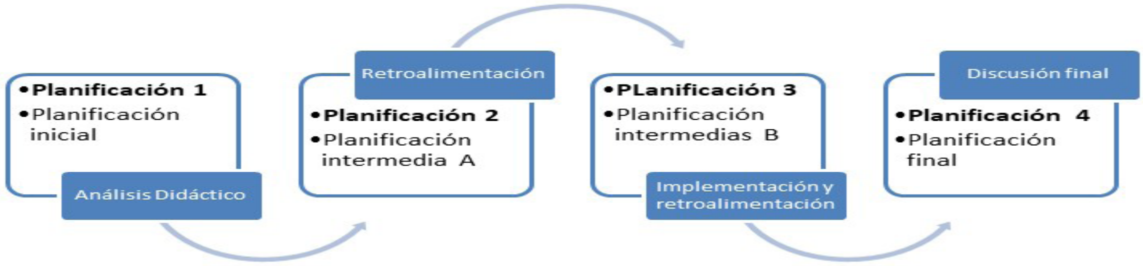
## Metodología de investigación

Este estudio se enmarca en el paradigma cualitativo de tipo descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010) de tal forma de estudiar la transformación del conocimiento especializado de futuras profesoras  de Educación Primaria sobre división de fracciones al diseñar, reformular e implementar tareas matemáticas dentro de un proceso formativo en el cual se utiliza la metodología de Estudio de Clases.

Los sujetos de estudio están en la formación inicial de profesores de Educación Primaria de Chile, una formación generalista con mención en una didáctica específica, en este caso, didáctica de las matemáticas. El título que obtienen les permite trabajar con cursos de 1° a 8° de primaria (alumnos entre 6 y 13 años) impartiendo clases de todas las asignaturas. En este contexto se realiza un estudio de Casos (Stake, 2003), considerando un grupo de tres profesoras en formación que están en su cuarto año de Carrera (de 5 años de duración). Se decide estudiar este grupo por conveniencia para la toma de datos.

La recolección de datos se realiza en cuatro etapas de dos asignaturas, donde las futuras profesoras diseñan y refinan una clase de acuerdo al Estudio de Clases, a partir de diferentes dispositivos formativos que les permiten ir construyendo nuevo conocimiento: un Análisis Didáctico (Rico, 2013), las observaciones y retroalimentaciones de su formadora, las reflexiones de su implementación en aula y de la discusión entre pares y profesora formadora. Este proceso se ilustra en la figura 2.

**Figura 2**
**Etapas de planificación de una clase**




Los instrumentos de recogida de datos fueron las planificaciones de clases propuestas por las FP en cada etapa y las trascripciones de las grabaciones de video de las sesiones y retroalimentaciones donde el grupo expone sus propuestas.

El estudio se realiza con base en el método de análisis de contenido (Flick, 2004), considerando categorías desde el MTSK de manera de establecer descriptores que permitan identificar el conocimiento y su transformación, evidenciando elementos de los diferentes dominios especializados, tanto en lo matemático como didáctico del contenido.

## Resultados y análisis

Al iniciar el proceso formativo, la formadora solicita a las FP que identifiquen una problemática en la enseñanza de las fracciones, donde el grupo manifiesta el problema: mecanización del algoritmo de productos cruzados para la división de fracciones. Luego se les pide que diseñen una secuencia de clases para trabajar este problema. Ellas seleccionan un objetivo de clase y un nivel específico de enseñanza y dan inicio a este proceso de planificación. En la tabla 1 se presenta los enunciados de la tarea principal que proponen la FP en cada etapa.

**Tabla 1**
**Progresión de enunciados de la tarea matemática central de la clase**

| Tarea T1.1 de la planificación 1 | Tarea T1.2 de la planificación 2 | Tarea T1.3 de la planificación 3 | Tarea T1.4 de la planificación 4 |
|---|---|---|---|
| Pablo tiene 3/4 de frambuesas para rellenar panqueques. Él sabe que cada panqueque necesita 3/2 de las frambuesas que tiene ¿Cuántos panqueques logra rellenar con las frambuesas? | Un lazo rojo mide m de largo. Un lazo azul mide m de largo. ¿Cuántas veces cabe el largo del lazo azul en el largo del lazo rojo? | Una cinta amarilla mide 4 metros de largo y otra cinta color morado mide metro de largo. ¿Cuántas veces cabe el largo de la cinta morada en el largo de la cinta amarilla?<br>Pueden usar las cintas para resolver | Una cinta amarilla mide 4 unidades de largo y otra cinta morada mide 1/2 unidad de largo. ¿Cuántas veces cabe el largo de la cinta morada en el largo de la cinta amarilla?<br>Pueden usar las cintas para resolver. (opcional) |

Los cambios realizados por las FP en el planteamiento de estas tareas responden a los diferentes reactivos proporcionados durante el proceso formativo, en que se enfrentan además a una continua retroalimentación de sus pares y su formadora.

Otro dato considerado para el análisis se extrae de una instancia de trabajo entre el grupo y la profesora formadora que se enfoca en la revisión de la Tarea T1.2 se evidencia en las transcripciones del diálogo que sigue. En este contexto y a partir de retroalimentaciones y discusiones respecto de la clase en general, se detienen a evaluar la selección de las fracciones en la propuesta de Tarea T1.2, originándose la siguiente discusión, donde FP1 y FP2 corresponde a dos de las futuras profesoras y F a la formadora.

### Diálogo entre FP y formadora

*FP1: O sea, pienso que a lo mejor se debe partir con algo que "cabe", que haya más veces adentro de un "algo", porque igual el lazo no "cabe", entonces una de las respuestas puede ser que no cabe.*

*F: y ahí ¿tendríamos que cambiar la fracción?*

*FP1: Sí*

*F: Ya ¿Cómo se te ocurre que podría ser?*

*FP1: nosotras habíamos dicho que, al fin y al cabo, en la segunda fracción siempre tenía que ser impropia.*

*F1: ¿Para qué?*

*FP1: Para hacer el inverso ...[Silencio]*

*F: pero es que todavía no estamos viendo el inverso, estamos en la primera clase. Está bien, pero estamos en la primera clase en donde nuestro objetivo es comprender la división de fracciones. Todavía no le hemos puesto objetivo, pero recuerden que estamos viendo lo que dice el Objetivo de aprendizaje y este dice dos cosas, una es que comprendan a través de lo pictórico y la otra es que utilicen el inverso multiplicativo1, entonces ahí hay dos cosas distintas.*

*FP2: entonces para la primera clase no necesariamente la segunda fracción [el divisor de la división] podría ser cualquiera*

*F: depende de cuál es el objetivo que nos vamos a plantear. Si nosotras nos planteamos como objetivo solamente que el estudiante comprenda la división de las fracciones, no es necesario manipular esas cantidades, sino, más bien queremos que el alumno comprenda [la división de fracciones]. Entonces, ahí el lazo puede ser, por ejemplo, tres cuartos del lazo, y el que vamos a dividir puede ser uno más pequeño, lo que si tenemos que ver que coincidan el largo total del lazo con los lazos pequeños [que la fracción del lazo mayor contenga exactamente la fracción del lazo pequeño]. Entonces, cuántas veces, esa fracción va a estar contenida en la fracción mayor.*

*FP2: me imagino que tengo el lazo, que tengo los lazos chiquititos que van cayendo dentro de este lazo grande y si, por ejemplo, el lazo en la esquina me queda una punta un pedacito de ese lazo [aludiendo a que la fracción divisor no está contenida exactamente en la fracción dividendo].*

1 El Objetivo de aprendizaje donde se enmarca la clase las FP lo extraen del currículum nacional, dice "Comprender la división de fracciones por medio del inverso multiplicativo, de manera pictórica y simbólica, mediante la resolución de problemas cotidianos..."

En la figura 3, se exponen las reflexiones de las FP, las retroalimentaciones y la toma consciencia con que eligen fracciones, según lo que pretenden lograr en sus estudiantes, evidenciando transformaciones que se producen a medida que avanza en cada etapa.

Para esta comunicación hemos seleccionado dos subdominios de análisis desde el MTSK, el Conocimiento de los Temas (KoT) y el Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT), los cuales detallaremos a continuación.

## *Análisis desde el Conocimiento de los Temas (KoT)*

Desde la fenomenología asociada a los contextos, en la tarea T1.1 las futuras profesoras utilizan situaciones del contexto personal para la división de fracciones, con la preparación de alimentos como una actividad del propio individuo o grupo familiar. Después de realizar el análisis didáctico de la división de fracciones, donde el grupo estudia los distintos contextos presente en la división de fracciones, el grupo decide cambiar este contexto, lo que origina la tarea T1.2 con un contexto más social, con el uso de implementos que suelen generarse en contextos laborales, como en la construcción o en el oficio de la costura. Ambos contextos son adecuados para la enseñanza.

Sin embargo, considerando la estructura multiplicativa de las fracciones, desde el isomorfismo de medida en que la incógnita es el número de veces que contiene una determinada medida, en la T1.1 y T1.2 la fracción divisor es mayor a la fracción dividendo, lo que impide que la división en sí tenga sentido para el contexto dado, ya que al preguntar ¿cuántas veces cabe? se desprende la interpretación de la división de fracciones como cuotitiva, pues necesariamente la fracción divisor debe ser menor a la fracción dividendo (Contreras, 2012), lo cual no se ha cambiado entre una tarea a otra.

A partir de la tarea en sí misma, no es posible evidenciar el por qué de la selección de las fracciones, pero al leer el extracto del diálogo en la figura 3, entre la T1.2 y T1.3 es posible observar que el tema respecto a la selección de fracciones no les es indiferente a las FP, ya que ellas están conscientes de la dificultad que presenta en los estudiantes que el divisor no está contenido en el dividendo, sin embargo, decidieron mantener en la T1.2 estas fracciones, para cambiarlas en la T1.3 .

Desde los significados de la división, en la tarea T1.1 se evidencia un problema con representación discreta, con la cantidad de panqueques. Posteriormente y luego de estudiar las diferentes interpretaciones asociadas a la división de fracciones (cuotativa, partitiva, continua o discreta, de área o lineal, etc.), el grupo propone la tarea T1.2 del tipo cuotativa de medida, con el uso de un problema continuo lineal de la división de fracciones, donde utiliza lazos que representan a la medida continua. Esto evidencia una transformación del conocimiento, supeditado a la progresión de enseñanza de las fracciones a partir de representaciones continuas, por sobre las discretas, que son más complejos de comprender por los estudiantes (Llinares y Sánchez, 1988).

## *Análisis desde el Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT)*

Desde la enseñanza de la división de fracciones y su riqueza de acuerdo a las tareas propuestas y presentadas a sus pares y a la formadora, para discusión y retroalimentación, surge la tarea T1.3, donde se puede evidenciar dos cambios respecto a la versión anterior T1.2. El primero de ellos es que T1.1 y T1.2 consideran una fracción cuyo dividendo es una fracción propia y el divisor es una fracción impropia . Luego la versión T1.3 considera el uso de una división de fracciones cuyo dividendo es un número natural 4 y el divisor es una fracción propia que cabe exactamente en el dividendo. Esto manifiesta una transformación del conocimiento de las futuras profesoras sobre el tipo de fracciones a considerar para el inicio de la enseñanza de las divisiones de fracciones, como se observa en el diálogo de la figura 3, pues las FP están conscientes del tipo de fracciones a considerar y en la T1.3 las cambian.

Ambos cambios en la tarea permiten evidenciar transfromación del conocimiento, ya que se inicia la enseñanza de la división de fracciones con dividendo con número natural y divisor con fracción propia, progresión de enseñanza de las fracciones propuesta por el texto para la formación de profesores de primaria utilizado en la formación inicial docente en Chile (Lewin, López, Martínez, Rojas, & Zanocco, 2013).

## Conclusiones

Nuestro objetivo fue analizar la transformación del conocimiento manifestado por las futuras profesoras en el diseño de las tareas matemáticas escolares. A partir de los análisis anteriores es posible identificar ciertos cambios progresivos de una tarea a otra.

En el KoT se evidencia una transformación de conocimiento sobre el uso de diversos contextos para la división de fracciones, tanto personales como sociales. Desde el conocimiento de las estructuras multiplicativas de isomorfismo de medida, las situaciones propuestas son del tipo "división de medida", partiendo desde una representación discreta en la T1.1 cambiando a una representación continua desde la T1.2 en adelante. Esto evidencia un cambio en la propuesta desde la toma de consciencia de las FP en la progresión de enseñanza más pertinente para iniciar la división de fracciones (Llinares y Sánchez, 1988).

En KMT hay avances en la riqueza de las tareas propuestas de acuerdo a la progresión en la enseñanza de división de fracciones, desde el uso del tipo de fracciones (propias, impropias, mixtas, igual a la unidad) a considerar en la operatoria de acuerdo al nivel de dificultad. Esto revela un desarrollo del conocimiento sobre KMT de las futuras profesoras, sobre la riqueza de la tarea propuesta según tipo de fracciones a considerar y progresión de su enseñanza en contextos de medida con modelos continuos.

Además, parece ser que los aspectos que se transforman el KoT tienen una incidencia en el KMT, pues cada profundización en el contenido matemático, en este caso en los contextos y en los significados de la división de fracciones, permite tomar decisiones frente al diseño de tarea enriquecedoras, de acuerdo a la progresión en la enseñanza. Esto se evidencia en los cambios que se observan de una tarea a otra, en donde se hace explícito un conocimiento del KoT que luego se manifiesta en el KMT. Por ejemplo, en la tarea T1.2 se utiliza un significado de la división de fracción como medida continua (KoT), el cual incide en la riqueza de la tarea T1.3 al presentar una división de un entero en una fracción propia, cuyo dividendo está contenida exactamente en el entero y luego cambiar la unidad de medida por no estandarizada en la tarea T1.4, aspectos que permiten mejorar la progresión de la enseñanza de la división de fracciones (KMT), es decir, se manifiesta transformación del KoT y del KMT, y en consecuencia del MTSK.

Nos interesa seguir estudiando la transformación del conocimiento especializado del profesor de matemática, sus implicancias en las decisiones que toman y la manera en que se produce este desarrollo de conocimiento, de tal forma de levantar elementos formativos que permiten generar o transformar conocimiento en este segmento de la formación de profesores.

## Referencias

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco-Mora, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). *The Mathematics Teacher Specialised Knowledge (MTSK) model. Research in Mathematics Education 20*(3), 236-253.

Clements, M. Bishop, A., Keitel, C., Kilpatrick, J., y Leung, F. (2013). *Third International Handbook of Mathematics Education*. New York: Ed. Springer.

Contreras, M. (2012). *Problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. Un estudio sobre su enseñanza y aprendizaje* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, España.

English, L. D., y Kirshner, D. (Eds.). (2015). *Handbook of international research in mathematics education*. Routledge.

Escudero-Ávila, D., Contreras, L. y Vasco, D. (2016). Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 35-41). SGSE: Huelva.

Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Morata.

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK).* Tesis doctoral. Huelva: Universidad de Huelva.

Flores-Medrano, E. (2016). Conocimiento de la práctica matemática (KPM). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 30-34). SGSE: Huelva.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación.* México: McGraw-Hill.

Llinares, S., y Sánchez, M. (1988). *Fracciones*, *la relación parte todo*. Madrid: Editorial Síntesis S.A

Ribeiro, C. M. (2010). *El desarrollo profesional de dos maestras inmersas en un grupo de trabajo colaborativo, a partir de la modelización de sus clases de matemáticas* ( Tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Rico, L., Lupiáñez, J. L., y Molina, M. (2013). *El análisis didáctico en educación matemática*. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores. Granada, España: Universidad de Granada.

Sanz, I. y Martín, R. (2014). *El estudio TEDS-M de la IEA en el marco del Instituto Nacional de Evaluación educativa* (INEE). país?: Eiorial?

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourse, and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher, 15*(2), 4-14.

**AUTORES Y FILIACIONES**


*Álvaro Aguilar-González, Universidad de Oviedo, España*

*Christian R. Alfaro, Universidad de Costa Rica, Costa Rica*

*Marieli V. R. de Almeida, Universidade Estadual de Campinas, Brasil*

*Blanca Arteaga-Martínez, Universidad de Alcalá, España*

*Joaquim Barbe, Universidad de Santiago de Chile, Chile*

*Víctor J. Barrera, Universidad de Sevilla, España*

*Juan Miguel Belmonte, Universidad Complutense de Madrid, España*

*Alejandro Cabrera, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile*

*Modemar Campos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México*

*Leandro Carbo, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso – Campus São Vicente, Brasil*

*José Carrillo, Universidad de Huelva*

*Nuria Climent, Universidad de Huelva*

*Myriam Codes, Universidad de Huelva*

*Luis Carlos Contreras, Universidad de Huelva*

*Silvania Couto, Universidade Estadual de Campinas, Brasil*

*Rosa Delgado, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile*

*Ana Escudero-Domínguez, Universidad de Sevilla, España*

*Dinazar Escudero-Ávila, Investigador Independiente*

*Lorena Espinoza, Universidad de Santiago de Chile, Chile*

*Edson Evangelista, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Brasil*

*Joaquín Fernández-Gago, Universidad de Málaga*

*Eric Flores, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México*

*María García, Universidad Autónoma de Guerrero, México*

*Yosenith A. González, Universidad de Costa Rica, Costa Rica*

*Esperanza Hernández, Universidad Complutense de Madrid, España*

*Nuria Joglar-Prieto, Universidad Complutense de Madrid, España*

*Stela Silva Lima, Universidade Federal de Mato Grosso, Brasil*

*Mª Mar Liñán-García, Universidad de Sevilla / Centro de Estudios Universitarios Cardenal Spínola CEU, España*

*Eugenio Lizarde, Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos", México*

*Mónica Luís, Agrupamento de Escolas de São Brás de Alportel, Brasil*

*José Mª. Marbán, Universidad de Valladolid, España*

*Ana Maroto, Universidad de Valladolid, España*

*Marcela Marques, Instituto Federal de Mato Grosso, Brasil*

*Geison J. Mello, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso – Campus Cuiabá, Brasil*

*Manuel Montañez-Esparza, Escuela Primaria Rural "Hijos del Ejido", México*

*Rute Monteiro, Universidade do Algarve, Portugal*

*Miguel Ángel Montes, Universidad de Huelva, España*

*Joseany Moreira, Instituto Federal de Mato Grosso. Universidade de Cuiabá, Brasil*

*Jeferson G. Moriel-Junior, Instituto Federal de Mato Grosso, Brasil*

*Laura Muñiz-Rodríguez, Universidad de Oviedo, España*

*Mª Cinta Muñoz, Universidad de Sevilla, España*

*Mª Isabel Pascual, Universidad de Huelva, España*

*María Pezoa-Reyes, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile*

*Ruth Noemí Pizarro, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile*

*Mónica Ramírez-García, Universidad Complutense de Madrid / Centro Superior de Estudios Universitarios La Salle, España*

*Elisabeth Ramos-Rodríguez, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile*

*Miguel Ribeiro, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, Brasil*

*Renato D. G. L. Ribeiro, UNESP – Universidade Estadual Paulista / IFSP – Instituto Federal de São Paulo, Brasil*

*Luis José Rodríguez-Muñiz, Universidad de Oviedo, España*

*Susel Taís Coelho Soares, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso – Campus Cuiabá Bela Vista, Brasil*

*Edvonete Souza de Alencar, Universidade Federal da Grande Dourados, Brasil*

*Macarena Valenzuela-Molina, Universidad Alberto Hurtado, Chile*

*Diana Vasco-Mora, Universidad Técnica Estatal de Quevedo, Ecuador*

*Diana Zakaryan, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile*